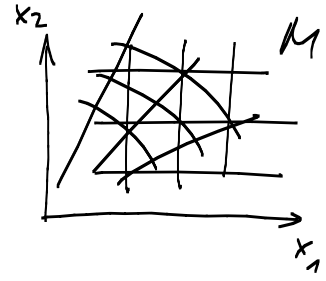
8 Hamilton-Mechanik in Differentialformen

M8 Tangential- & Cotangentialraum

- d-dim. Raum M (nicht Vektorraum!), z.B. für $d=2$ eine Fläche, hat Realität unabhängig von Koordinaten:



Bsp.: $\quad x^1, x^2 \quad$ od. $\quad r, \varphi$

$x^1(r,\varphi)$
$x^2(r,\varphi)$ etc.

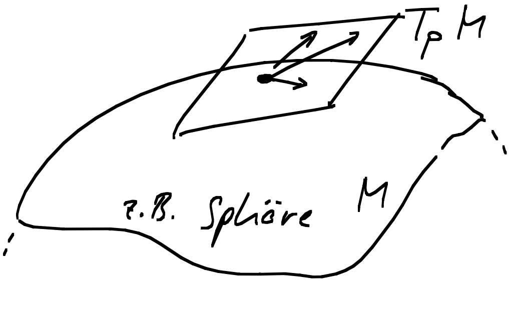
(↗ siehe später: "Mannigfaltigkeit" M)

- Ebenso sind Vektorfelder auf diesem Raum real unabhängig von Koordinaten. (Wir hatten z.B. schon ein Vektorfeld mit einem Diff.-operator assoziiert: $\underbrace{D : f \longrightarrow Df}$

Abb. auf Raum der Fkt.-en auf M – koord.unabhängig.

- In Koordinaten: $D = v^i(x)\dfrac{\partial}{\partial x^i}$
- In anderen Koordinaten: $D = v'^i(x')\dfrac{\partial}{\partial x'^i}$
- Umrechnung: $v^i\dfrac{\partial}{\partial x^i} = v^i\dfrac{\partial x'^j}{\partial x^i}\dfrac{\partial}{\partial x'^j} \implies \boxed{v'^i = \dfrac{\partial x'^i}{\partial x^j}v^j}$

- Die so erklärten Vektoren an einem gewissen Punkt $p \in M$ bilden den Tangentialraum T_pM:



- Vektorfeld ist Zuordnung

$$p \longmapsto v(p) \in T_pM.$$

(also ein Vektor in jedem T_pM.)

- Def.: "1-Form" ist eine entsprechende Zuordnung

$$p \longmapsto \omega(p) \in T_p^*M \equiv (T_pM)^* \quad \text{(Dualraum).}$$

- Eine Basis (an jedem Pkt.) ist gegeben durch dx^i mit

$$\underline{dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) \equiv \delta^i{}_j} \qquad \text{(duale Basis)}$$

- Damit haben wir allgemein: $\omega = \omega_i \, dx^i$ &

$$\underbrace{\omega(v)}_{\text{Zahl bzw. Funktion!}} = \omega_i \, dx^i\left(v^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \omega_i v^j \, dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \omega_i v^i$$

- Beispiel: Zu jeder Fkt. f gehört natürlicherweise eine 1-Form: $\omega = df$, definiert durch

$$df(v) = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}(f) = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

$$\Rightarrow df = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) dx^i$$

- Diese Idee verallgemeinert sich auf natürliche Weise zu <u>p-Form</u>:

Für jedes $q \in M$: $$\omega^p(q) \in \underbrace{(T_q{}^*M)^{\wedge p}}_{\substack{\text{total antisymm.} \\ \text{Unterraum}}} \subset \underbrace{(T_q{}^*M)^{\otimes p}}_{\substack{p\text{-faches} \\ \text{Tensorprodukt}}}$$

(Der tiefe Grund für die Antisymmetrisierung wird bald klar)

- Bsp. mit $p = d = 2$: $\omega = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\, dx^i \wedge dx^j = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\left(dx^i \otimes dx^j - dx^j \otimes dx^i\right)$

(Diese <u>spezielle</u> p-Form in p Dimensionen gibt es für jedes p.)

