TP2: Analytische Mechanik & Statistik/Thermodynamik

Vorbemerkungen:
- Verhältnis Mech : Stat. ca. 2 : 1
  ("Stat." ist also nur eine Einführung – trotzdem von größter prinzipieller Bedeutung.)
- Der jetzt sofort folgende "Lagrange-Formalismus" der Mechanik ist relativ abstrakt und seine Eleganz und Nützlichkeit erschließt sich erst in den folgenden Semestern. Sie müssen sich "einfach darauf einlassen"!

1 Lagrange-Formalismus

- Das "Wirkungsfunktional" ist eine Abb.

  Trajektorie ($\equiv$ Funktion) $\longmapsto$ reelle Zahl.
- Es wird mit Hilfe der "Lagrange-Fkt." definiert.
- Das Wirkungsprinzip (Hamilton-Prinzip) besagt, dass die phys. Bewegung so verläuft, dass das Wirkungsfunktional minimal wird. $\Rightarrow$ Dgl. $\equiv$ Bewegungsgl. $\equiv$ "Euler-Lagrange-Gl."

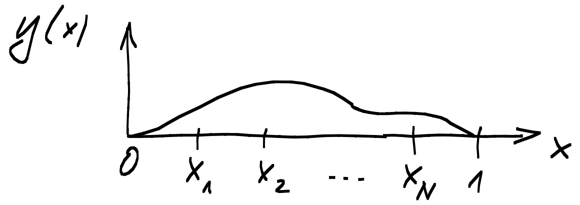
1.1 Variationsrechnung

M1 – Das Funktional

Funktion (mehrerer Variablen): $\mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad \bar{x} \longmapsto y(\bar{x})$

$$\boxed{\text{Funktional: Raum (Menge) von Fkt.-en } \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad y \longmapsto F[y]}$$

Bsp.: Sei $\mathbb{V}$ der Raum der diff.-baren Fkt.-en auf $[0,1]$ mit $y(0) = y(1) = 0$.



Wenn wir uns $[0,1]$ "diskretisiert" denken, ist die Fkt. y schlicht der Vektor $\{y(x_1), \cdots, y(x_N)\}$ und unser Funktional eine Fkt. mehrerer Variablen. Der "echte" Funktionalbegriff "folgt" somit aus dem Funktionsbegriff wenn $N \to \infty$.

<u>Beispielfunktionale zu obigem V:</u>

$$F_1[y] = y(0.5)$$

$$F_2[y] = y'(0.3)$$

$$F_3[y] = y(0.1) + y(0.5) + y'(0.9)$$

$$\vdots$$

$$F[y] = \int_0^1 dx\, f(y(x), y'(x), x)$$

(Wobei f eine Funktion von 3 Variablen ist.)

Das letzte Bsp. wird im Folgenden besonders wichtig sein

M1

- Wichtige Funktionale aus der phys. Anwendung sind:

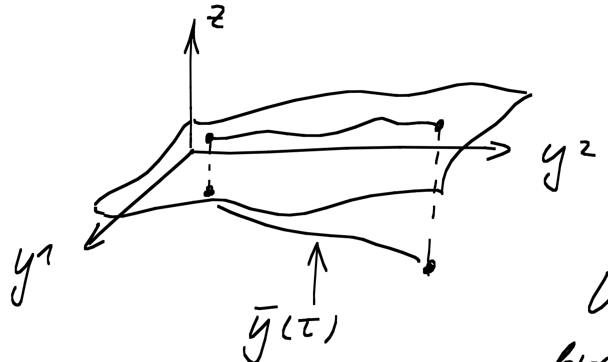
1) <u>Weglänge</u>: Sei $\bar{y} : \tau \longmapsto \bar{y}(\tau)$ (mit $\tau \in [0,1]$ und $\bar{y}(0) = \bar{y}_a$; $\bar{y}(1) = \bar{y}_b$) ein Weg von $\bar{y}_a$ nach $\bar{y}_b$.

Die Weglänge ist offensichtlich

$$F[\bar{y}] \equiv \int_{\bar{y}_a}^{\bar{y}_b} |d\bar{y}| = \int_0^1 d\tau \sqrt{\left(\frac{d\bar{y}}{d\tau}\right)^2}.$$

(Dies ist sogar ein Funktional einer vektorwertigen Fkt. bzw. von 3 Funktionen: $F[\bar{y}] = F[y^1, y^2, y^3]$.)

