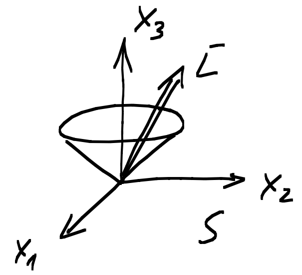
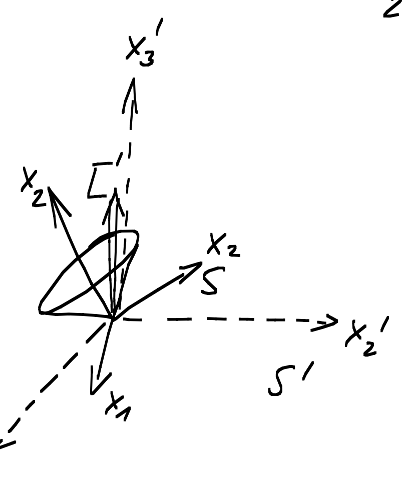
# 4 Kreisel

## 4.1 Euler-Gleichungen

Körperfestes System $S$:




raumfestes System $S'$:




- Die Bewegung des Kreisels (und damit des körperfesten Systems $S$) sei aus der Sicht von $S'$ durch $R(t) \in SO(3)$ beschrieben. Z.B. gilt $S = S'$ falls $R(t) = \mathbb{1}$.

- Es gilt allgemein $v' = Rv$ und insbes. hier: $\underline{\underline{L' = RL}}$

- Bew.gl.: $\dot{L}' = M' \quad \Rightarrow \quad (RL)^{\cdot} = RM$

$$\Rightarrow \quad \dot{R}L + R\dot{L} = RM$$

- Aus 6.5 (rot. Bezugsysteme) wissen wir: $\dot{R}r = R(\omega \times r)$

Dies ist $\omega$ im <u>rotierenden</u> System!

- Das wenden wir auf $L$ (statt auf $r$) an:

$$\Rightarrow \quad R(\omega \times L) + R\dot{L} = RM$$

$$\dot{L} = M + L \times \omega$$

- Da im Körperfesten System $L = I\omega$ (mit $I = \{\text{konst. Matrix}\}$) folgt

$$I\dot{\omega} = M + (I\omega) \times \omega \, .$$

- Mit $I = \mathrm{diag}(I_1, I_2, I_3)$ (also im Hauptachsensystem) folgt weiter:

$$\left.\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 &= M_1 + \omega_2 \omega_3 (I_2 - I_3) \\ I_2 \dot{\omega}_2 &= M_2 + \omega_3 \omega_1 (I_3 - I_1) \\ I_3 \dot{\omega}_3 &= M_3 + \omega_1 \omega_2 (I_1 - I_2) \end{aligned}\right\} \text{Euler-Gleichungen}$$

## 4.2 Freier Kreisel – qualitativ

- **Energieerhaltung:** $E = T = \frac{1}{2}\omega^T I \omega = \text{const.}$

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} I_i \omega_i^2 \quad \text{(Hauptachsensystem)}$$

- Mit $L_i = I_i \omega_i$ (keine Summe!) folgt weiter: $E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} \frac{L_i^2}{I_i}$

oder
$$\boxed{\frac{L_1^2}{2EI_1} + \frac{L_2^2}{2EI_2} + \frac{L_3^2}{2EI_3} = 1.} \quad \text{"Binet-Ellipsoid"}$$

Dies beschreibt im "L-Raum" ein Ellipsoid mit Halbachsen $\sqrt{2EI_i}$. (Vgl. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ für Ellipsoid mit Halbachsen $a, b, c$.)

