6 Hamilton-Formalismus

6.1 Die Hamilton-Funktion

M5 - Legendre-Transformation

- Gegeben sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto f(x)$.
- Wir wollen die "Information" anders kodieren, z.B. in einer Fkt. von $u = f'(x)$.
- Man könnte z.B. obiges "auflösen", also $x = x(u)$ als Inverses zu $u(x) = f'(x)$ definieren. Dann könnte man die "Transformierte" als
  $$f(x(u))$$
  definieren.
- Als math. natürlicher erweist sich (wie noch klar wird):
  $$g(u) = x(u) \cdot u - f(x(u)).$$
- Anders gesagt:
  Def.: Die Legendre-Transformierte zu einer Fkt. $x \mapsto f(x)$ ist die Fkt. $u \mapsto g(u)$ wobei:
  $$\boxed{g(u) = x \cdot u - f(x) \quad \text{mit} \quad \underbrace{u = f'(x)}_{\hookrightarrow\, x = x(u)}}$$
- Wichtige Eigenschaften / Fakten:
  - Wir fordern $f''(x) \neq 0$ damit $u = f'(x)$ nach x auflösbar ist
  - Es gilt $g'(u) = x(u)$

Wir prüfen dies: $g'(u) = \frac{d}{du}\left(x(u)\cdot u - f(x(u))\right)$

$$= x(u) + \underbrace{u\,\frac{dx(u)}{du} - f'(x(u))\cdot\frac{dx(u)}{du}}_{=0} = x(u) \checkmark$$

– Die Leg.-Trf. ist eine "Involution" (d.h. $\mathcal{L}eg(\mathcal{L}eg(f)) = f$).

Wir prüfen dies explizit: $f \xrightarrow{\mathcal{L}eg.} g \xrightarrow{\mathcal{L}eg.} h$

$h(z) = u\cdot z - g(u)$ mit $z = g'(u)$

& $g(u) = x\cdot u - f(x)$

& $u = f'(x)$ & $g'(u) = x$

Also $x = z$ und $h(x) = u\cdot z - (x\cdot u - f(x)) = f(x) \checkmark$

- Die Verallg. auf Fkt.-en mehrerer Variablen ist offensichtlich:

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \bar{x} \mapsto f(\bar{x}) \quad \xrightarrow{\text{Leg.-Trf.}} \quad g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \bar{u} \mapsto g(\bar{u}) \text{ wobei}$$

$\left\{\begin{array}{l}\text{statt } f'' \neq 0 \text{ jetzt:} \\ \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right) \neq 0\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{benötigt!}}$ $\boxed{g(\bar{u}) = \bar{x}\cdot\bar{u} - f(\bar{x}) \ \& \ \underbrace{\bar{u} = \nabla f(\bar{x})}_{\text{aufzulösen nach } \bar{x}}}$

- <u>Beispiele</u>: 1) $f(x) = x^2$; $f'(x) = 2x = u \Rightarrow x = u/2$

$$g(u) = x\cdot u - f(x) = \frac{u}{2}\cdot u - (u/2)^2 = \frac{u^2}{4}$$

2) $f(x) = e^x$; $f'(x) = e^x = u \Rightarrow x = \ln u$

$$g(u) = x\cdot u - f(x) = u\cdot\ln(u) - e^{\ln u}$$
$$= u(\ln u - 1)$$

MS

Die Hamilton-Fkt. $H(q,p,t)$ zur Lagr.-Fkt. $L(q,\dot q,t)$ ist <u>die Leg.-Transformierte zu L in der Variablen $\dot q$.</u>

Also:

$$H(q,p,t) = p\dot q - L(q,\dot q,t)\,,$$ wobei

$\dot q = \dot q(p,q,t)$ definiert ist durch

$$p = \frac{\partial L(q,\dot q,t)}{\partial \dot q}$$ (p ist "der zu q kanonisch konjug. Impuls")

- <u>Bsp.</u>: $L = \frac{1}{2} f(q)\dot q^2 - V(q)$; $p = f(q)\dot q$

$$H = p\dot q - L = p\frac{p}{f(q)} - \frac{1}{2} f(q)\left(\frac{p}{f(q)}\right)^2 + V(q)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{p^2}{f(q)} + V(q) = T + V$$ (ausgedrückt durch q & p)

- <u>Mit mehreren Variablen</u>: $L = L(q_1 \cdots q_n, \dot q_1 \cdots \dot q_n, t)$

$$H = H(q_1 \cdots q_n, p_1 \cdots p_n, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot q_i - L \quad \text{mit} \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}$$

$$\uparrow \quad \uparrow$$

$$\dot q_i = \dot q_i(q_1 \cdots q_n, p_1 \cdots p_n, t)$$

- Das obige Bsp verallg. sich leicht auf den Fall mehrerer Koordinaten und gibt:

$$L = T - V \quad \Rightarrow \quad H = \underbrace{T + V}_{\text{als Fkt. der } p_i, q_i}$$

(Dies lässt sich mit dem Satz v. Euler ganz allgemein zeigen, solange T eine homog. Fkt. der $\dot q_i$ vom Grad 2 ist. → Übung)

<u>6.2 Hamiltonsche Bew.gleichungen & Phasenraum</u>

1) $\dfrac{\partial H}{\partial p} = \dot q$ (Eigenschaft der Leg.-Trf.)

