5 D'Alembertsches Prinzip und Lagrangesche Gleichungen 1. & 2. Art

(Teils historisch motivierte "Herleitung" der Euler-Lagrange-Gl.-en aus der Newtonschen Mechanik; Nach wie vor aktueller Teil: Nichtholonome Zwangsbedingungen & "Lagrange 1".)

5.1 Arten von Zwangsbedingungen

Beispiele für Zwangsbedingungen:

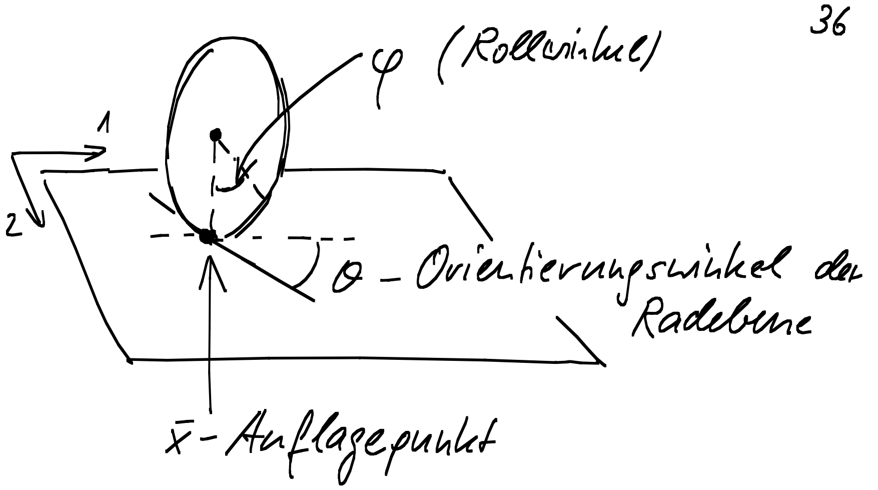
1) Gasmoleküle in einem Kasten
2) Perle auf Draht a) Draht liegt fest im Raum
   b) Draht wird bewegt
3) Senkrecht auf einer Fläche stehendes Rad, das Rollen aber nicht rutschen kann
4) Durch masselose Stangen verbundene Punktmassen (Unser Modell für starren Körper aus TP1, 3.2)

Zur Klassifikation:

- Falls die Zwangsbed.-en (oder "Zwänge") formulierbar sind als
$$\phi_\alpha(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N, t) = 0 \quad ; \quad \alpha = 1 \cdots d \,,$$
heißen sie holonom (falls t vorkommt – rheonom (2b), sonst – skleronom (2a, 4))

- Unter den nicht-holonomen Zwangsbedingungen sind speziell die von differentieller, nicht-integrierbarer Form interessant (3)

Zum Beispiel 3:



Zwänge:

$dx^1 = R\,d\varphi \cos\theta$

$dx^2 = R\,d\varphi \sin\theta$

Wenn sich (wenigstens eine) dieser Bedingungen ersetzen ließe durch

$$\Phi(x^1, x^2, \varphi, \theta) = 0$$

(In dem Sinne, daß $0 = d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial\phi}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial\phi}{\partial\varphi}d\varphi + \frac{\partial\phi}{\partial\theta}d\theta$ eine der differentiellen Bedingungen liefert),

dann könnte man z.B. nach φ auflösen:

$$\varphi = \varphi(x^1, x^2, \theta).$$

Das ist aber offensichtlich unmöglich, da man durch ein Herumrollen des Rades auf einem kleineren oder größeren Kreis zum gleichen (x^1, x^2, θ) bei beliebigem φ zurückkommen kann.

(Daher der Name: holos (griech.) ⟺ integer (lat.) ⟺ ganz

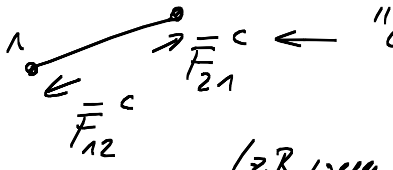
Also: nicht-holonom = nicht-integrierbar)

(Wir diskutieren im folg. trotzdem auch den "langweiligen" holonomen Fall.)

