10 Schwingungen & Kontinua

10.1 Kleine Schwingungen allgemeiner Systeme

A) Ein Freiheitsgrad

- Allgemeine Lagrange-Fkt.: $L = \frac{1}{2} f(q)\dot{q}^2 - V(q)$
- Sei q_0 eine Ruhelage, d.h. $V'(q_0) = 0$
- Definiere $q = q_0 + \tilde{q}$. Anschließend Umbenennung $\tilde{q} \to q$.

$$\Rightarrow \quad L = \frac{1}{2} f(q_0+q)\dot{q}^2 - V(q_0+q) \underset{\text{Taylor}}{=} \frac{1}{2} f(q_0)\dot{q}^2 - V(q_0) - \frac{1}{2} V''(q_0) q^2 + O((q \text{ od. } \dot{q})^3)$$

irrelevant

$$\Rightarrow \quad L \approx \frac{1}{2} f(q_0)\dot{q}^2 - \frac{1}{2} V''(q_0) q^2$$

Harmon. Osz. mit $\omega = \sqrt{V''/f}$ (Unabhängig von den Details des ursprünglichen Systems!)

B) Viele Freiheitsgrade

- Allgemeine Lagr.-Fkt: $L = \frac{1}{2} f_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j - V(q) \quad [q \equiv q_1, \dots, q_n]$
- Sei $q_0 \equiv q_1^{(0)}, \dots, q_n^{(0)}$ eine Ruhelage, d.h. $\frac{\partial V}{\partial q_i}(q_0) = 0 \quad \forall i$
- Wie oben: $q \to q_0 + q$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{1}{2} f_{ij}(q_0+q)\dot{q}_i\dot{q}_j - V(q_0+q)$$

Taylor für mehrere Variable:

$$f(\bar{x}) = f(\bar{0}) + x^i \frac{\partial}{\partial x^i} f(0) + \frac{1}{2!} x^i x^j \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} f(0) + \frac{1}{3!} x^i x^j x^k \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^k} f(0) + \dots$$

(ohne Beweis)

$$\Rightarrow \quad L \approx \frac{1}{2} f_{ij}(q_0)\dot{q}_i\dot{q}_j - \frac{1}{2} V_{ij}(q_0) q_i q_j \qquad \left(V_{ij} \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial x^i \partial x^j} \right)$$

- Da f_{ij} o.B.d.A. symmetrisch, existiert $R \in SO(n)$ so dass $R f R^{-1} = $ Diag. matrix.

- Sei also $R f R^{-1} \equiv \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n)$. Definiere $q_i = (R^T)_{ij} q'_j$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} \dot{q}'_i \underbrace{R_{ij} f_{jk} R^T_{ke}}_{\mathrm{diag}(a_1 \dots)} \dot{q}'_e - \frac{1}{2} q'_i \underbrace{R_{ij} V_{jk} R^T_{ke}}_{\equiv M_{ie}} q'_e$$

$$L = \frac{1}{2} \sum_i a_i (\dot{q}'_i)^2 - \frac{1}{2} q'_i M_{ij} q'_j$$

- Sei $q'_i = q''_i / \sqrt{a_i}$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} \dot{q}''_i \dot{q}''_i - \frac{1}{2} \sum_{ij} q''_i \underbrace{\frac{M_{ij}}{\sqrt{a_i a_j}}}_{\equiv K_{ij}} q''_j$$

- Jetzt wieder in Matrixnotation:

$$L = \frac{1}{2} (\dot{q}'')^T \mathbb{1} \dot{q}'' - \frac{1}{2} q''^T K q''$$

- $\exists \tilde{R} \in SO(n)$ mit $\tilde{R} K \tilde{R}^T = \mathrm{diag}(k_1, \dots, k_n)$; Sei $q'' = \tilde{R}^T q'''$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} (\dot{q}''')^T \mathbb{1} \dot{q}''' - \frac{1}{2} q'''^T (\tilde{R} K \tilde{R}^T) q'''$$

- Jetzt $q''' \to q$:

$$\boxed{L = \sum_i \left(\frac{1}{2} \dot{q}_i^2 - \frac{1}{2} k_i q_i^2 \right)}$$

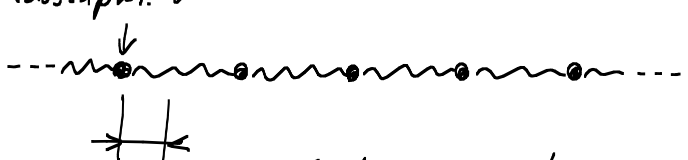
n unabh. harmon. Osz. mit Frequenz $\omega_i = \sqrt{k_i}$

$\Rightarrow$ <u>Überwältigende</u> Bedeutung des harmon. Osz. in Physik.

