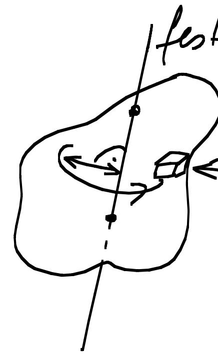
3 Trägheitstensor

3.1 Trägheitsmoment & Satz v. Steiner

(Im Wesentlichen Erinnerung an Bekanntes; vgl. Expphysik I.)



"$\perp$" steht für senkrecht zur Achse

$$T = \sum_a \frac{m_a}{2} v_a^2 = \sum_a \frac{m_a}{2} \omega^2 r_{a,\perp}^2$$

$$= \frac{1}{2} I_A \omega^2$$

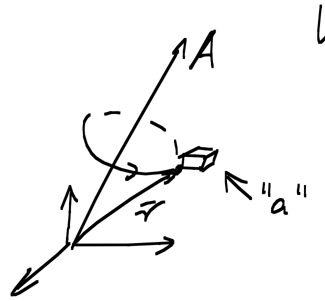
mit $I_A = \sum_a m_a r_{a,\perp}^2$

$\downarrow$ Kontinuumslimes

$$I_A = \int d^3\bar{r}\, \rho(r) \cdot r_\perp^2$$

$$\Rightarrow L(\varphi, \dot\varphi) = \frac{1}{2} I_A \dot\varphi^2 - V(\varphi)$$

$$\Rightarrow I_A \ddot\varphi = -\frac{dV(\varphi)}{d\varphi} \quad ; \quad \underline{\text{z.B.:}} \quad V(\varphi) = \sum_a V_a(\bar{r}_a(\varphi))$$



$$V(\varphi + \delta\varphi) = \sum_a V_a(\bar{r}_a(\varphi) + \delta\bar{r}_a) = \sum_a V_a(\bar{r}_a(\varphi) + \delta\bar\varphi \times \bar{r}_a)$$

$$= \sum_a V_a + \sum_a (\delta\bar\varphi \times \bar{r}_a) \cdot \bar\nabla V_a(\bar{r}_a(\varphi))$$

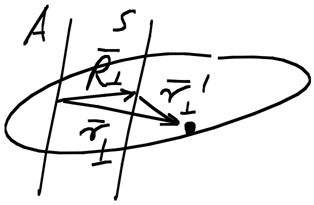
$$\Rightarrow -\frac{dV(\varphi)}{d\varphi} = -\sum_a \frac{(\delta\bar\varphi \times \bar{r}^a)}{|\delta\bar\varphi|} \cdot \bar\nabla V_a(\bar{r}(\varphi))$$

$$= \sum_a \varepsilon_{ijk} (\hat{e}_A)_j\, r_k^a (F^a)_i$$

$$= \underbrace{\hat{e}_A \cdot \underbrace{(\bar{r}_a \times \bar{F}_a)}_{\text{Drehmoment}}}_{\text{Projektion auf feste Achse}}$$

$\Rightarrow$ Wie erwartet, ist die φ-Bew.-gl. also einfach nur die Projektion von "$\dot{\bar{L}} = \bar{M}$" auf Achse A. (vgl. TP1, 3.2)

- I_A ist besonders einfach zu berechnen, wenn man schon das Trägheitsmoment I_S bzgl. der zu A parallelen Schwerpkt.s-achse kennt:

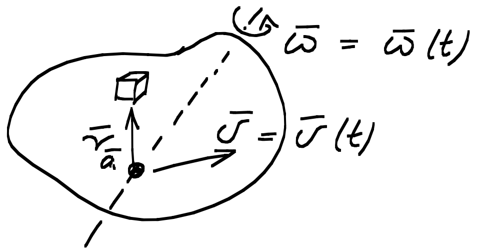


$$I_A = \sum m_a \bar{r}_{a,\perp}^{\,2} = \sum m_a \left(\bar{R}_\perp^{\,2} + \bar{r}_{a,\perp}'^{\,2}\right)$$

$$= \;\cdots\; = \underline{\underline{M R_\perp^2 + I_S}} \qquad \text{(Satz v. Steiner)}$$

