2 Symmetrien & Erhaltungssätze

Zwei zentrale Aspekte von Symmetrien:

1) Symmetrie $\Rightarrow$ Form der Wirkung
2) Wirkung hat gewisse Symmetrie $\Rightarrow$ Erhaltungsgröße

2.1 Symm.-Motivation der Wirkung der klass. Mech.

- freier Massenpkt.:
- $L(\bar{x}, \bar{v}, t) = L(\bar{v})$ (Homog. von Raum & Zeit)
  $= L(\bar{v}^2)$ (Isotropie d. Raumes)
- Galilei-Boost: $\bar{v} \to \bar{v}' = \bar{v} + \bar{\epsilon}$

$$L(\bar{v}^2) \longrightarrow L(\bar{v}'^2) = L(\bar{v}^2 + 2\bar{v}\cdot\bar{\epsilon} + \bar{\epsilon}^2)$$

$$= \underbrace{L(\bar{v}^2) + \frac{\partial L(\bar{v}^2)}{\partial \bar{v}^2}\cdot \underbrace{(2\bar{v}\cdot\bar{\epsilon})}_{= \frac{d}{dt}(2\bar{x}\cdot\bar{\epsilon})}}_{= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \bar{v}^2}\cdot(2\bar{x}\cdot\bar{\epsilon})\right) \text{ falls } \frac{\partial L}{\partial \bar{v}^2} = \text{const.}} + O(\epsilon^2)$$

$\Rightarrow$ S ist invar. (bis auf Randterme), falls $\frac{\partial L}{\partial \bar{v}^2} = \text{const.}$

$\Rightarrow$ $L = \frac{m}{2}\bar{v}^2$

- mehrere Massenpkt.-e: Wegen Additivität gilt $L = \sum_a \frac{m_a}{2}\bar{v}_a^2$.
- Hinzunahme von Wechselwirkungen d. Form $V_{ab}(|\bar{x}_a - \bar{x}_b|)$ respektiert Galilei-Trf.-en, weil $|\bar{x}_a - \bar{x}_b|$ invariant ist.
- Unter diesen Bedingungen ist $L = T - V$ (mit T & V wie oben) also in der Tat der allgemeinste Fall! (Vorzeichen & Koeff. sind natürlich Konvention.)

<u>Kommentar:</u> Das obige war hauptsächlich eine Vorübung für später (z.B. für Suche nach neuer Physik mit neuen Lagrange-Fkt.-en). Das $L = T - V$ ist so gut belegt, dass es keiner Symm.-Motivation bedarf.

2.2 Energieerhaltung

Homogenität d. Zeit $\equiv$ Zeittranslationsinvarianz $\Rightarrow$ $L(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q})$

Also: $$\frac{d}{dt} L = \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt}(\dot{q}_i)$$

$\sum_i$!

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i\right) \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L}_{\equiv E}\Big) = 0}$$

Bleibt zu zeigen, dass das so definierte E wirklich die Energie ist. Dazu:

M3 Homogene Fkt.-en & Satz v. Euler

Eine Fkt. f von n Variablen heißt homogen vom Grad k falls
$$f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) = \alpha^k f(x_1, \dots, x_n).$$

<u>Bsp.:</u>
$$\left.\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ f(x,y) &= (x+y)^2 + y^2 + 3xy \end{aligned}\right\} k = 2$$

$$f(x,y,z) = \frac{x}{y \cdot z} + \frac{1}{x} \cdot \cos(x/z) \Big\} \; k = -1$$

$$T = \frac{1}{2} f_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j \Big\} \; k = 2 \text{, aber nur bzgl. } \dot{q}_1 \cdots \dot{q}_s$$

Satz v. Euler: f homog. vom Grad k $\Rightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot x_i = k \cdot f$
(Summenkonvention!)

Begründung:

- $f(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) = \alpha^k f(x_1, \ldots, x_n) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \alpha} f(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\alpha^k f(x_1 \ldots x_n)\right]$

$$\Rightarrow \frac{\partial f(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)}{\partial(\alpha x_i)} \cdot \underbrace{\frac{\partial(\alpha x_i)}{\partial \alpha}}_{= x_i} = k \alpha^{k-1} f(x_1, \ldots, x_n)$$

- Setze $\alpha = 1$ $\Rightarrow$ Behauptung steht da!

M3

Zurück zur Energieerhaltung: Wir nehmen an, dass

$$L = T - V = \underbrace{\frac{1}{2} f_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j} - V(q)$$

(Diese Form ergibt sich typischerweise aus $\sum_a \frac{m_a}{2} \bar{v}_a^2$ nach Übergang zu verallg. Koord.)