5.2 Prinzip der virtuellen Arbeit & d'Alembertsches Prinzip

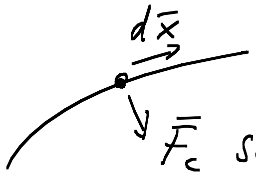
In vielen Systemen verrichten <u>Zwangskräfte</u> keine Arbeit, z.B.

(1) starre Verbindungsstange



$\delta A = \bar{F}_{12} \cdot d\bar{x}_1 + \bar{F}_{21} \cdot d\bar{x}_2 = 0$ (z.B. wegen Energieerhaltung; auch durch direkte Rechnung)

② Perle auf Draht:



$\delta A = 0 \Leftarrow$ $\bar{F}_c$ stets orthogonal zu Draht und damit zu $d\bar{x}$

Dies gilt offensichtlich nicht mehr, wenn der Draht bewegt wird.

- δA bleibt jedoch Null im Fall der

<u>virtuellen Verrückung $\delta\bar{x}$.</u>

(gedachte Verrückung des Systems bei $t = \text{const.}$, die mit den Zwängen konsistent ist, aber sonst in keiner Weise als "echte Bewegung" aufgefaßt werden kann.)

$\Rightarrow$ <u>Prinzip der virtuellen Arbeit / Definition eines "glatt geführten" Systems:</u> $\boxed{\sum_a \bar{F}_a^c \cdot \delta\bar{x}_a = 0}$ für virt. Verrückung $\delta\bar{x}_a$ $(a = 1\ldots N)$

- Da $\bar{F}_a^{tot} = \bar{F}_a + \bar{F}_a^c$ ($\bar{F}_a \equiv$ "äußere Kraft"), folgt

$$\sum_a \left(\bar{F}_a^{tot} - \bar{F}_a\right) \delta\bar{x}_a = 0$$

und, mit Newton:

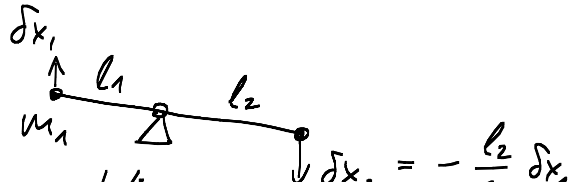
d'Alembertsches Prinzip $\boxed{\sum_a \left(\bar{F}_a - m_a \ddot{\bar{x}}_a\right) \cdot \delta\bar{x}_a = 0}$

nur äuß. Kräfte

virtuelle Verrückung eines "glatt geführten" Systems

Nützliches Korollar: $\boxed{\text{Im Gleichgewicht gilt } \sum_a \bar{F}_a \cdot \delta\bar{x}_a = 0}$

Bsp:



$\Rightarrow$ $F_1 \delta x_1 + F_2 \cdot \left(-\frac{l_2}{l_1}\right)\delta x_1 = 0$

$F_1 / F_2 = l_2 / l_1$

5.3 D'Alembertsches Prinzip mit verallgemeinerten Koordinaten & Kräften

- Seien unsere Zwangsbedingungen holonom, also vom Typ

$$\phi_\alpha(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_N, t) = 0 \quad , \quad \alpha = 1 \cdots d.$$

- Dann ist es vorteilhaft, mit verallg. Koord.-en q_m zu arbeiten:

$$\bar{x}_a = \bar{x}_a(q_1, \cdots, q_{3N-d}, t) \quad , \quad a = 1 \cdots N.$$

- D'Alembert: $$\sum_a (\underbrace{\bar{F}_a}_{\text{äuß. Kräfte}} - m_a \ddot{\bar{x}}_a) \cdot \underbrace{\delta \bar{x}_a}_{\text{virtuelle Verrückungen}} = 0$$

(müssen Zwänge respektieren)

$$\delta \bar{x}_a = \sum_m \frac{\partial \bar{x}_a}{\partial q_m} \cdot \delta q_m \quad , \quad \delta q_m \text{ beliebig}$$

(Zwänge automatisch respektiert.)