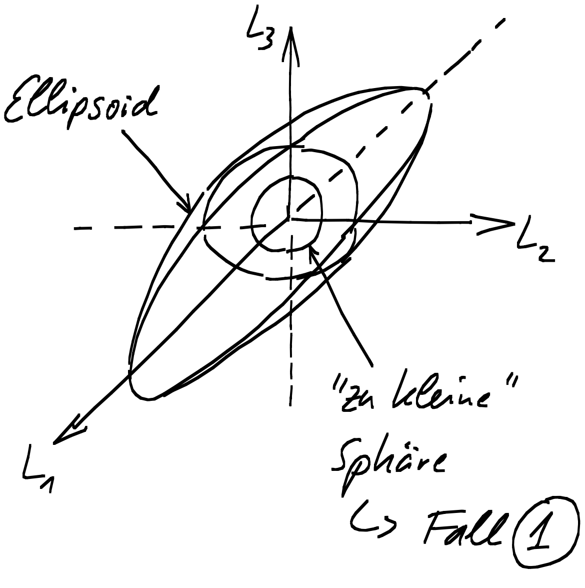
- **Drehimpulserhaltung:** $L' = \text{const.}$

$$L' = RL \quad \Rightarrow \quad (RL)^2 = L^2 = \text{const.}^2$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\bar{L} \text{ liegt auf Sphäre mit festem Radius } |\bar{L}|.}$

<u>Also:</u> $\bar{L}$ "bewegt sich" (im körperfesten System) auf Schnittkurve von Binet-Ellipsoid und Sphäre.

<u>Sei o.B.d.A. $I_1 > I_2 > I_3$</u>




(1) $|\bar{L}| < \sqrt{2EI_3}$ – unmöglich

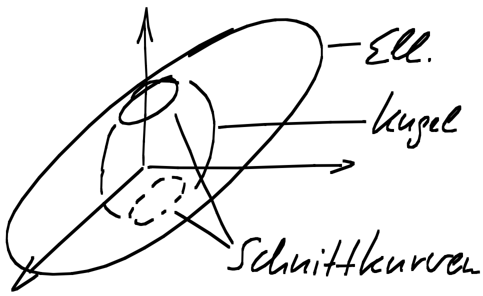
(2) $|\bar{L}| = \sqrt{2EI_3}$

$\Rightarrow$ "einbeschriebene Kugel" mit 2 Berührungspunkten:

$$\bar{L} = \pm\left(0, 0, \sqrt{2EI_3}\right)$$

(<u>phys.</u>: Rotation d. Körpers mit festem $\bar{\omega} \parallel \hat{e}_3$)

③ $\sqrt{2EI_3} < |\bar{L}| < \sqrt{2EI_2}$ $\Rightarrow$ zwei geschlossene Kurven

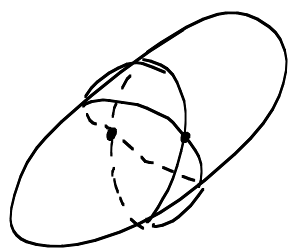



$\Rightarrow$ $\bar{L}$ bewegt sich im körperfesten System entlang einer dieser Kurven

$\hat{=}$ kräftefreie Präzession des Körpers im raumfesten System

(die kleinen geschl. Kurven um die isolierten Punkte von ② zeigen, dass die Bewegung von ② stabil ist)

④ $|\bar{L}| = \sqrt{2EI_2}$ $\Rightarrow$ zwei sich kreuzende Kurven



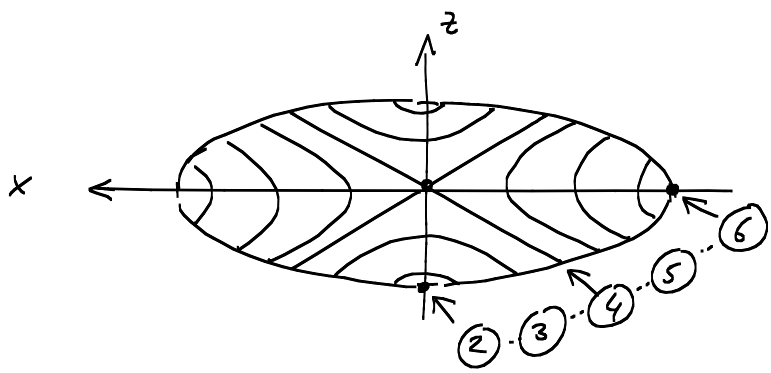
$\Rightarrow$ $\bar{L}$ sitzt an einem Kreuzungspkt. (aber instabil!) oder bewegt sich entlang Kurve.