- $p = 2$ & $d = 1$ geht nicht: $dx^1 \wedge dx^1 = 0$!
- Allgemeine 2-Form in $d \geq 2$ Dim.: $\omega = \frac{1}{2}\omega_{ij}\, dx^i \wedge dx^j$

$$\omega(v,u) = \omega_{ij} v^i u^j$$

• Äußere Ableitung: $d : \omega^p \longmapsto \omega^{p+1}$

$$d(\omega_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}) = \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \omega_{i_1 \dots i_p}\right) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

• Bsp.: $df = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) dx^i$ (siehe oben) [Funktionen sind in diesem Sinne 0-Formen]

M8

Formulierung der Hamilton-Mechanik

Phasenraum: 2n-dimensionaler Raum (Mannigfaltigkeit) mit $\underbrace{\text{nicht-degenerierter, geschlossener 2-Form}}_{\equiv \text{"symplektische Struktur"}}$ ω.

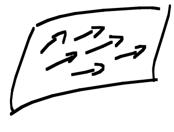
• nicht-degeneriert: ω_{ij} – invertierbare Matrix ($\omega = \frac{1}{2}\omega_{ij} d\xi^i \wedge d\xi^j$, $i,j = 1 \cdots 2n$)

• geschlossen: $d\omega = 0$.

Hamilton-Fkt: $H = H(\xi^1 \dots \xi^{2n})$ – Fkt. auf Phasenraum

Hamilton-Gl.-en: $\boxed{\omega(\dot\xi) = dH}$

$\dot\xi$ – Vektorfeld $\dot\xi = \dot\xi^i \frac{\partial}{\partial \xi^i}$ (Intuitiv: $\Delta\xi^i \approx \dot\xi^i \Delta t$ Bewegung in Zeit Δt.)



$\omega(\dot\xi) \equiv \omega(\cdot, \dot\xi)$
ist offensichtlich in T_q^*M, und damit eine 1-Form. Damit sollte klar sein, in welchem Sinne die obigen Ham.-Gl.-en zu lesen sind.

• Jetzt wählen wir Koordinaten q, p so dass $\omega = dp_\alpha \wedge dq^\alpha$ $(\alpha = 1 \cdots n)$.
(Dass dies stets geht ist ein nichttrivialer Fakt!)

[Mit $\xi^i = \{q^1 \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n\}$ heißt dies $\omega_{ij} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -\mathbb{1} \\ \hline \mathbb{1} & 0 \end{array}\right)$.
→ Symplektische Matrix; Gruppen $Sp(n)$ – analog zu $SO(n)$ ...]

$$\Rightarrow \quad dp_\alpha \wedge dq^\alpha\left(\cdot \, , \, \dot q^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} + \dot p_\alpha \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \right) = \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} dq^\alpha + \frac{\partial H}{\partial p^\alpha} dp_\alpha$$

$$\dot q^\alpha dp_\alpha - \dot p_\alpha dq^\alpha = \dots$$

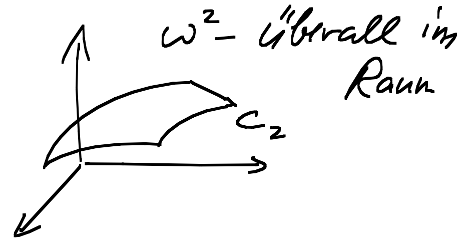
✓ (Ham.-Gl.-en folgen durch Koeffizientenvergleich)

M9 Integration von Diff.formen

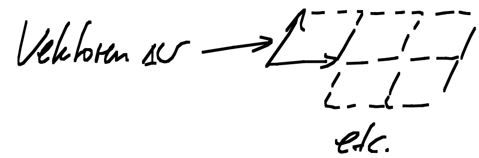
$$\int_{C_p} \omega^p = \text{Zahl} \quad (= \text{natürliche Def. eines räuml. Integrals})$$