Kommentare:
- gewisse $a_i < 0$ – unphys.
- gewisse $k_i < 0$ – Ruhelage war instabil
- gewisse $k_i = 0$ – unsere $O(q^2)$-Analyse unzureichend

10.2 Lineare Kette

Massenpkt. i



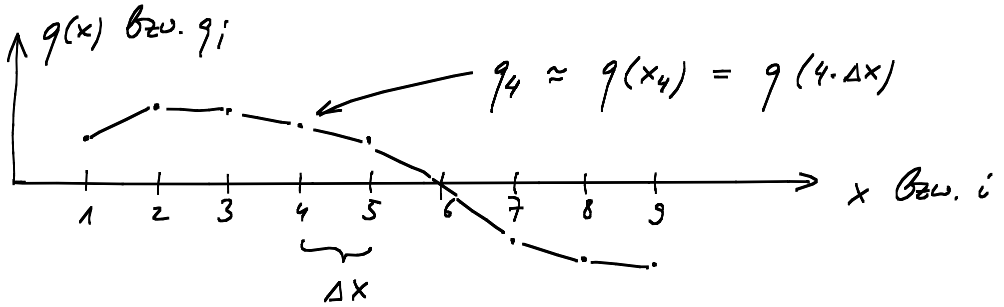
q_i (Auslenkung von Massenpkt. i aus seiner Ruhelage)

alle Federn ungespannt

$$\Rightarrow L = \sum_i \frac{m}{2} \dot{q}_i^2 - \sum_i \frac{k}{2} (\underbrace{q_{i+1} - q_i}_{})^2$$

Längenänderung der Feder zwischen i und $i+1$.

- Wir könnten die Analyse von 10.1 anwenden, aber es ist noch interessanter, gleich den <u>Kontinuumslimes</u> zu nehmen:



$x \hat{=}$ Ortskoordinate der Kette ; $q_i = q(x_i)$; $q'(x_i) = \frac{q_{i+1} - q_i}{\Delta x}$

$$\Rightarrow L \approx \sum_i \left[\frac{m}{2} \dot{q}(x_i)^2 - \frac{k}{2} q'(x_i)^2 \Delta x^2 \right]$$

$$= \sum_i \Delta x \left[\frac{1}{2} \left(\frac{m}{\Delta x}\right) \dot{q}(x_i)^2 - \frac{(k\Delta x)}{2} q'(x_i)^2 \right]$$

Jetzt $\Delta x \to 0$; $m \to 0$; $k \to \infty$ so dass $\mathcal{B} = k \cdot \Delta x$ ("Kompressionsmodul")

$\varrho = \frac{m}{\Delta x}$ (Liniendichte)

konstant bleiben.

$\Downarrow$

$$L = \int dx \left(\frac{\varrho}{2} \dot{q}^2 - \frac{\mathcal{B}}{2} q'^2 \right)$$

mit $q = q(x,t)$

- Damit haben wir unsere erste einfache <u>Feldtheorie</u> hergeleitet:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Wirkung}}}{S} = \int dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lagr.-Fkt.}}}{L} = \int dt dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{"Lagrangian"} \\ \text{od. Lagrange-Dichte}}}{\mathcal{L}} = \int dt dx \left(\frac{\varrho}{2} \dot{q}^2 - \frac{\mathcal{B}}{2} q'^2 \right)$$