⑤ $\sqrt{2EI_2} < |\bar{L}| < \sqrt{2EI_1}$ $\Rightarrow$ zwei geschl. Kurven, ähnlich zu ③

⑥ $|\bar{L}| = \sqrt{2EI_1}$ $\Rightarrow$ zwei Berührungspunkte (stabiler Grenzfall zu ⑤, analog zu ③ → ②.)

⑦ $|\bar{L}| > \sqrt{2EI_1}$ – unmöglich

Abschließend: Ellipsoid von "$y = \infty$" aus gesehen:

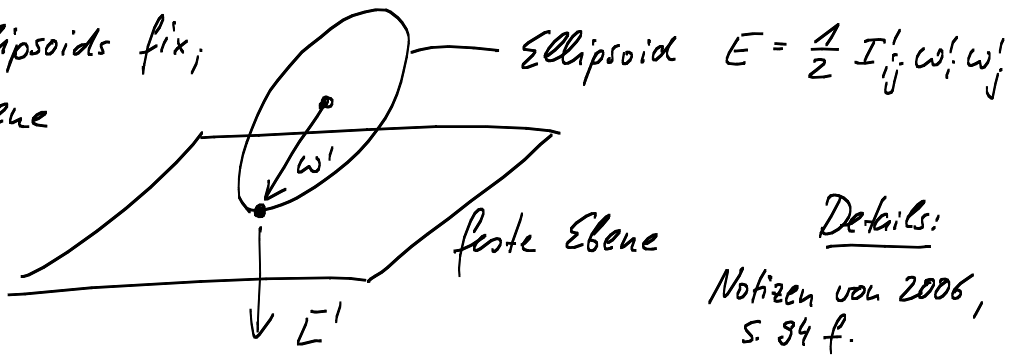


<u>Kommentar:</u> Man kann die geometrische Analyse auch im raumfesten System durchführen und erhält ein sehr schönes Ergebnis ("Poinsot Konstruktion"):

- Zentrum des Ellipsoids fix; Rollen auf Ebene

$\Downarrow$

entspr. Bewegung d. Körpers




<u>Details:</u> Notizen von 2006, S. 84 f.

## 4.3 Freier Kreisel - analytisch

Euler Gl.-en: $\boxed{I_1 \dot\omega_1 = \omega_2 \omega_3 (I_2 - I_3) \quad \& \text{ zykl. Permutationen}}$

$\Rightarrow$ Falls 2 der 3 Komponenten von $\vec\omega$ verschwinden, ist $\vec\omega = \text{const.}$ Dies entspricht den in 4.2 besprochenen stationären Lösungen (Rot. um eine der Hauptachsen), von denen eine instabil ist.

- Für den Rest des Paragraphen betrachten wir zur Vereinfachung

$$\underbrace{I_1 = I_2}_{\equiv I_0} < I_3 \qquad \text{("plattgedrückte Kugel", ähnlich zur Erde)}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} I_0 \dot\omega_1 &= (I_0 - I_3)\, \omega_2 \omega_3 \\ I_0 \dot\omega_2 &= -(I_0 - I_3)\, \omega_3 \omega_1 \\ I_3 \dot\omega_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \omega_3 = \text{const.} \Rightarrow \alpha \equiv -\omega_3 \cdot \left(1 - \frac{I_3}{I_0}\right) = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \dot\omega_1 &= -\alpha \omega_2 \\ \dot\omega_2 &= \alpha \omega_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \ddot\omega_1 = -\alpha^2 \omega_1 \Rightarrow \omega_1 = A \cos(\alpha t + \varphi)$$

(Setze $\varphi = 0$ o.B.d.A.)

$$\Rightarrow \quad \left\| \begin{array}{l} \omega_1 = A \cos \alpha t \\ \omega_2 = A \sin \alpha t \end{array} \right\|$$

↑ Präzess. frequenz

(Spitze von $\vec{\omega}$ bewegt sich auf Kreis in Ebene $\omega_3 = \text{const.}$. Dies ist analog zur in 4.2 gefundenen Bewegung von $\vec{L}$ im Fall eines symm. Ellipsoids.)

