7 Poisson-Klammern

7.1 Definition & erste Anwendungen

Sei der Phasenraum eines Hamiltonschen Systems durch $\{q_i\}$ & $\{p_i\}$ ($i = 1 \cdots n$) parametrisiert. Seien $F(q,p,t)$ & $G(q,p,t)$ zwei beliebige "Observable" ($\equiv$ Fkt.-en auf Phasenraum).

<u>Def.:</u> $\{F, G\} \equiv \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right)$ heißt "Poissonklammer"

von F & G. Sie ist selbst eine Observable.

<u>Anwendungen:</u>

1) $$\dot{F} = \frac{d}{dt} F = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i$$
$$= \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)$$
$$= \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}$$

(Die zeitl. Entwicklung einer Obs. wird durch die Poissklammer mit H bestimmt.)

<u>Insbesondere:</u>

- Falls H nicht explizit von t abhängt, ist es erhalten: $\dot{H} = \{H, H\} = 0$
- Sei F nicht explizit t-abhängig. Dann gilt:

$$\boxed{F \text{ erhalten} \iff \{F, H\} = 0}$$

2) Des Weiteren sind auch q_i & p_i (besonders einfache) Observablen. Demnach gilt:

$$\underbrace{\begin{aligned} \dot{p}_i &= \{p_i, H\} = \sum_j \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial p_i}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i &= \{q_i, H\} = \quad \cdots \quad = \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{aligned}}_{\text{elegante Formulierung der Hamilton-Gleichungen}}$$

3) Für die zueinander konjugierten Variablensätze $\{q_i\}$ & $\{p_i\}$ gilt:

$$\boxed{\{q_i, q_j\} = 0\,, \quad \{p_i, p_j\} = 0\,, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}}$$

$$\left(\text{z.B. } \{q_i, p_j\} = \sum_k \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k}\frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k}\frac{\partial p_j}{\partial q_k} \right) = \sum_k \left(\delta_{ik}\delta_{jk} - 0 \right) = \delta_{ij} \checkmark \right)$$

7.2 Die Poissonklammer als Lie-Algebra-Operation

M7 Lie-Algebra

Sei V ein Vektorraum & "$[\cdot,\cdot]$" eine binäre Operation, also eine Abb.:

$$V \times V \longrightarrow V$$
$$(v, w) \longmapsto [v, w]\,.$$

Falls

(1) $[v,w] = -[w,v]$ (Antisymmetrie)

(2) $[\alpha v + \beta w, u] = \alpha [v,u] + \beta [w,u]$ (Linearität)

(3) $[u,[v,w]] + [v,[w,u]] + [w,[u,v]] = 0$ (Jacobi-Identität),

nennt man das Paar V, $[\cdot,\cdot]$ eine <u>Lie-Algebra</u>.

<u>Bsp.:</u> V – lin. Raum der $n\times n$-Matrizen

$[\cdot,\cdot]$: $[A,B] = AB - BA$ ("Kommutator" zweier Matrizen")

M7

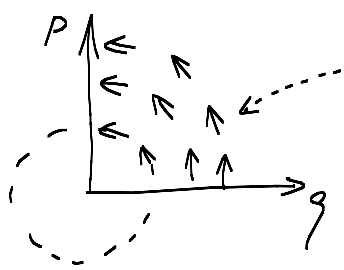
<u>Fakt:</u> Die Poissonklammer macht den Raum der Funktionen von $\{q_i\}$, $\{p_i\}$ zur Lie-Algebra.

((1) & (2) sind offensichtlich, (3) kann mit einiger Mühe nachgerechnet werden. Wir werden dies nicht tun, da sich diese Eigenschaft später [mit mächtigeren math. Konzepten] leicht zeigen lässt.)

7.3 Poissonklammer & Vektorfelder

- H definiert eine "Bewegung" auf dem Phasenraum und damit (zunächst nur "intuitiv") ein Vektorfeld:

[Erinnerung: Oszillator:



$$\left\{\begin{array}{l} \dot q = \partial H/\partial p \\ \dot p = -\partial H/\partial q \end{array}\right.$$

]

- Man kann dies auch so auffassen, dass sich jede Fkt. auf dem Phasenraum in der Zeit dt geringfügig ändert, was durch

$$\dot F = \{F, H\}$$

(F sei nicht explizit zeitabhängig)

beschrieben wird.

- In diesem Sinne entspricht ein Vektorfeld konkreter einem Differentialoperator, nämlich

allgemein:

$$\underbrace{V^i(x^1 \dots x^n)}_{\text{Vektor an jedem Pkt.}} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

hier:

$$\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} \equiv D_H$$

$$\left(\{H, F\} = D_H F \right)$$

- H ist aber nur eine bestimmte Observable, und wir können prinzipiell auch jede andere Observable nehmen und mit ihr ein Vektorfeld, einen Diff.-operator & und eine "Bewegung" assoziieren:

H induziert $\quad \dfrac{dF}{dt} = -D_H F = \{F, H\}$

G induziert $\quad \dfrac{dF}{d\tau} = -D_G F = \{F, G\}$

etc.

Also: Isomorphismus von Lie-Algebren.

Observable (Funktionen) $\overset{\Downarrow}{\longleftrightarrow}$ Vektorfelder / Diff.operatoren / Bewegungen

$\{\cdot,\cdot\}$ $\qquad\qquad$ $[D_F, D_G] = \underbrace{D_F D_G - D_G D_F}_{\text{Kommutator}}$

(Erhaltungsgrößen sind solche Observable, welche unter der durch H induzierten Bewegung invariant sind, d.h. $D_H F = 0$.)