2) <u>Weglänge im Gebirge:</u> $\bar{y} = (y^1, y^2)$ die Projektion eines Weges im Gebirge auf die horizontale Ebene. Offensichtlich



gehört zu jeder Fkt.

$$\bar{y} : \tau \longmapsto \bar{y}(\tau)$$

eine Weglänge $F[\bar{y}]$.

Um diese explizit hinzuschreiben braucht man noch die "Höhenfunktion $z : \bar{y} \longmapsto z(\bar{y})$.

$\longrightarrow$ Übungen

- Es ist offensichtlich, dass die Minimierung (Extremalisierung) solcher Funktionale wichtig ist. Für Funktionen wissen wir schon

$$\underline{y \text{ hat Extremum bei } x_0 \Rightarrow y'(x_0) = 0.}$$

Was ist die analoge Bedingung für Funktionale?

<u>M2 – Extremalisierung eines Funktionals</u>

- Sei $F[y] = \int_0^1 dx\, f(y, y', x)$ ein Funktional auf dem Raum der $2\times$ diff.baren Fkt.-en $y : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $y(0) = y_a$, $y(1) = y_b$.
- Annahme: $F[y]$ wird durch die Fkt. y_0 extremalisiert.
- Sei δy eine beliebige $2\times$ diff.bare Fkt. mit $\delta y(0) = \delta y(1) = 0$.
- Dann erfüllt $y_\alpha \equiv y_0 + \alpha\, \delta y$ (mit $\alpha \in (-\varepsilon, \varepsilon)$) die Randbedingungen für y und wir können die

folgende Fkt. betrachten:
$$\begin{array}{ccc} (-\varepsilon, \varepsilon) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \alpha & \longmapsto & F[y_\alpha]. \end{array}$$

- Gemäß unserer Annahme hat diese Fkt. ein Extremum bei $\alpha = 0$, also:
$$\frac{d}{d\alpha} F[y_\alpha] = 0 .$$

- Wir Taylor-entwickeln $F[y_\alpha]$ um $\alpha = 0$:
$$F[y_\alpha] = \int_0^1 dx\, f(y_0 + \alpha \delta y, y_0' + \alpha \delta y', x)$$
$$= F[y_0] + \int_0^1 dx \left\{ \frac{\partial f}{\partial y}(y_0, y_0', x)\, \alpha \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}(y_0, y_0', x)\, \alpha \delta y' \right\} + O(\alpha^2)$$

- Da der Ausdruck linear in α verschwinden muss, haben wir:
$$0 = \int_0^1 dx \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx}(\delta y) \right\} \underset{\uparrow}{=} \int_0^1 dx \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} \delta y - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) \delta y \right\}$$

$\frac{\partial f}{\partial y'} \cdot \delta y = 0$ bei $x = 0, 1$

$$0 = \int_0^1 dx \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) \right\} \delta y(x)$$; für <u>beliebige</u> δy !

<u>Also</u>:

y_0 extremalisiert $F \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0}$ (Eulersche Dgl.)

bei $y = y_0$ für alle $x \in [0,1]$

M2

1.2 Das Hamiltonsche Prinzip (Prinzip d. kleinsten Wirkung)

- Wir beschreiben die Lage eines mech. Systems durch sogenannte "<u>verallg. Koordinaten</u>" $(q_1, \cdots, q_s)$.

Beispiele dazu:

- N Massenpkt.-e: $(q_1 \cdots q_s) \equiv (x_1^1, x_1^2, x_1^3, x_2^1, x_2^3, \cdots, x_N^3)$

$(s = 3N)$

- 1 Massenpkt. in Kugelkoord.: $(q_1 \cdots q_3) = (r, \theta, \varphi)$
- Dünne Stange: $(q_1 \cdots q_3) = (\underbrace{x^1, x^2, x^3}_{\text{Lage des Schwerpkt.-es}}, \underbrace{\theta, \varphi}_{\text{Ausrichtung im Raum}})$
- Rad auf Welle: $q_1 = \varphi$
- Perle auf Draht: $q_1 = s$ (Bogenlänge entlang Draht)

Hamiltonsches Prinzip:

Für (jedes)* mech. System existiert eine Fkt. ("Lagrange-Fkt.")

$$L = L(q_1, \cdots, q_s, \dot q_1, \cdots, \dot q_s, t) \qquad \text{kurz: } L = L(q, \dot q, t)$$

so dass gilt:

> Die phys. Bewegung aus einer Lage $q = q^{(1)}$ bei $t = t_1$ in eine Lage $q = q^{(2)}$ bei $t = t_2$ verläuft so, dass
>
> $$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q, \dot q, t) \qquad (\text{"Wirkungsfunktional"})$$
>
> extremal wird.