<u>Bsp.:</u> Erde: $-\left(1 - \frac{I_3}{I_0}\right) \sim 0.003 \equiv \varepsilon$

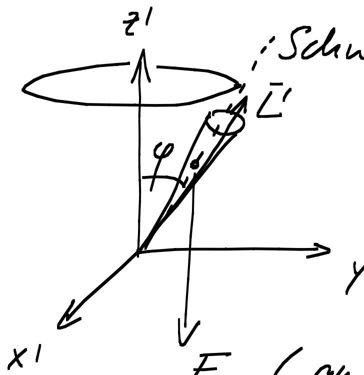
Präzessionsfrequenz: $\alpha \sim \omega_{Erde} \cdot \varepsilon$

$$\Rightarrow \quad T_{Präz.} \sim \frac{T_{Erde}}{\varepsilon} \sim 300 \text{ Tage}$$

(funktioniert exp. nicht gut; man sieht sogenannten "Chandler wobble" statt sauberer Präzession; Gründe sind u.a. Jahreszeiten & Deformierbarkeit d. Erde)

## 4.4 Schwerer Kreisel – vereinfacht

(Dies ist nur eine <u>Erinnerung</u> an die Exp.phys.!)




$$\boxed{\text{Näherung: } \vec{L}' \parallel S}$$

$$\Rightarrow \vec{L}' \perp \vec{M}'$$

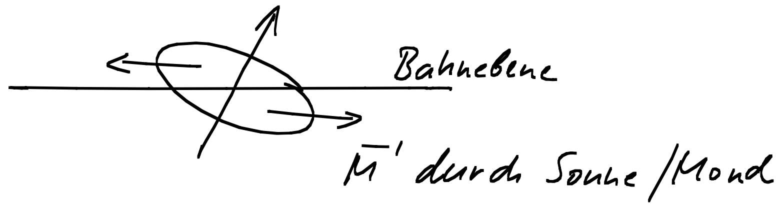
$F_s$ (am Schwerpkt. angreifende Kraft)

$$\left.\begin{array}{l} \dot{\vec{L}}' = \vec{M}' \xrightarrow[\vec{L}' \perp \vec{M}]{} |\vec{L}'| = \text{const.} \\ \vec{F}_s \parallel \hat{e}_z \longrightarrow \vec{M}' \text{ liegt in } x'\text{-}y'\text{-Ebene} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Spitze von } \vec{L}' \text{ bewegt sich auf Kreis in } x'\text{-}y'\text{-Ebene}$$

Kreisradius: $|\vec{L}'| \sin\varphi$ ; Geschw.: $|\vec{M}'|$

$\Rightarrow$ Periode $T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi|\vec L'|\sin\varphi}{|\vec M'|} \left( = \frac{2\pi|\vec L'|}{mgl} \right)$