- Die Bew.gleichungen folgen wie bisher aus dem Hamilton-Prinzip:

$$0 \overset{!}{=} \delta S = \int dt dx \left(\frac{\varrho}{2} \delta(\dot{q}^2) - \frac{\mathcal{B}}{2} \delta(q'^2) \right) =$$

$$= \int dt\,dx\,(\rho \dot q\,\delta\dot q - b\,q'\,\delta q') = \int dt\,dx\,\underbrace{(-\rho\ddot q + b\,q'')}_{\equiv 0 \text{ da } \delta q(t,x) \text{ beliebig}}\,\delta q + \text{Randterme}$$

$\Downarrow$ Wellengleichung

$$\boxed{\ddot q - c^2 q'' = 0} \qquad (c^2 \equiv b/\rho)$$

<u>Kommentar:</u> Der echte, elastische Festkörper kann durch ein 3d-Verallgemeinerung der obigen Wirkung beschrieben werden:

$$q(x,t) \longrightarrow \bar q(\bar x,t) = \{\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Auslenkung in } x^1\text{-Richtung, etc.}}}{q^1(\bar x,t)}, \dots, \dots\} = \{q^i(\bar x,t)\}$$

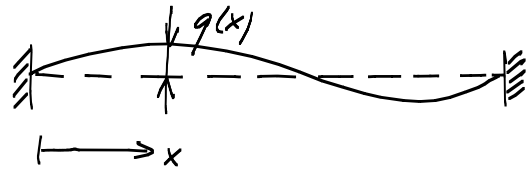
$$\int dx\,\frac{\rho}{2}\dot q^2 \longrightarrow \int d^3x\,\frac{\rho}{2}\dot{\bar q}^2 \ ; \quad \int dx\,\frac{b}{2}q'^2 \longrightarrow \int d^3x\,\frac{1}{2}\underbrace{b_{ij,kl}}_{\text{verschiedene elast. Eigenschaften}}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}q^j\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^k}q^l\right)$$

$\Rightarrow$ Kompressions-, Scherungs-, Verdrillungswellen, ...

<u>10.3 Schwingende Saite</u>

(nichtrelativistische, klassische "Stringtheorie")

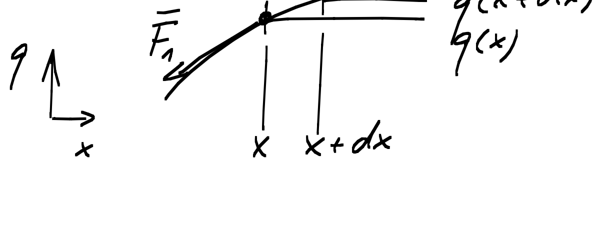
- eingespannte Saite:



(Im Gegensatz zur Kette: Auslenkung orthog. zur x-Achse)

- <u>Newtonsche Herleitung der Bew.gl.:</u>

- Kräftebilanz für das infinitesimale Stück:



$$\rho\,dx\,\ddot q(x) = (\bar F_2 + \bar F_1)\big|_\perp$$

- Sei F der Betrag der Kraft, mit der die Saite gespannt ist. (Kraftänderung durch Längenänderung wird vernachlässigt: $\Delta F/F \ll 1$.)

Dann gilt: $(F_2)_\perp = F\sin\theta \approx F\tan\theta = F\frac{dq}{dx} = F\,\underbrace{q'(x+dx)}$

Winkel mit Horizontalen — weil "rechts" am infinit. Stück

analog: $(F_1)_\perp = -F q'(x)$

$$\Rightarrow \quad \varrho\, dx\, \ddot q(x) = F\cdot[q'(x+dx) - q'(x)] \quad\Rightarrow\quad \varrho\ddot q - F q'' = 0$$

$$\boxed{\ddot q - c^2 q'' = 0} \qquad c^2 = \frac{F}{\varrho}$$

- <u>Lagrange'sche Herleitung</u>

$$T = \int dx\,\frac{\varrho}{2}\dot q^2 \quad ; \quad V = F\Delta x = F\cdot\left[\int\sqrt{dx^2+dy^2} - \int dx\right]$$

(Δx: gesamte Längenänderung der Saite)

$$V = F\int dx\left(\sqrt{1+q'^2} - 1\right) = \int dx\,\frac{F}{2}q'^2$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L} = \frac{\varrho}{2}\dot q^2 - \frac{F}{2}q'^2$$

; exakt wie bei Kette, aber mit $\sigma \to F$, also $c^2 = F/\varrho$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\ddot q - c^2 q'' = 0}$$

<u>Lösung:</u> $q = A\cos[k(x-ct)]$ oder $B\sin[k(x-ct)]$

A, B, k beliebig, Gl. linear, also auch:

$$q(x,t) = \int dk\left[A(k)\cos(k(x-ct)) + B(k)\sin(k(x-ct))\right]$$

freie Funktionen in Lösung!