① $$\sum_a \bar{F}_a \cdot \delta \bar{x}_a = \sum_{a,m} \bar{F}_a \cdot \frac{\partial \bar{x}_a}{\partial q_m} \delta q_m \equiv \sum_m Q_m \delta q_m$$

<u>verallgemeinerte Kräfte</u>

② $$\ddot{\bar{x}}_a \delta \bar{x}_a = \sum_m \ddot{\bar{x}}_a \cdot \frac{\partial \bar{x}_a}{\partial q_m} \delta q_m \quad \text{(keine Summe über } a\text{)}$$

$$= \sum_m \left[\frac{d}{dt}\left(\dot{\bar{x}}_a \frac{\partial \bar{x}_a}{\partial q_m} \right) - \dot{\bar{x}}_a \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{x}_a}{\partial q_m} \right) \right] \delta q_m$$

<u>Nebenrechnung</u>: (zur Vereinfachung ohne Indizes)

a) $$x = x(q,t) \quad , \quad \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial q} \cdot \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t} \equiv \dot{x}(q, \dot{q}, t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial x}{\partial q}$$

b) $$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right) &= \frac{\partial^2 x}{\partial q^2} \dot{q} + \frac{\partial^2 x}{\partial q \partial t} \\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial q} &= \frac{\partial^2 x}{\partial q^2} \dot{q} + \frac{\partial^2 x}{\partial q \partial t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right) = \frac{\partial \dot{x}}{\partial q}$$

$$\sum_a m_a \ddot{\bar{x}}_a \cdot \delta \bar{x}_a = \sum_{a,m} m_a \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{\bar{x}}_a \frac{\partial \dot{\bar{x}}_a}{\partial \dot{q}_m} \right) - \dot{\bar{x}}_a \frac{\partial \dot{\bar{x}}_a}{\partial q_m} \right] \delta q_m$$

$$= \sum_{a,m} m_a \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} \left(\frac{1}{2} \dot{\bar{x}}_a^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_m} \left(\frac{1}{2} \dot{\bar{x}}_a^2 \right) \right] \delta q_m$$

- Kombiniere ① & ② gemäß $\sum_a (\bar{F}_a - m_a \ddot{\bar{x}}_a) \delta \bar{x}_a = 0$

$$\Rightarrow \sum_m \left[Q_m - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m} \right) T \right] \delta q_m = 0$$

Dies ist das d'Alembertsche Prinzip in verallg. Koordinaten. mit $T = \sum_a \frac{m_a}{2} \dot{\bar{x}}_a^2$ (kinet. Energie)

Da die δq_m beliebig sind, verschwindet der Ausdruck in eckigen Klammern für jedes m

$\Rightarrow$ $(3N-d)$ Diff.gleichungen für $(3N-d)$ Variable q_m.
(Problem prinzipiell gelöst)

5.4 Lagrangesche Gleichungen 1. Art

- Die verallg. Koordinaten seien nun zusätzlich nichtholonomen differentiellen Zwangsbedingungen unterworfen:

$$\sum_m f_m^\alpha \, dq_m + f_t^\alpha \, dt = 0 \quad , \quad \alpha = 1 \cdots p$$

Funktionen der q's und von t

- Betrachte $\delta \bar{q} \equiv \{ \delta q_m \}$, $\bar{f}^\alpha \equiv \{ f_m^\alpha \}$ und
$\bar{P} \equiv \left\{ Q_m - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m} \right) T \right\}$ als Vektoren in $\mathbb{R}^{3N-d}$.
- Für virtuelle Verrückungen ($dq \to \delta q$, $dt = 0$) gilt in dieser Sprache $\boxed{\bar{f}^\alpha \cdot \delta \bar{q} = 0}$ $(\forall \alpha)$.