<u>Bsp.:</u> Erde



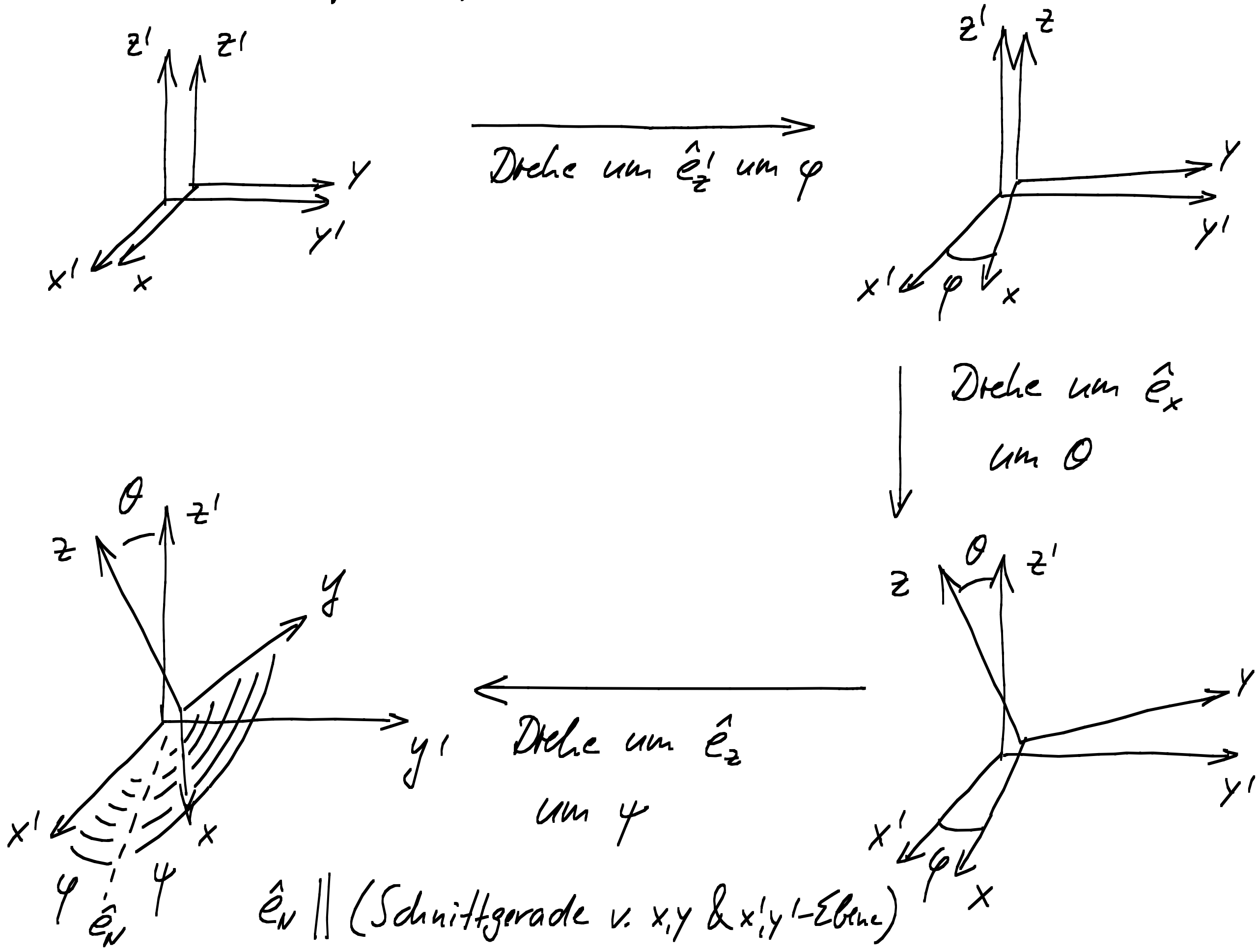

$\Rightarrow$ "Präzession d. Äquinoktialpunkte" $\quad T \sim 26'000$ a
("precession of the equinoxes")

## 4.5 Schwerer Kreisel – exakt

(präziser: symm. Kreisel im Schwerefeld = Lagrange'scher Kreisel)

### M4 – Eulersche Winkel

( = bequeme Parametrisierung der relativen Lage zweier Koordinatensysteme)




$\hat e_N \parallel$ (Schnittgerade v. $x,y$ & $x',y'$-Ebene)

Wegen Additivität kleiner Drehungen (im Sinne von Additivität der $\delta\vec{\varphi}$'s) gilt: $\vec{\omega}' = \dot{\varphi}\hat{e}_z' + \dot{\psi}\hat{e}_z + \dot{\theta}\hat{e}_N$

"abstrakter Vektor"

- Wir verbinden S fest mit einem symm. Kreisel $(I_1 = I_2 \equiv I_0)$.