Dies ist ein allg. Eigenschaft der <u>partiellen</u> Dgl. (in t <u>&</u> x), mit der wir es hier zu tun haben. $A(k)$ & $B(k)$ werden benutzt, um die Anfangsbed.-en $q(x,0)$ & $\dot q(x,0)$ zu beschreiben. Außerdem haben wir i.A. noch <u>Randbedingungen</u> (z.B. bei $x=0$ & $x=L$) zu erfüllen.

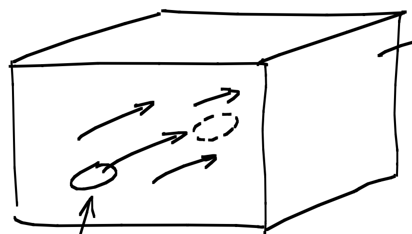
<u>Kommentar:</u> Speziell für $q(0) \equiv q(L) \equiv 0$ finden wir nur <u>diskrete</u> Werte für k & bestimmte Relation zw. A & B → stehende Wellen. Wenn wir uns bei diesen dann auf hinreichend <u>kleine k</u> beschränken, ist unser Kontinuumslimes im Fall der Kette "a posteriori" gerechtfertigt.

10.4 Ideale Hydrodynamik (ideal) $\underbrace{\text{fluid dynamics}}$

besser, weil auch Luft, Glas etc.

- <u>hier:</u> keine mikroskopische Beschreibung – nur "Flüssigkeitszellen" die zwar sehr klein sind, aber doch jeweils sehr viele Teilchen enthalten.

- <u>Newton:</u>



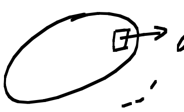
strömende Flüssigkeit
("Felder": $\bar{v}(\bar{x},t)$
$\rho(\bar{x},t)$
$p(\bar{x},t)$
↪ "Feldtheorie")

"Zelle"

Newton für diese Zelle: $m \dfrac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}$

"Materialableitung"
("substantial" or "material" derivative)

1) $$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underbrace{\frac{dx^i}{dt}}_{\text{der "Zelle"}}\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{v}\cdot\nabla$$

2)  $d\bar{f}$

$$\bar{F}_p = -\int_{\text{Oberfl.}} p\, d\bar{f} = -\int_{\text{Vol.}} (\nabla p)\, dV \quad ; \quad \bar{F} = \bar{F}_p + \bar{F}_{\text{äuß.}}$$

[Herleitung der letzten Gleichheit: $\displaystyle\int_O (\hat{e}_i p)\cdot d\bar{f} \overset{\text{Gauß}}{=} \int_V \operatorname{div}(\hat{e}_i p)\, dV$

$$= \int_V \frac{\partial}{\partial x_1}(p)\,dV = \int ((\hat{e}_1 \cdot \bar{\nabla}) p)\,dV \;;\quad \text{analog für } \hat{e}_2, \hat{e}_3$$

$\Rightarrow$ Resultat (Gleichheit der Vektoren) folgt.]

Jetzt 1) & 2) einsetzen, durch "Vol. der Zelle" teilen:

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v}\cdot\bar{\nabla})\bar{v}\right) = -\bar{\nabla} p + \frac{\bar{F}_{\text{äuß.}}}{\text{Vol.}} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v}\cdot\bar{\nabla})\bar{v} = -\frac{\bar{\nabla} p}{\rho} + \bar{f}}$$

Euler

äuß. Kraft/Masse

- Dazu gehört noch:

  Massenerhaltung (= Kontinuitätsgleichung)

- Anschaulich klar: $\bar{j} = \rho \bar{v}$ beschreibt Massenstrom

  ($\bar{j} \cdot d\bar{f}$ = Massenstrom – also Masse/Zeit durch gedachte Fläche $d\bar{f}$)