Dann gilt: $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \underset{\text{Satz v. Euler}}{=} 2T$

Also: $E \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = 2T - (T - V) = \underline{\underline{T + V}}$ ✓

2.3 Erhaltung der verallg. Impulse

- Eine verallg. Koordinate heißt "zyklisch" falls sie nicht explizit in L vorkommt (ihre Ableitung darf vorkommen). Z.B. ist für

$$L = L(q_2, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s, t)$$

die Koord. q_1 zyklisch. Die Trf. $q_1 \to q_1' = q_1 + \varepsilon$ ist eine Symm.

Wegen $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_1}}_{=0} = 0$ ist also $p_1 \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}$ erhalten,

d. h. $\boxed{\frac{d}{dt} p_1 = 0}$

(p_1 heißt der zu q_1 gehörige verallg. Impuls. Dieser ist erhalten falls q_1 zyklisch ist.)

Bsp: ① Massenpkt. in Potential, welches z.B. nicht von x_1 abhängt $\Rightarrow$ p_1 erhalten. (Dies ist vom schrägen Wurf wohlbekannt, wo $V = mgx_3$ & p_1, p_2 erhalten.)

② Massenpkt. in Ebene im Zentralpotential:

$$L = \frac{m}{2}(r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2) - V(r) \quad ; \quad \varphi \text{ zyklisch };$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} \quad \text{erhalten} \quad (\text{Betrag des Drehimpulses}).$$

[Allg. Drehimp.-erh. $\to$ S. 68 des Skriptums v. SS '05]

2.4 Noether-Theorem

(Allg. Zshg. von Symm. & Erhaltungsgröße)

- Wir starten von einer kontinuierlichen Symmetrie unserer Theorie.
- genauer: Sei $q(t) \longrightarrow q'(t) = q(t) + \delta q(t) \equiv q(t) + \epsilon X(t)$

(mit $\epsilon \in \mathbb{R}$ und $\epsilon \to 0$ möglich)

- Wir fordern:

$$\delta L \equiv L(q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}, t) - L(q, \dot{q}, t)$$

$$= \epsilon \frac{d}{dt} f \quad (\text{damit Bew.gl.-en invar., siehe 1.4})$$

Damit haben wir definiert, was wir unter kont. Symm. verstehen.

Jetzt erst folgt die Herleitung der Erhaltungsgröße:

$$\epsilon \frac{d}{dt} f = \delta L = \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta \dot q \underset{\uparrow}{=} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)\delta q + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)\frac{d}{dt}(\delta q)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta q\right)$$

Euler-Lagr.-Gl.

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta q - \epsilon f\right) = 0.$ Wir können noch $\delta q = \epsilon X$ benutzen und ϵ „kürzen".

Das Endergebnis geben wir gleich explizit für viele Koord.-en an:

Sei die Trf. mit $\delta q_i = \epsilon X_i$ eine Symm., also $\delta L = \epsilon \frac{d}{dt} f$.
Dann gilt

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} X_i - f\right)}_{\text{Erhaltungsgröße!}} = 0$$

Noether

Bsp.:

① Zeittranslationsinvarianz: $q'(t) = q(t+\epsilon) = q(t) + \underbrace{\epsilon \cdot \dot q(t)}_{\delta q}$
(für L ohne explizite Zeitabhängigkeit)

$$\Downarrow$$
$$X = \dot q$$

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta \dot q = \epsilon \frac{\partial L}{\partial q}\frac{dq}{dt} + \epsilon \frac{\partial L}{\partial \dot q}\frac{d\dot q}{dt} \underset{\uparrow}{=} \epsilon \frac{d}{dt} L$$

keine expl. Zeitabh.!

$$\Downarrow$$
$$f = L$$

Erh.größe: $\frac{\partial L}{\partial \dot q} X - f = \frac{\partial L}{\partial \dot q}\dot q - L = E$ ✓

② Zyklische Koordinate: $q' = q + \epsilon \Rightarrow X = 1$; $\delta L = 0$
$\Rightarrow f = 0$

Erh.größe: $\frac{\partial L}{\partial \dot q} X - f = \frac{\partial L}{\partial \dot q}\cdot 1 - 0 = \frac{\partial L}{\partial \dot q}$ ✓

(verallg. Impuls)

<u>Galilei-Gr. auf einen Blick:</u> Zeittransl. $\rightarrow$ Energie
Translat. $\rightarrow$ Impuls
Rotation $\rightarrow$ Drehimpuls
Boosts $\rightarrow$ $\bar{x}_S - \bar{v}_S \cdot t$ (geradlinig gleichf. Bew. des Schwerpunkts)
S.133 des Skriptums v. SS '05

<u>Wichtig:</u> Die Bedeutung des Noether-Theorems in (Quanten-) Feldtheorie ist enorm! Nicht vergessen!