2) $$\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}\left\{ p\,\dot q(q,p,t) - L(q,\dot q(q,p,t))\right\}$$

$$= p\frac{\partial \dot q}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial q} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q}}_{\equiv p}\cdot\frac{\partial \dot q}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} = -\dot p$$

Eine völlig analoge Rechnung (→ Übungen) mit vielen Koord. liefert:

$$\boxed{\dot q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad ; \quad \dot p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}}$$

- Um die Neuigkeit an dieser Beschreibung d. Bewegung zu würdigen, erinnern wir kurz an Lagrange:

Lagr.: Zustand: $\{q_i\}$ (Lage im "Konfigurationsraum")
& $\{\dot q_i\}$ (momentane Geschwindigkeiten)

Bewegung: Euler-Lagr. (n Dgl.-en 2. Ordn.)

Ham.: Zustand: $\{\xi_a\} = \{q_i, p_i\}$ (Lage im Phasenraum, $a = 1..2n$)

Bewegung: Ham.-Gl.-en ($2n$ Dgl.-en 1. Ordn.:
$\dot\xi_a = f_a(\xi_1, .., \xi_{2n})$.)

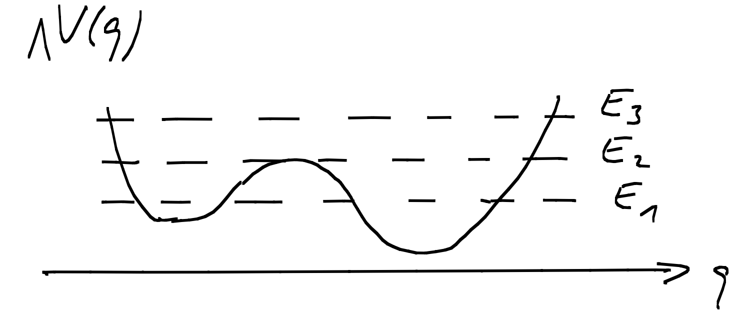
Einfaches Bsp.:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q) \Rightarrow \dot q = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \; ; \; \dot p = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q}$$

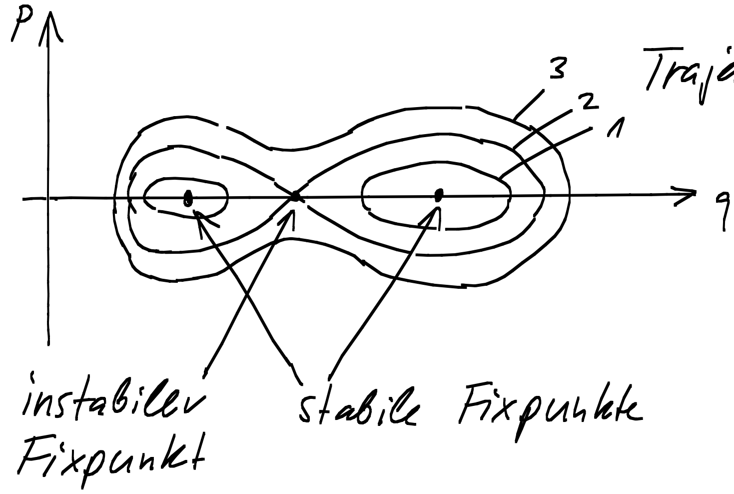
also: $\underbrace{\dot q = p/m}_{\text{"Def. von } p\text{"}} \; ; \; \underbrace{\dot p = -\partial V/\partial q}_{\text{Newton}}$

[Wir könnten die erste Gl. ableiten, $\ddot q = \dot p/m$, und die zweite einsetzen, $\ddot q = -\frac{1}{m}\partial V/\partial q$. Dann wären wir wieder bei Lagrange. Wollen wir aber nicht!]

Wir veranschaulichen die Lösungen direkt im Phasenraum:



$$\left(\frac{p^2}{2m} + V(q) = E = \text{const.}\right)$$



Trajektorien im Phasenraum

$$p = \pm\sqrt{2m\,(E - V(q))}$$

$$p = p(q)$$

(Trajektorie)

- $\left(-\frac{\partial H}{\partial q}\right)$ & $\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)$ definieren an jedem Pkt. des Phasenraumes einen Vektor, der die Richtung und Geschw. der Bewegung des Systems im Phasenraum festlegt. Damit ist die Evolution für alle Zeiten bestimmt.

(Vgl. TP1 ; Kap. 2 ; speziell 2.2)

- Allgemeiner ist der Phasenraum eines n-dim. Problems 2n-dimensional und das "Phase portrait" entsprechend komplizierter.