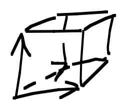
$C_p \leftarrow$ p-dim. Hyperfläche in d Raumdimensionen $(d \geq p)$

Erklärung:



- Zerlege Hyperfläche in kleine Parallelepipede:



(analog  etc.)

$$\Rightarrow \int_{C_p} \omega^p = \lim \sum_{\substack{\text{Parall.}\\ \text{epipede}}} \underbrace{\omega^p(\Delta v_1, \dots, \Delta v_p)}$$

- Entscheidend ist die Koordinatenunabhängigkeit dieser Definition.

Wichtig: Für $p = d$ & "$\omega = \varepsilon$" ist dies gerade das Volumen und wir bekommen insgesamt das Volumen des Raumes.

- Wir können aber Koordinaten wählen und z.B. $(d = p = 2)$ $v_1 = \Delta x^1 \frac{\partial}{\partial x^1}$; $v_2 = \Delta x^2 \frac{\partial}{\partial x^2}$.

$$\Rightarrow \int \omega = \lim \sum \omega_{12} \Delta x^1 \Delta x^2 = \underbrace{\int \omega_{12}\, dx^1 dx^2}_{\substack{\text{gewöhnliches}\\ \text{2-fach-Integral}}}$$

- In anderen Koordinaten folgt entsprechend

$$\int \omega'_{12}\, dx'^1\, dx'^2 .$$

- Außerdem: $\quad \omega'_{i_1 \dots i_p} = \left(\frac{\partial x^{j_1}}{\partial x'^{i_1}}\right) \cdots \left(\frac{\partial x^{j_p}}{\partial x'^{i_p}}\right) \omega_{j_1 \dots j_p}$

Wie beim Vektor nur "umgedreht".

- Für p-Form in p Dimensionen ist stets $\omega = \varepsilon \cdot f(x)$ ← Bel. Fkt.

Also für $p = d$:

$$\omega'_{i_1 \dots i_d} = \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^j}\right) \omega_{i_1 \dots i_d}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\int dx^1 \dots dx^n\, f(x^1, \dots, x^n) = \int dx'^1 \dots dx'^n \underbrace{\left|\det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)\right|}_{\text{"Jacobian"}} f\left(x^1(x'^1 \dots x'^n), \dots\right)}$$

<u>Begründung</u>: $\int dx^1 \dots dx^n f = \int dx^1 \dots dx^n\, \omega_{1\dots n} = \pm \int \omega = \pm \int dx'^1 \dots dx'^n\, \omega'_{1\dots n} = \dots$

mit $\omega_{i_1 \dots i_n} = f \cdot \varepsilon_{i_1 \dots i_n}$

koord.-unabhäng. n-Form-Integral

$$\dots = \pm \int dx'^1 \dots dx'^n \det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right) \omega_{1\dots n} =$$

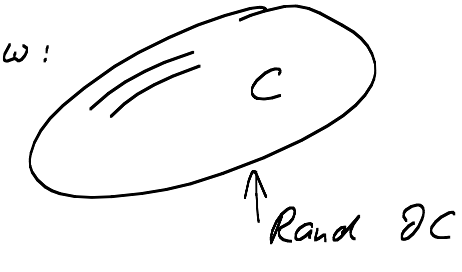
$$\dots = \pm \int dx'^1 \dots dx'^n \det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right) \cdot f$$

Um hier das Vorzeichen zu "kontrollieren" müssten wir über Orientierung, also "Reihung" der x^i bzw. x'^i reden...

<u>Des Weiteren:</u> <u>Allg. S. v. Stokes:</u>

$$\boxed{\int_C d\omega = \int_{\underbrace{\partial C}_{\text{Rand von } C}} \omega}$$

Mit 1-Form ω:



M9