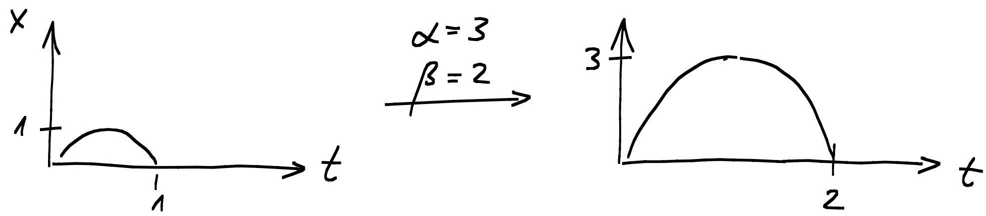
2.5 Mechanische Ähnlichkeit

- Sei $L = \sum_a \frac{m_a}{2} \dot{\bar{x}}_a^{\,2} - V(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N)$
- Sei V homogen vom Grad k und $t \mapsto \{\bar{x}_a(t)\}$ eine phys. Bewegung.
  (löst Euler-Lagr.-Gl.-en)

(Zur Vereinfachung schreiben verkürzt
$t \mapsto x(t)$ anstatt $t \mapsto \{\bar{x}_a(t)\}$)

- Wir betrachten die Trf. $x \rightarrow \alpha x$, $t \rightarrow \beta t$

Also:



- Die Trajektorien der alten & neuen Bewegung sind

$$\{ t \longmapsto x(t) \} \rightarrow \{ \beta t \longmapsto \alpha x(t) \}.$$

- Die kin. & pot. Energien sind dementsprechend

$$T, V \longrightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 T , \quad \alpha^k V$$

- Falls $\underline{\underline{\alpha^k = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2}}$, gilt auch $L \rightarrow \alpha^k L$

- Nun ist $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$ homogen in L, q, t.

Falls also $x \to \alpha x$, $t \to \beta t$, $L \to \alpha^k L$ gilt:

Die neue, transformierte Trajektorie beschreibt wieder ein <u>phys. Bew.</u> (löst wieder Eul. Lagr. Gl.-en).

Diese Situation heißt <u>mechanische Ähnlichkeit</u>.

- <u>Anwendung:</u> – Sei X eine "typische Länge" einer Bewegung (Bahnradius, Entf. zum Umkehrpkt. etc.)
  – Sei T eine "typische Länge" einer Bew. (Periode, Zeit zw. zwei Umkehrpunkten)
  – Seien $X' = \alpha X$ & $T' = \beta T$ die entsprechenden Größen der ähnlichen Bewegung

$$\Rightarrow \frac{T'}{T} = \beta = \alpha^{1-k/2} = \left(\frac{X'}{X}\right)^{1-k/2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{T'}{T} = \left(\frac{X'}{X}\right)^{1-k/2}}$$

Nützliche Beziehung!

<u>Bsp.:</u>

1. Harmon. Osz.: $V \sim x^2$, $k = 2 \Rightarrow T'/T = 1$
   ("Periode unabhängig von Auslenkung")

2. Freier Fall: $V \sim x$, $k = 1 \Rightarrow \frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{X'}{X}}$
   ("Quadrate der Fallzeiten verhalten sich wie die Fallhöhen")

3. Gravitation: $V \sim \frac{1}{x}$, $k = -1 \Rightarrow \frac{T'}{T} = \left(\frac{X'}{X}\right)^{3/2}$
   ("Quadrate d. Umlaufzeiten verhalten sich wie Kuben der Abstände" – 3. Keplersches Gesetz)

2.6 Virialsatz

- Wir interessieren uns für zeitgemittelte Größen: $\bar{A} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t dt' A(t')$
- Die Berechnung ist offensichtlich besonders einfach, falls A eine totale Zeitableitung ist.
- Um $\bar{T}$ zu ermitteln, versuchen wir also, T als totale Zeitableitung umzuschreiben:

$$2T = mv^2 = p\dot{x} = \frac{d}{dt}(px) - \dot{p}x = \frac{d}{dt}(px) + x\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$2T - x\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{d}{dt}(px)$$

$$\overline{2T - x\frac{\partial V}{\partial x}} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t dt' \frac{d}{dt'}(px) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\left[px\big|_t - px\big|_0\right]$$

$$= 0 \text{, falls } p \text{ \& } x \text{ beschränkt.}$$

$\Rightarrow$ Für Bewegungen in einem beschränkten Gebiet mit beschränkten Geschwindigkeiten gilt:

$$2\bar{T} = \underbrace{\overline{\sum_a \bar{x}_a \cdot \frac{\partial V}{\partial \bar{x}_a}}}_{\text{"Virial"}}$$

(präziser: $\overline{\sum_{a=1}^{N}\sum_{i=1}^{3} x_a^i \frac{\partial V}{\partial x_a^i}}$)

Falls V homogen vom Grad k:

$$\boxed{2\bar{T} = k\bar{V}}$$

z.B.

1. Harmon. Osz.: $\bar{T} = \bar{V}$
2. Gravitation: $2\bar{T} = -\bar{V}$ (Wichtig für Beschreibung von Galaxien, wo sich ein Zshg. zwischen mittl. Geschw. der Sterne & Galaxiengröße ergibt.)