- Wähle ein festes (gedachtes) Volumen in der Flüssigkeit und berechne Massenstrom aus diesem Volumen: $\int_O d\bar{f}\cdot\bar{j} = \int_V (\operatorname{div}\bar{j})\,dV$
- Dies muss gleich sein zu

$$-\frac{dm}{dt} = -\frac{d}{dt}\int \rho\, dV \qquad \text{Also:} \quad \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\bar{v}) = 0}$$

Kontinuität

- Dies reicht nicht zur Beschreibung – Wir brauchen noch die Zustandsgleichung $p = p(\rho)$ [Dies ist nur der einfachste Fall, bei dem wir Wärmeaustausch & Dissipation im "Fluid" ausschließen. Ein Bsp. ist die Adiabatengleichung $p \sim \rho^\kappa$ des idealen Gases.]
- Also: Euler + Kontin. + Zust.: 5 partielle Dgl.-en für die 5 Felder $\rho, p, \bar{v}$. Prinzipiell lösbar!

- Einfache Anwendung: Bernoulli

Dazu Annahmen: inkompressibel: $\rho = \text{const.}$

stationär: $\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow (\bar{v}\cdot\bar{\nabla})\bar{v} = -\frac{\bar{\nabla}p}{\rho} + \bar{f} \quad ; \quad \bar{f} = -\bar{\nabla}V$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\bar{v}\cdot\bar{\nabla})}_{\equiv \frac{d}{dt}}\bar{v} + \bar{\nabla}\left(\frac{p}{\rho}+V\right) = 0 \xRightarrow{\text{"mal" } \bar{v}} \bar{v}\cdot\frac{d}{dt}\bar{v} + \underbrace{(\bar{v}\cdot\bar{\nabla})}_{\equiv \frac{d}{dt}}\left(\frac{p}{\rho}+V\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\bar{v}^2 + \frac{p}{\rho} + V\right) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\frac{1}{2}\bar{v}^2 + \frac{p}{\rho} + V = \text{const.}}$$

(Bernoulli)

entlang Flusslinie

10.5 Potentialströmungen

- Falls $\bar{\nabla}\times\bar{v} = 0$ ("Wirbelfreiheit") bleibt dies für immer so.

["Kelvin's theorem": Die "Zirkulation" $\oint_C \bar{v}\cdot d\bar{s}$ bleibt für "barotrope" Strömungen* erhalten (hier ohne Beweis). Daraus folgt insbes., dass Wirbelfreiheit erhalten bleibt. "barotrop" heißt, es gibt ein $p = p(\rho)$, was insbes. dann gilt, wenn die "Entropie" (siehe später) erhalten bleibt. Dies wiederum erfordert, dass es keine (innere) Reibung gibt, was wir im Moment natürlich annehmen.] {*) im konserv. Kraftfeld, also mit $\bar{f} = -\bar{\nabla}(\dots)$}

- Es existiert dann ein "Potential" φ (nicht verwechseln mit V!), so dass $\bar{v} = \bar{\nabla}\varphi$ [Beweis wie beim kons. Kraftfeld].

- Wir nehmen weiterhin "Inkompressibilität" an, also $\rho = \text{const.}$ Dann gilt $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\bar{v}) = 0 \Rightarrow \text{div}\,\bar{v} = 0$

$\Rightarrow \operatorname{div}(\bar{\nabla}\varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta\varphi = 0}$

Laplace-Gl.

(insbesondere linear in φ –
– mächtige Methoden zur Lsg. existieren)

- Noch besser wird es in $d=2$, wo wir zusätzlich haben:

$$\tilde{v}_i \equiv -\varepsilon_{ij} v_j \quad ; \qquad \text{rot}\,\tilde{v} \sim \varepsilon_{ij}\partial_i \tilde{v}_j = -\underbrace{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{jk}}_{-\delta_{ik}}\partial_i v_k = \operatorname{div}\bar{v} = 0$$

$\Rightarrow \exists\, \psi$ mit $\varepsilon_{ij} v_j = -\partial_i \psi$

bzw: $\boxed{\begin{aligned} v_1 &= \partial_2\psi \\ v_2 &= -\partial_1\psi \end{aligned}}$ $\quad$ (Vgl.: $\boxed{\begin{aligned} v_1 &= \partial_1\varphi \\ v_2 &= \partial_2\varphi \end{aligned}}$)