• Mit Span $\{\bar{f}^\alpha\}$ = "Der von $\bar{f}^\alpha$'s aufgespannte lin. Unterraum in $\mathbb{R}^{3N-d}$"

folgt also: $\quad \delta\bar{q} \in \text{Span}\{\bar{f}_\alpha\}_\perp$ ← "orthogonales Komplement"

• d'Alembert lautet in dieser Sprache:

$$\bar{P} \cdot \delta\bar{q} = 0 \quad \text{für alle } \delta\bar{q}\text{'s}$$

oder: $\quad \bar{P} \in \{\delta\bar{q}\}_\perp$

• Damit folgt $\quad \bar{P} \in \{\text{Span}\{\bar{f}_\alpha\}_\perp\}_\perp = \text{Span}\{\bar{f}_\alpha\}$

$\Rightarrow$ $\exists$ Funktionen $\lambda^\alpha(t)$ so daß

"Lagrange 1"
$$\left\| \begin{aligned} & Q_m - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m}\right)T + \sum_\alpha \lambda^\alpha f_m^\alpha = 0 \\ & \sum_m f_m^\alpha \dot{q}_m + f_t^\alpha = 0 \end{aligned} \right\|$$

System von $(3N-d)+p$ Diff.gleichungen für die $(3N-d)+p$ Funktionen q_m & λ^α. Problem prinzipiell gelöst.

<u>Zur phys. Bedeutung der "Lagrange-Multiplikatoren" λ^α:</u>

Aus der Herleitung des d'Alembertschen Prinzips in verallg. Koordinaten (11.4) läßt sich folgendes technische Zwischenergebnis extrahieren:
$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m}\right)T = \sum_a m_a \ddot{\bar{x}}_a \cdot \frac{\partial \bar{x}_a}{\partial q_m}$$

Mit $m_a\ddot{\bar{x}}_a = \bar{F}_a^{tot} = \bar{F}_a + \bar{F}_a^c$ und

$$Q_m \equiv \sum_a \bar{F}_a \cdot \frac{\partial \bar{x}_a}{\partial q_m} \quad ; \quad Q_m^c \equiv \sum_a \bar{F}_a^c \frac{\partial \bar{x}_a}{\partial q_m}$$

folgt: $$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m}\right) T = Q_m + Q_m^c .$$

Mit $$Q_m - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m}\right) T + \sum_\alpha \lambda^\alpha f_m^\alpha = 0$$

ergibt sich: $$\left\| \; Q_m^c = \sum_\alpha \lambda^\alpha f_m^\alpha \; \right\|$$

⇒ Die Lagrange-Multiplikatoren bestimmen die verallg. Zwangskräfte.

<u>Kommentar:</u> Falls es keine (im ersten Schritt zu eliminierenden) holonomen Zwänge gibt, kann man die Lagrangeschen Gl.-en 1. Art auch direkt in kartes. Koordinaten formulieren. Man erhält

$$\left\| \begin{array}{l} F_m - m_m \ddot{x}_m + \sum_\alpha \lambda^\alpha f_m^\alpha = 0 \\ \sum_{m=1}^{3N} f_m^\alpha \dot{x}_m + f_t^\alpha = 0 \end{array} \right\| \quad (m = 1 \ldots 3N)$$

und $$\left\| \; F_m^c = \sum_\alpha \lambda^\alpha f_m^\alpha \; \right\|$$

(m läuft über alle kartes. Koordinaten aller N Teilchen.)

5.5 Lagrangesche Gl.-en 2. Art

- Betrachte mech. System mit verallg. Koord.-en q_m ohne zusätzliche nichtholonome Zwänge. Die äuß. Kräfte seien konservativ:

$$\bar{F}_a = -\bar{\nabla}_a V(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_N) \quad \text{(Gradient bzgl. } \bar{x}_a\text{)}$$

- verallg. Kräfte:

$$Q_m = \sum_a \bar{F}_a \cdot \frac{\partial \bar{x}_a}{\partial q_m} = -\sum_a \left(\bar{\nabla}_a V\right) \cdot \frac{\partial \bar{x}_a}{\partial q_m} = -\frac{\partial}{\partial q_m} V$$