Kommentare:

- Für kleine Bahnabschnitte gilt sogar Minimalität.
- Die besondere Bedeutung ergibt sich aus der Anwendbarkeit in SRT/ART, Feldtheorie, Stringtheorie, ... und der enormen Nützlichkeit bei der Quantisierung.
- Für einen "Freiheitsgrad" $(s=1)$ wissen wir somit bereits:

[*) in einer gewissen, sehr großen Klasse]

Hamilton-Prinzip $\Rightarrow$ Bew.-gl. (= Euler-Lagrange-Gl.;
= Lagr.-Gl.-en 2. Art)

$$\left\| \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \right\|.$$

- Unsere obige Herleitung lässt sich leicht verallgemeinern und gibt für allgemeines s:

$$\left\| \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \text{für } i = 1 \cdots s \right\|$$

(s Dgl.-en 2. Ordnung)

1.3 Die Form von L und erste Anwendungen der Lagr.-Gl.-en

Fundamentaler ("exp.") Fakt: $\boxed{L = T - V}$

$\uparrow$ kin. $\quad\uparrow$ pot. Energie

- L (bzw. S) kann als fund. Größe der Dynamik aufgefasst werden und bedarf somit keiner Herleitung (höchstens evtl. einer Begründung aus Symm.prinzipien – siehe später).
- Trotzdem existiert natürlich eine Herleitung aus "Newton" (siehe später), da Newton historisch Lagrange vorausgeht.

① Massenpkt. in Potential: $L(\bar x, \dot{\bar x}, t) = \frac{m}{2}\dot{\bar x}^2 - V(\bar x)$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot x^i} L - \frac{\partial}{\partial x^i} L = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} m\dot x^i + \frac{\partial V}{\partial x^i} = 0$$

$$\Rightarrow m\ddot x^i - F^i = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{\bar x} = \bar F \quad ✓$$

② System wechselwirkender Massenpunkte

$$T = \sum_a T_a = \sum_a \frac{m_a}{2}\dot{\bar x}_a^2 \quad ; \quad V = \sum_{a>b} V_{ab}(|\bar x_a - \bar x_b|)$$

$$L = T - V$$

$$\Rightarrow m_a \ddot{\bar{x}}_a = \bar{F}_a \quad \text{mit} \quad \bar{F}_a = \sum_b \bar{F}_{ab} = -\bar{\nabla}_a \sum_b V_{ab}\left(|\bar{x}_a - \bar{x}_b|\right)$$

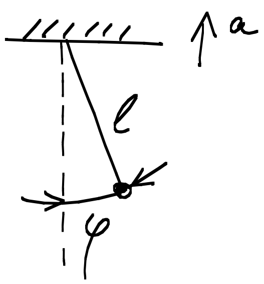
③ Perle auf Draht

Draht beschrieben durch $\bar{x}(s)$, s – Bogenlänge

$$L = \frac{m}{2} v^2 - V(\bar{x}(s)) = \frac{m}{2}\dot{s}^2 - V(\bar{x}(s))$$

$$\Rightarrow m\ddot{s} - \underbrace{(-\bar{\nabla} V)\cdot \underbrace{\frac{d\bar{x}}{ds}}_{\text{Einheitsvektor in Drahtrichtung}}}_{\text{Projektion der Kraft auf Drahtrichtung}} = 0$$

④ (Mathematisches) Pendel im Fahrstuhl



$$L = \frac{m}{2}\bar{v}^2 - V$$

$$\bar{v} = \left((l\sin\varphi)^{\cdot},\ at - (l\cos\varphi)^{\cdot}\right)$$

$$V = mg\left(\frac{a}{2}t^2 - l\cos\varphi\right)$$

$$\Rightarrow 0 = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\underbrace{\left(\frac{m}{2}\bar{v}^2 - V\right)}_{\frac{m}{2}\left[l^2(\cos^2\varphi)\dot{\varphi}^2 + (at + l(\sin\varphi)\dot{\varphi})^2\right] - mg\left(\frac{a}{2}t^2 - l\cos\varphi\right)}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\left(l^2 2\dot{\varphi} + 2atl\sin\varphi\right)\right) - \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{m}{2}2atl\dot{\varphi}\sin\varphi + mgl\cos\varphi\right)$$