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[ I_0\,(\omega_1^2 + \omega_2^2) + I_3\omega_3^2 \right] - mgl\cos\theta$$

- Offensichtlich sind $\varphi$ & $\psi$ zyklisch (Rot.symm. des Schwerefeldes & des Kreisels).

- Also können wir die Umschreibung $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} \to \{\varphi, \psi, \theta, \dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\theta}\}$ bei $\varphi = \psi = 0$ durchführen

- $\vec{\omega}' = \dot{\varphi}\,(\hat{e}_z\cos\theta + \hat{e}_y\sin\theta) + \dot{\psi}\hat{e}_z + \dot{\theta}\hat{e}_x$

$$\Rightarrow \omega_1 = \dot{\theta} \;;\quad \omega_2 = \dot{\varphi}\sin\theta \;;\quad \omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[ I_0\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right) + I_3\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right)^2 \right] - mgl\cos\theta}$$

(gilt auch bei $\varphi, \psi \neq 0$!)

- Schreibe $E = T + V = \text{const.}$ (Energieerhaltung)

- Nutze $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = L_3' = \text{const.}'$ & $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} = L_3 = \text{const.}''$
um $\dot{\varphi}$ & $\dot{\psi}$ aus der Energieerhaltungsgleichung zu eliminieren.

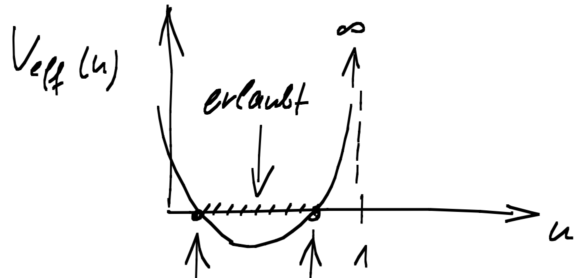
- Definiere $u \equiv \cos\theta$

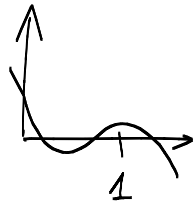
(Details: → Übungen)

$\Rightarrow$ Effektives 1-dim. Problem mit

$$E = \frac{1}{2} I_0 \frac{\dot{u}^2}{1-u^2} + V_{eff}(u) \;;\quad V_{eff}(u) = mglu + \frac{L_3^2}{2I_3} + \frac{(L_3' - L_3 u)^2}{2I_0(1-u^2)}$$

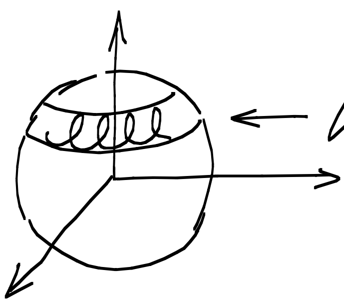
• Umschreibung: $$-\dot{u}^2 = \frac{2}{I_0}\left\{\underbrace{\left(mglu + \frac{L_3^2}{2I_3} - E\right)(1-u^2) + \frac{(L_3'-L_3u)^2}{2I_0}}_{\text{Polynom 3. Grades}}\right\}$$



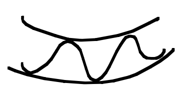



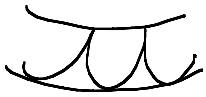

$\Rightarrow$ $u$ oszilliert zwischen $u_{min}$ & $u_{max}$
($\theta$ oszilliert zwischen $\theta_{min}$ & $\theta_{max}$).
Währenddessen schreitet $\varphi$ (ungleichmäßig) voran:

$$\dot{\varphi} = \frac{L_3' - L_3\cos\theta}{I_0 \sin^2\theta}$$

← Kreiselbewegung, dargestellt auf Sphäre um den festen Punkt (="Fußpunkt")

ebenso möglich: 

oder  (Grenzfall)

Dieser Grenzfall entspricht einem "angedrehten" und dann in schräger Lage losgelassenem Kreisel.