3.2 Trägheitstensor

Allg. Bewegung des starren Körpers: (vgl. TP1, 6)

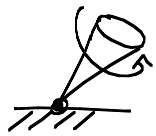


$$\boxed{\begin{aligned} \frac{1}{\delta t}: \quad \delta\bar{r} &= \delta\bar{\varphi} \times \bar{r} \\ \bar{v} &= \bar{\omega} \times \bar{r} \end{aligned}}$$

$$T = \sum_a \frac{m_a}{2} \bar{v}_a^{\,2} = \sum_a \frac{m_a}{2} \left(\bar{v} + \bar{\omega} \times \bar{r}_a\right)^2$$

$$= \sum_a \frac{m_a}{2} \Big[\bar{v}^2 + \underbrace{2\bar{v} \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}_a)}_{=\,0,\ \text{falls}} + (\bar{\omega} \times \bar{r}_a)^2\Big]$$

a) $\bar{v} = 0$ (z.B. Kreisel mit festem Auflagepunkt)



b) $\sum_a m_a \bar{r}_a = 0$ (Koord.ursprung = Schwerpkt.)

- In <u>diesen</u> beiden Fällen gilt: $T = \frac{M}{2} \bar{v}^2 + \sum_a \frac{m_a}{2} (\bar{\omega} \times \bar{r}_a)^2$

- $(\bar{\omega} \times \bar{r})^2 = \varepsilon_{ijk} \omega_j r_k \, \varepsilon_{ilm} \omega_l r_m$

$$= \left(\delta_{jl} \bar{r}^{\,2} - r_j r_l\right) \omega_j \omega_l \qquad \left(\text{weil } \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}\right)$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{M}{2}\bar{v}^2 + \underbrace{\sum_a \frac{m_a}{2}\left(\delta_{jl}\,\bar{r}_a^{\,2} - (r_a)_j (r_a)_l\right)}_{\equiv \frac{1}{2} I_{jl} \text{ - Trägheitstensor}} \omega_j \omega_l$$

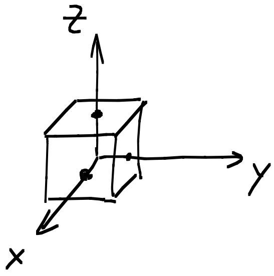
$$\Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{1}{2} M \bar{v}^2 + \frac{1}{2} I_{ij}\,\omega_i \omega_j} \qquad \text{(falls a) oder b) erfüllt)}$$

$$\boxed{I_{ij} = \int d^3\bar{r}\; \varrho(\bar{r}) \left(\delta_{ij}\,\bar{r}^2 - r_i r_j\right)}$$

- I ist immer bzgl. eines fest gewählten Punktes des Körpers (eigentlich fast immer Schwerpunkt) definiert.
- I ist Tensor weil δ_{ij} & $r_i r_j$ Tensoren sind (& $\bar{r}^2$ Skalar)
- I ist symmetrisch: $I_{ij} = I_{ji}$
- Machen Sie sich klar: (mit $\bar{r} = (x, y, z)$)

$$I = \int dx\,dy\,dz\; \varrho(\bar{r}) \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{pmatrix}$$

- Bsp: homog. Würfel



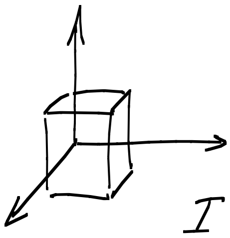
$$; \quad \int dx \rightarrow \int_{-a/2}^{a/2} dx \quad \text{etc.}$$

$$\int_{-a/2}^{a/2} dx\, x^2 = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-a/2}^{a/2} = \frac{a^3}{12}$$

