9 Kanonische Transformationen, Integrabilität, Chaos

9.1 Kanonische Trf.-en

- Die Lagrange-Formulierung der Mechanik ist invariant unter "Punkttransformationen":

$$q \longrightarrow Q(q) \quad ; \quad L(q,\dot q,t) \longrightarrow L'(Q,\dot Q,t).$$

"Reparametrisierung des Konfigurationsraums"

(Wir könnten auch $Q(q,t)$ zulassen, tun dies aber zur Vereinfachung nicht.)

- L' ist definiert durch die naheliegende Forderung
$L'(Q(q), Q(q)^{\cdot}, t) = L(q,\dot q, t)$.

- Man prüft leicht nach: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot Q} - \frac{\partial L'}{\partial Q} = 0$.

- Das Analogon der Hamiltonmechanik sind die Kanon. Trf.-en,

$$q, p \longrightarrow Q(q,p), \; P(q,p),$$

welche wegen der Aufteilung in Koord.-en & Impulse etwas komplizierter zu definieren sind.

- Wir verlangen nämlich, dass

$$\boxed{\omega \equiv dp_i \wedge dq^i = dP_i(q,p) \wedge dQ^i(q,p)}$$

("Kan. Trf.-en respektieren die sympl. Struktur und damit die Poiss.-Klammer & Ham.-Gl.-en")

- Wir starten mit einer (beliebigen) erzeugenden Funktion $F_2(q,P)$.

(Es gibt auch äquivalente Definitionen durch $F_1(q,Q)$, $F_3(p,Q)$, $F_4(p,P)$ auf die wir aus Zeitgründen nicht eingehen. Sie sind alle durch Legendre-Trf.-en verbunden. Außerdem könnten wir auch $F_2(q,P,t)$ etc. zulassen, tun es aber nicht.)

- Wir definieren: $\underbrace{p = \frac{\partial F_2(q,P)}{\partial q} \quad ; \quad Q = \frac{\partial F_2(q,P)}{\partial P}}$

$$\Rightarrow Q = Q(q,p) \; ; \; P = P(q,p) \quad \text{(im Prinzip)}$$

- Wir prüfen: $dF_2 = \frac{\partial F_2}{\partial q} dq + \frac{\partial F_2}{\partial P} dP = p dq + Q dP$

$d^2 = 0 \Rightarrow \quad 0 = dp \wedge dq + dQ \wedge dP \Rightarrow dp \wedge dq = dP \wedge dQ$ ✓

- Wir stellen fest: $\boxed{F_2(q,P) = q \cdot P \text{ generiert die Identität:}}$

$$p = P \; ; \; Q = q$$

- Des Weiteren betrachten wir insbesondere "kleine" Trf.-en, also

$$F_2(q,P) = q \cdot P + \varepsilon \cdot G(q,P)$$

↑ "infinitesimaler Parameter"

$$\Rightarrow p = P + \varepsilon \underbrace{\frac{\partial G(q,P)}{\partial q}}_{P \to p} \; ; \; Q = q + \varepsilon \underbrace{\frac{\partial G(q,P)}{\partial P}}_{P \to p} \quad (\text{Fehler ist } O(\varepsilon^2)!)$$

$$\Rightarrow \Delta p = P - p = -\varepsilon \frac{\partial G(q,p)}{\partial q} = \varepsilon \{p, G\}$$

$$\Delta q = Q - q = \varepsilon \frac{\partial G(q,p)}{\partial p} = \varepsilon \{q, G\}$$

Wir sehen: Die infinites. kanon. Trf. entspricht der durch G (mittels Poiss.-Klammer) auf dem Phasenraum induzierten Bewegung.

9.2 Integrabilität

Ein System mit n Freiheitsgraden heißt integrabel, wenn es n unabhängige Erhaltungsgrößen f_i $(i = 1 \dots n)$ gibt, deren Poissonklammern verschwinden: $\{f_i, f_j\} = 0$

- "Unabh." heißt, dass die df_i an jedem Pkt. p des Phasenraumes M lin. unabhängig in T_p^*M sind.

- Die Bedeutung des Begriffs der Integrabilität folgt daraus, dass sich für solche Systeme stets eine kanon. Trf. finden lässt, so dass $P_i = f_i$ die neuen kanon. Impulse sind.

- Die Notwendigkeit von $\{f_i, f_j\}_{p,q} = 0$ sieht man sofort: Es folgt aus $\{P_i, P_j\}_{P,Q} = 0$ zusammen mit der Tatsache, dass kanon. Trf.-en die Poiss.-klammer respektieren.

- Wegen $\dot{P}_i = -\partial H / \partial Q_i$ sind alle Q_i zyklisch. Die P_i sind konstant. Die Bewegung ist also sehr einfach:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H(P)}{\partial P_i} = \text{const.}_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_i = Q_i^0 + t \cdot \frac{\partial H(P)}{\partial P_i}}$$

- <u>Beispiele integrabler Systeme:</u>

  - 1-dim. Bewegung: $n = 1$, 1 Erhaltungsgröße: H
  - 2-Körper-Problem: $n = 6$, 6 Erhaltungsgrößen: $H, \bar{P}, L_z, \bar{L}^2$

    (nicht L_x, L_y, L_z, weil $\{L_x, L_y\} \neq 0$ etc.)