7.4 Die Drehimpuls-Lie-Algebra in der Hamilton-Mechanik

- Wir hatten in TP1, Kap. 6 kleine Drehungen als

$$R(\bar{\epsilon}) = \mathbb{1} + \epsilon^i T^i$$

mit

$$(T^i)^{jk} = \varepsilon^{ijk}$$

beschrieben. Wir hatten die T^i als Basis von $so(3) = \mathrm{Lie}(SO(3))$ bezeichnet. In der Tat macht der Kommutator $so(3)$ zur Lie-Algebra:

$$\left[\tfrac{1}{2}T^i, \tfrac{1}{2}T^j\right] = \varepsilon^{ijk}\, \tfrac{1}{2}T^k$$

(nachrechnen!)

Das Noether-Theorem ordnet den durch die T^i „generierten" Symmetrien Erhaltungsgrößen zu, und zwar die Drehimpuls-komponenten

$$L_i = \varepsilon_{ijk}\, x_j\, p_k \qquad (\text{hier } q \to x\text{, wie in } \mathbb{R}^3 \text{ üblich}).$$

Man prüft leicht nach:

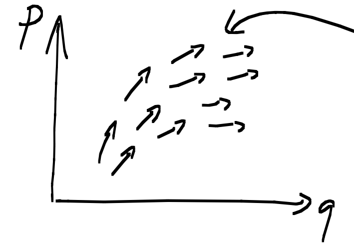
$$\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k$$

Die L_i generieren auf dem Phasenraum genau die Bewegung, die der von $\frac{1}{2}T_i$ generierten Symmetrie im Konfigurationsraum entspricht.

7.5 Satz v. Liouville

- $\bar{\xi}(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t), p_1(t), \dots, p_n(t))$ beschreibe die Trajektorie eines phys. Systems im Phasenraum.
- $\bar{\omega}(t) = \dfrac{d\bar{\xi}(t)}{dt} = \left(\dfrac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \dfrac{\partial H}{\partial p_n}, -\dfrac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, -\dfrac{\partial H}{\partial q_n}\right)$

ist zeitunabhängig: $\bar{\omega} = \bar{\omega}(q,p)$ (falls H nicht explizit von t abhängt).



„Geschwindigkeitsfeld"
$\bar{\omega} = \bar{\omega}(q,p)$

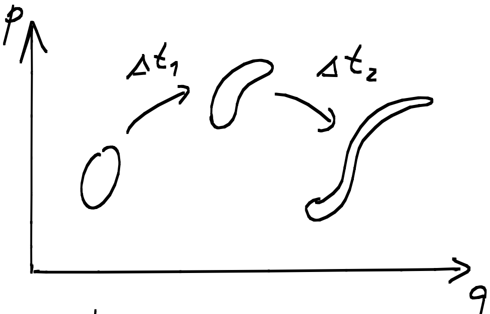
- Es gilt: $\operatorname{div}\bar{\omega} \equiv \bar{\nabla}_{q,p} \cdot \bar{\omega} \equiv \sum_{i=1}^{n} \left(\dfrac{\partial \omega_i}{\partial q_i} + \dfrac{\partial \omega_{n+i}}{\partial p_i}\right)$

$$= \sum_i \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i}\right) = 0$$

$\Rightarrow$ $\bar{\omega}(q,p)$ beschreibt eine "inkompressible Strömung".

- Damit ist intuitiv klar:

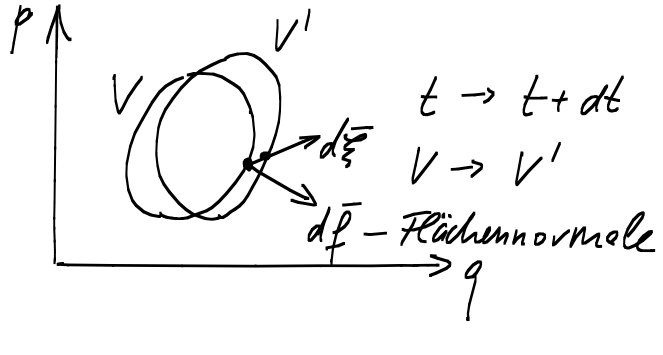
<u>Satz von Liouville:</u> Die Größe von Teilvolumina des Phasenraumes ändert sich durch die Hamiltonsche Dynamik nicht:



(Die Form kann sich natürlich ändern.)

<u>Genauere Begründung:</u>

Betrachte infinitesimale Bewegung aller Pkt.-e im Startvolumen V:



$$dV = V' - V = \int_O d\bar{f} \cdot d\bar{\xi}$$

Dies sollte aus obigem Bild anschaulich klar sein (das Vorzeichen des Produktes $d\bar{f} \cdot d\bar{\xi}$ entscheidet, "in welche Richtung" V wächst / sich zurückzieht)

O ← Oberfläche von V (oder V')
(Der Unterschied ist im Gesamtergebnis höherer Ordnung)

"Teilen durch dt" $\Rightarrow$

$$\frac{dV}{dt} = \int_O d\bar{f} \cdot \bar{\omega} \underset{\text{Gauß}}{=} \int_V dVol. \cdot (\bar{\nabla}\bar{\omega}) = 0$$

✓