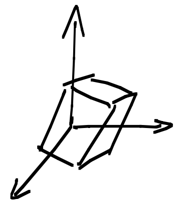
$$\Rightarrow \quad I = a^2 \varrho \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{6}a^3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6}a^3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}a^3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} M a^2 \cdot \mathbb{1}$$

3.3 Hauptträgheitsachsen

- Erinnerung: Ein Tensor ist, analog zum Vektor, ein geometrisches Objekt welches, unabhängig von der Komponentenform, Realität hat. (In unserem Fall beschreibt es Geometrie & Dichte des Körpers.) Analog zum Vektor, transformiert sich der Tensor in bestimmter Weise bei Drehungen:



I $\xrightarrow[\text{um } R \in SO(3)]{\text{Drehung des Körpers}}$



I', wobei

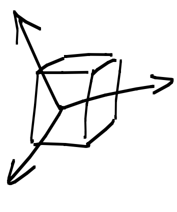
$$I'_{ij} = R_{ik} R_{jl} I_{kl}$$

(In Matrixschreibweise: $I' = R I R^T = R I R^{-1}$)

- Dem obigen aktiven Standpunkt ist natürlich der passive Standpunkt äquivalent, bei dem wir das Koord.system um R^{-1} drehen. In diesem System findet man wieder

$$I'_{ij} = R_{ik} R_{jl} I_{kl}.$$

$\xrightarrow[\text{Koord.systems um } R^{-1}]{\text{Drehung des}}$



Zentraler Satz: Jede symm., reelle Matrix kann durch eine orthogonale Trf. diagonalisiert werden.
(→ Lin. Alg.)

$\Rightarrow$ Wir können stets $I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$ erreichen,

indem wir a) den Körper entsprechend drehen
b) das Koord.system entsprechend wählen.

- I_1, I_2, I_3 heißen "Hauptträgheitsmomente" des Körpers
- Die Koordinatenachsen $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ des Systems, in dem I obige Diagonalform annimmt, heißen "Hauptträgheitsachsen" des Körpers. (i.A. entsprechen sie den "intuitiven" Symmetrieachsen des Körpers, sofern es welche gibt.)
- Sei $\bar{v} = 0$ und $\bar{\omega} = \omega \hat{e}$ ($\hat{e}$ ist ein beliebiger Einheitsvektor)

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j = \frac{1}{2} \underbrace{\left(I_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j \right)} \omega^2 \equiv \frac{1}{2} I_{\hat{e}} \omega^2$$

Dies ist also das Trägheitsmoment $I_{\hat{e}}$ bzgl. der Achse $\hat{e}$!

- Sei speziell I in Diagonalform und $\hat{e} = \hat{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt $I_{\hat{e}} = I_{11} = $ "I_1". (entsprechend für I_2, I_3).

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Die Hauptträgheitsmomente sind die Trägheitsmomente bzgl. der Hauptträgheitsachsen}}$

- Es gilt außerdem (immer noch im "Hauptträgheitssystem"):

$$I_{ij} (\hat{e}_1)_j = I_{ij} \delta_{j1} = I_{i1} = I_1 \delta_{i1} = I_1 (\hat{e}_1)_i$$

Also in Matrixschreibweise: $I \hat{e}_1 = I_1 \hat{e}_1$

$\Rightarrow$ $\boxed{\hat{e}_1 \text{ ist Eigenvektor von } I \text{ mit Eigenwert } I_1.}$

Dies ist aber eine koord.unabhängige Aussage, welche demnach in allen Systemen gilt:

$$I\hat{e}_1 = I_1 \hat{e}_1 \quad \Rightarrow \quad R I \hat{e}_1 = I_1 R\hat{e}_1 \quad \Rightarrow (R I R^{-1}) R\hat{e}_1 = I_1 R\hat{e}_1$$

Dies ist genau die ursprüngliche Aussage, aber im rotierten System:

$$I'\hat{e}_1' = I_1 \hat{e}_1'$$

Also:

Die Matrix I hat 3 Eigenvektoren $e_{(a)}$ zu den Eigenwerten I_a. Diese Eigenvektoren definieren die Hauptträgheitsachsen & I_a sind die zugehörigen Hauptträgheitsmomente

3.4 Das Trägheitsellipsoid

- Bisher haben wir nur das Bsp. des homogenen Würfels (mit $I \sim \mathbb{1}$) explizit durchgerechnet.