(Wobei wir V als $V(x(q))$ auffassen.)

$$= \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m}\right) V$$

- Einsetzen in d'Alembert, $Q_m - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m}\right) T = 0$, liefert:

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m}\right)\underbrace{\left(V - T\right)}_{-L} = 0$$

Damit haben wir die weiter oben aus dem Wirkungsprinzip abgeleiteten Euler-Lagrange-Gl.-en ($\equiv$ Lagrange-Gl.-en 2. Art) aus Newton (für "glatt geführte Systeme" und konservative äuß. Kräfte) gewonnen.

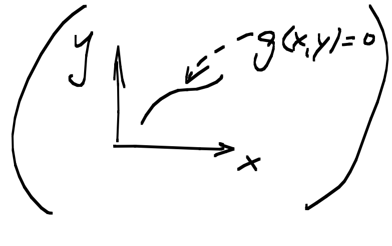
5.6 Lagrange-Multiplikatoren (allgemeinere Sicht)

- Wenn wir $f(x,y)$ extremalisieren wollen, müssen wir nur

$$f_{x,y} = 0 \qquad \left(f_x \equiv \frac{\partial}{\partial x} f \text{ etc.}\right)$$

lösen.

- Wenn wir $f(x,y)$ $\boxed{\text{entlang der Kurve } g(x,y)=0}$ extremalisieren wollen, müssen wir nur ("Zwang")



$$(f + \lambda g)_{x,y,\lambda} = 0$$

lösen.

- Begründung: Sei $f + \lambda g$ extremal in x, y, λ bei x_0, y_0, λ_0 in $\mathbb{R}^3$. Dies impliziert $(f+\lambda g)_\lambda = 0$, also $g = 0$. D.h. (x_0, y_0, λ_0) liegt

in der Fläche $g(x,y)=0$ in $\mathbb{R}^3$. Also ist $(f+\lambda g)$ extremal bei
(x_0, y_0, λ_0) in dieser Fläche. Also ist f extremal in dieser Fläche.

- Um der Anwendung "nichtholonome Zwangsbedingungen" näher zu kommen, formulieren wir dieses einfache Bsp. um:

- Wir wollen $\bar{v} \cdot \bar{\nabla} f = 0$ wobei $\underbrace{\bar{v} \parallel \{\text{Kurve } g(x,y)=0\}}_{\text{das ist äquivalent zu } \bar{v} \perp \bar{\nabla} g}$.

- Die Lösung kennen wir:

$$\bar{\nabla} f + \lambda \bar{\nabla} g = 0 \quad \& \quad g = 0$$

- Unser Problem war (für eine Zwangsbed. und mit $f_t = 0$):

$$\bar{P} \cdot \delta \bar{q} = 0 \quad \text{wobei} \quad \delta \bar{q} \perp \bar{f}.$$

Die Lösung war $\quad \bar{P} + \lambda \bar{f} = 0 \quad \& \quad \bar{f} = 0$,
wie in unserem einfachen Bsp. (allerdings als Dgl.).

- Vergessen wir jetzt die nichthol. Zwangsbed. & das einfache Bsp. Die wirklich spannenden Beispiele sind vom Typ:

① $F[f]$, $G[f]$ Funktionale ; Extremalisiere F mit Nebenbed. $G=0$

$$\Rightarrow \quad \delta(F + \lambda G) = 0 \qquad \left(\text{Dies schließt } 0 \stackrel{!}{=} (F+\lambda G)_\lambda = G \text{ ein!}\right)$$

② Extremalisiere $\int dt\, L(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t) = 0$ mit Nebenbed. $f(\bar{x}(t)) = 0$.

$$\Rightarrow \quad \delta \int dt \left[L(\bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), t) + \lambda(t) f(\bar{x}(t)) \right] = 0$$

(Jetzt ist eine ganze Fkt. $\lambda(t)$ zu bestimmen!)