- ψ heißt "Strömungsfkt." weil [Strömungslinien ≡ Linien mit $\psi = \text{const.}$]

(Dies ist offensichtlich weil $\bar{v}\cdot\bar{\nabla}\psi =$
$= v_i \cdot (-\varepsilon_{ij} v_j) = 0.$)

- Wir haben also (mit $1,2 \to x,y$): $\boxed{\begin{aligned} \partial_x\varphi &= \partial_y\psi \\ \partial_y\varphi &= -\partial_x\psi \end{aligned}}$ Cauchy-Riemann-Dgl.-en

- $\Rightarrow \exists$ "holomorphe" bzw. "analyt." kompl. Fkt., $w = w(z)$,

so dass: $\boxed{\begin{aligned} \varphi &= \operatorname{Re} w(z) \\ \psi &= \operatorname{Im} w(z) \end{aligned}}$

$w = w(z)$, nicht $w = w(z,\bar{z})$

$w = z^3$ ok $\qquad w = z^2\bar{z}$ nicht ok

$(z = x + iy)$

- $\Rightarrow$ Jedes $w(z)$ gibt (ideale) 2d-Strömung!

- ⇒ Sogenannte "konforme Trf.-en" $f: z \to f(z)$ geben $w(z) \longrightarrow w'(z) = w(f(z))$.
  ("Neue" Strömungen aus alten durch konf. Trf.-en)

  [mehr in Übungen]

10.6 Navier-Stokes Gl. (nur Idee)

- Wir wollen jetzt über die "ideale" Hydrodynamik von 10.5 hinausgehen, indem wir "Viskosität" (innere Reibung) zulassen. Zur Vereinfachung sei jetzt $\vec{f} \equiv 0$, so dass Euler sagt:

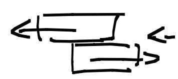
$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\right) = -\vec{\nabla}p \,.$$

- Unter Ausnutzung der Kontinuitätsgl. kann dies umgeschrieben werden als:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\underbrace{p\delta_{ij} + \rho v_i v_j}_{\equiv \Pi_{ij}}\Big) = 0$$

(Fluss von Impuls in "i"-Richtung durch Fläche orthog. zu "j")

- Die Euler-Gl. ist also letztlich nur Impulserhaltung. Der dabei auftretende "Impuls-Fluss-Tensor" Π_{ij} lautet allgemeiner $\Pi_{ij} = \sigma_{ij} + \rho v_i v_j$. Der erste Term heißt "Spannungs-Tensor" und beschreibt die Kräfte, welche die Flüssigkeit auf sich selbst ausübt. Oben hatten wir nur den Druck-Anteil $\sigma_{ij} = p\,\delta_{ij}$. Diesen wollen wir jetzt ergänzen: $\sigma_{ij} \to \sigma_{ij} + \sigma'_{ij}$


innere Reibung

also $\sim \partial v/\partial x$

- Allgemeinste konsistente Form (in führender Ordnung in $\partial v_i/\partial x_j$):

$$\sigma'_{ij} = \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + \mu\,\delta_{ij}(\operatorname{div}\vec{v})$$

(Dies ist ein nichttriviales Ergebnis, das insbes. Drehimpulserh. ausnutzt.)

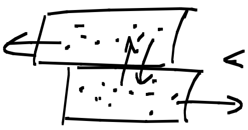
- Wenn wir jetzt wieder zum inkompressiblen Fall vereinfachen, ergibt sich nach weiterer Umschreibung:

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\right) = -\vec{\nabla} p + \eta \Delta \vec{v}}$$

Navier-Stokes

"dynamische Viskosität".

<u>Kommentar:</u> mikroskopische Ursache von η (u.a.):



<--- Teilchenaustausch an Grenzfläche der einzelnen Flüss. zellen.

- Einige Mechanik-Bücher haben Kapitel zur Hydrodynamik.
  Es gibt viele Bücher speziell zur Hydrodynamik. Eine knappe Einführung geben die Lecture-Notes von <u>G. Falkovich</u>:
  "Fluid Mechanics – A Short Course for Physicists" (Buch & Web).