- Da eine homogene Kugel durch jede Drehung (im Schwerpkt.ssystem) in sich selbst überführt wird, gilt dies auch für ihren Trägheitstensor:

$$I = R I R^{-1}.$$

$\Rightarrow$ I ist invarianter Tensor vom Rang 2.

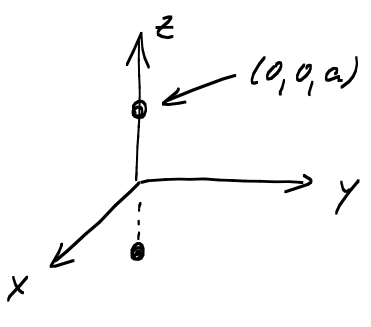
Fakt: δ_{ij} ist der einzige inv. Tensor vom Rang 2 in 3d (bis auf Normierung)

$$\Rightarrow \quad I \sim \mathbb{1} \quad \text{bzw.} \quad I_{ij} = \# \cdot mR^2 \delta_{ij}$$

↳ Übungen.

- Als "weniger symmetrisches" Bsp. betrachten wir Hantel:

(Masse $2m$, Verbindungsstab masselos)



$$I_{ij} = \sum m \left(\delta_{ij} \bar{r}^2 - r_i r_j\right)$$

$\bar{r} = (0,0,a)$

$\bar{r} = (0,0,-a)$

$$\ldots = 2m\left(\delta_{ij}\bar{r}^2 - r_i r_j\right)_{\bar{r}=(0,0,a)} = 2ma^2\left(\mathbb{1} - \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)$$

$$I = 2ma^2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} \underset{\substack{\text{"reale"}\\ \text{Hantel}}}{\Longrightarrow} I = 2ma^2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\epsilon\end{pmatrix}$$

(Wir sehen klar die Äquivalenz von x & y-Achse und die Sonderrolle der z-Achse.)

$\Rightarrow$ Es liegt nahe, eine allg. Beziehung zwischen der Form von I und der Geometrie (insbes. Symmetrie) des Körpers zu vermuten. In der Tat:

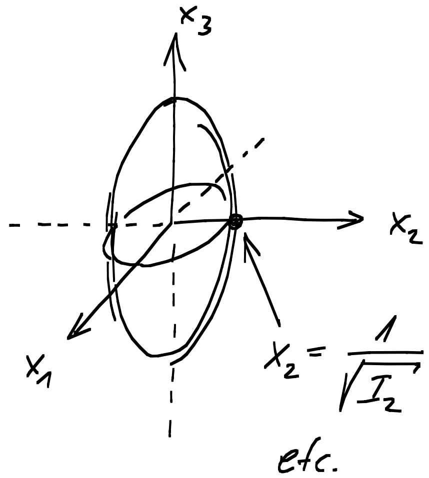
- So wie ein Vektor einem Pfeil entspricht, <u>entspricht ein symm. Tensor vom Rang 2 einer "Fläche 2. Grades"</u>.

$$\boxed{\text{Definiert durch } \; t_{ij}x_i x_j = 1}$$

- In unserem Fall ($t = I$ = Trägheitstensor) ist die Fläche stets ein Ellipsoid:

  Gehe ins Hauptachsensystem:

  $$I_{ij}x_i x_j = 1 \Rightarrow I_1 x_1^2 + I_2 x_2^2 + I_3 x_3^2 = 1$$



  (In anderen Systemen ist die Fläche das entsprechend gedrehte Ellipsoid.)