$$0 = ml^2\ddot{\varphi} + mal\sin\varphi + malt(\cos\varphi)\dot{\varphi} - malt\dot{\varphi}\cos\varphi + mgl\sin\varphi$$

$$\Rightarrow ml\ddot{\varphi} = -m(g+a)\sin\varphi \quad \checkmark$$

- Offensichtlich lässt sich der vom Aufhängungspkt. ausgehende "Zwang" (selbst mit Zeitabhängigkeit!) mittels "Lagrange" leicht berücksichtigen.
- Analog ist auch ein aus anderen Gründen zeitabhängiges V kein Problem! (z.B. zeitabhängiges E-Feld etc.)

1.4 Vereinfachte Herleitung der Lagrange-Gl. & Schlusskommentare

- Sei $\delta q(t)$ eine Variation der Trajektorie $q(t)$.
- Extremalität von S bedeutet:

$$0 = \delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \delta L(q,\dot{q},t) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right]$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt}(\delta q) \right] \underset{\text{weil } \delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0}{=} \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q} \delta q - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \right]$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right) \delta q$$

Weil $\delta q(t)$ beliebig, muss $(\dots)$ identisch verschwinden. ✓

Kommentare:

① Argumente von L: Wir lassen (i.A.) nicht zu, dass $\ddot{q}$, $\dddot{q}$ etc. in L vorkommen, weil die Bew.-gl.-en dann $\ddddot{q}$, $\dddot{q}$ etc. enthalten würden. (Dann reichen unsere gewohnten Anf.bedingungen nicht mehr!)

② Totale Zeitableitungen: Sei $L' = L + \frac{d}{dt} f(q,t)$

$\dot{q}$ etc. nicht erlaubt wegen ①

$$\Rightarrow S' = S + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} f(q,t)$$

$$= S + \underbrace{\left[f(q^{(2)},t_2) - f(q^{(1)},t_1) \right]}_{\text{unabh. von } \delta q \text{ !}}$$

$\Rightarrow \delta S' = \delta S \quad \Rightarrow \quad L'$ gleichwertig mit L bzw. L ist nur bis auf totale Zeitableitung definiert.

③ Bedeutung von S in Quantenmechanik (fortgeschritten)

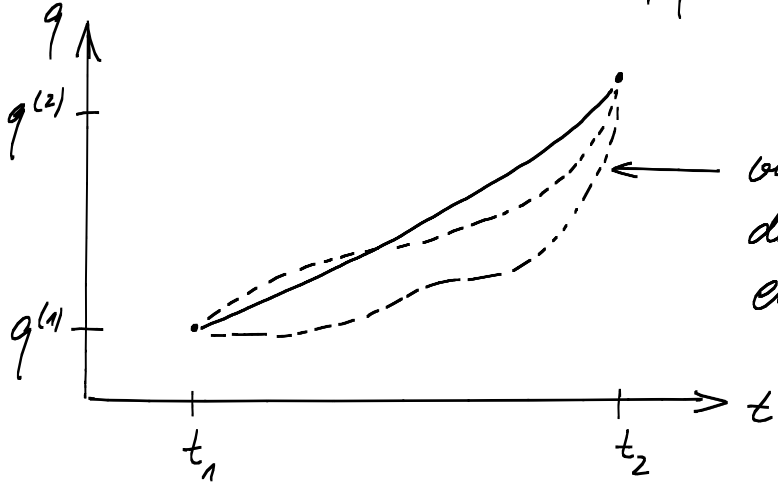
Die Wahrscheinlichkeit für den Übergang eines Systems von $(q^{(1)}, t_1)$ nach $(q^{(2)}, t_2)$ ist:

$$w \sim |A|^2 \; ; \quad A \in \mathbb{C} \text{ ist die "Amplitude"}$$

und es gilt:

$$A \sim \underbrace{\int \mathcal{D}q}_{} \; e^{iS[q]/\hbar}$$

Summe über alle möglichen Wege von $q^{(1)}$ bei t_1 nach $q^{(2)}$ bei t_2 = "Pfadintegral".



verschiedene Fkt.-en $q(t)$; der klass. Weg ist nur einer davon.

(Im Limes $\hbar \to 0$ dominiert der klass. Weg in A, weil alle anderen Integrationsbereiche wegen der sehr schnelle Oszillation von e^{iS} nicht beitragen.)