- Eine (beliebige) Achse, die durch $\hat{e}$ (mit $\hat{e}^2 = 1$) definiert sei, schneide das Ellipsoid bei $\bar{x}$.

Dann gilt offensichtlich $\bar{x} = \hat{e}\,|\bar{x}|$ sowie $I_{ij}\, x_i x_j = 1$.

$$\Rightarrow \underbrace{I_{ij}\, \hat{e}_i \hat{e}_j}_{= I_{\hat{e}}\text{, wie weiter oben gezeigt}} |\bar{x}|^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{|\bar{x}| = \frac{1}{\sqrt{I_{\hat{e}}}}}$$

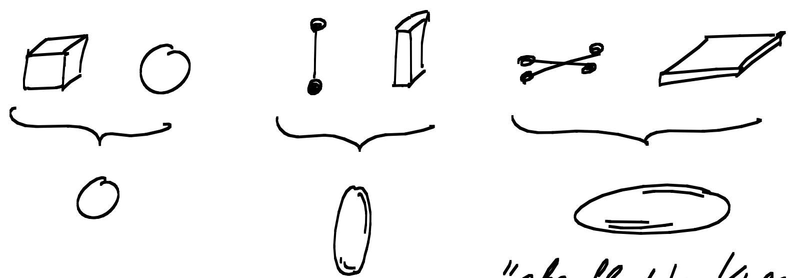
<u>Also:</u> Länge einer gewissen Achse, die <u>im</u> Ellipsoid liegt (nur pos. Teil) $= \dfrac{1}{\sqrt{\text{Trägheitsmom. bzgl. dieser Achse}}}$

Dieses Trägh.mom. ist dann groß, wenn der Körper in den <u>anderen</u> Richtungen große Ausdehnung hat

<u>Also:</u> $\boxed{\text{Trägheitsellipsoid folgt ungefähr der Form des Körpers}^{*)}}$

Körper:

Ellipsoid:



"abgeflachte Kugel"

*) wird in etwa homogen angenommen

<u>3.5 Trägheitstensor und Drehimpuls; mehr zur Geometrie</u>

- Wir haben gelernt: Ein Tensor v. Rang 2 ist definiert durch eine Bilineare Abb. $V \times V \to \mathbb{R}$.

$$t : (\bar{x}, \bar{y}) \longmapsto t_{ij}\, x_i x_j$$

- In unserem Fall hat diese Abb. unmittelbare phys. Bedeutung

$$I : (\bar{\omega}, \bar{\omega}) \longmapsto I_{ij}\, \omega_i \omega_j = 2T$$

Winkelgeschw. (als Vektor) — kin. Energie

- (zumindest im eukl. Raum) definiert ein Tensor analog eine Abb. $\mathbb{V} \to \mathbb{V}$

  $t: \{x_i\} \longmapsto \{t_{ij} x_j\}$. (In Matrixschreibweise: $x \mapsto tx$.)

- Auch dies hat in unserem Fall phys. Bedeutung:

$$I: \bar{\omega} \longmapsto \{I_{ij}\omega_j\} = \{L_i\}$$

Drehimpuls!

<u>Begründung:</u>

$$\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p} = m\bar{r} \times \dot{\bar{r}} = m\bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$$

Nur aufgrund Drehung bzgl. $\bar{0}$!

$$L_i = m\,\varepsilon_{ijk}\, r_j\, (\varepsilon_{klm}\,\omega_l\, r_m) = \cdots = m\,(\delta_{ij}\bar{r}^2 - r_i r_j)\,\omega_j$$

"$\varepsilon\varepsilon \to \delta\delta - \delta\delta$"

(wie bei Berechnung von T)

Nach Summation über viele Punkte:

$$L_i = \sum_a m_a \left(\delta_{ij}\bar{r}_a^2 - (r_a)_i (r_a)_j\right)\omega_j$$

$$\underline{\underline{L_i = I_{ij}\,\omega_j}} \qquad (\bar{L} = I\bar{\omega})$$

Matrix!