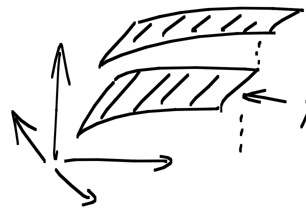
- <u>Zur expliziten Durchführung der Trf.:</u>

- Gegeben n Erh.-größen $f_i(q,p)$ definieren wir $P_i = f_i(q,p)$ und lösen nach den p_i auf:

$$p_i = p_i(q, P).$$

- Jetzt betrachten wir unseren Phasenraum als "Schichtung", wobei jede Schicht durch Konstanz aller P_i definiert ist:

"n = 2 Bild":



$\leftarrow P_1, P_2$ const. (= Schicht Σ)

– In jeder Schicht (und damit auch global) definieren wir

$$F_2(q,P) = \int_{\{q_{(0)}^i\}}^{\{q\}} dq'^i \cdot p_i(q',P)$$

(Linienintegral)

– Dieses Linienintegral ist nach Stokes wegunabhängig, weil

$$d\,(dq^i p_i)\Big|_\Sigma = dp_i \wedge dq^i\Big|_\Sigma = \omega\Big|_\Sigma = 0$$

wegen $\{P_i, P_j\} = 0$ liegen die den P's entsprechenden Vektorfelder alle in den Σ's und spannen deren Tangentialraum aus Dim.-gründen auf.

$\omega(P_i, P_j) = \{P_i, P_j\} = 0$ impliziert also $\omega|_\Sigma = 0$.

– Wir können den Weg also beliebig wählen, also insbesondere z.B. auch so, dass das letzte Stück parallel zu k-Achse ist.

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial F_2}{\partial q^k} = \frac{\partial}{\partial q^k} \int^{q^k} dq^{k\prime}\, p_k(q^1 \ldots q^{k\prime} \ldots q^n, P) = p_k\,.$$

– Damit haben wir gezeigt, dass F_2 "das richtige" generierende Funktional ist.

– Wir definieren $Q^i = \dfrac{\partial F_2}{\partial P_i}$ und sind fertig.

Fakt: (Theorem, "Liouville/Arnold") Falls die Σ's kompakt & zsgh. sind, so sind sie Tori (also $\Sigma \sim T^n \sim (S^1)^n$).

9.3 Chaos

Betrachte Bewegung eines kleinen sphärischen Volumens im Phasenraum:

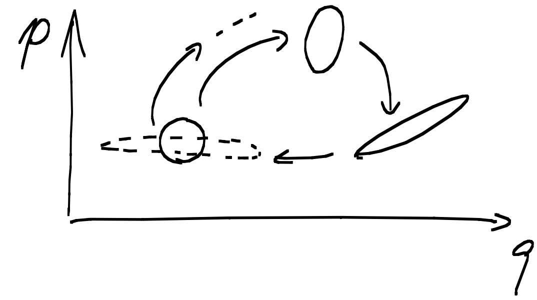
$$V(t=0) \sim r^{2n} \longrightarrow V(t \neq 0) = V(t=0)$$

(Liouville)

Kugel: (Radius r) $\longrightarrow$ Ellipsoid: (Halbachsen a_i)

(dies gilt nur im Grenzwert $r \to 0$ bei festem t)

• Gesamtbild:



Da diese Dynamik von Dgl.-en 1. Ordnung beschrieben wird, ist schnellstmögliche Wachstum von Abständen exponentiell:

$$a_i(t) \sim e^{\lambda_i t} r$$

(für kleine r)

• Die hierbei auftretenden λ_i heißen "Lyapunov-Exponenten".

• Genauere Definition: $\lambda_i = \lim_{t \to \infty} \lim_{r \to 0} \frac{1}{t} \ln \left(\frac{a_i(t)}{r} \right)$

• Wegen des Satzes v. Liouville gilt:

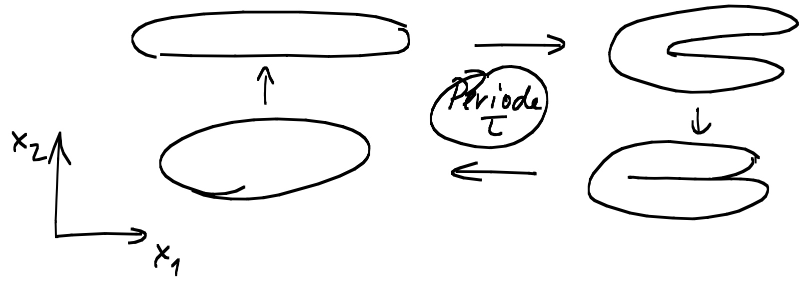
$$\prod_{i=1}^{2n} \left(e^{\lambda_i t} r \right) = r^{2n} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{2n} \lambda_i = 0$$

• Für integrable Systeme ist nur lineares Wachstum möglich (weil $P_i = \text{const.}$, $\dot{Q}_i = \text{const.} \Rightarrow Q_i = t \cdot \text{const.} + Q_i^0$)

$\Rightarrow \lambda_i = 0$ für $i = 1 \cdots 2n$ (weil $\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \ln t = 0$).

- Chaotische Systeme sind dadurch definiert, daß für mindestens ein i gilt: $\lambda_i > 0$

- Da der Fall $n=1$ stets integrabel ist, kann man kein anschauliches Beispiel im 2-dim. Phasenraum geben. Ein etwas künstliches Beispiel (keine echte hamiltonsche Dynamik) liefert die "Bäcker-Transformation"



(Volumen bleibt erhalten)

Berechne horizontalen Abstand zweier benachbarter Punkte (Abstand r bei $t=0$) nach N Perioden:

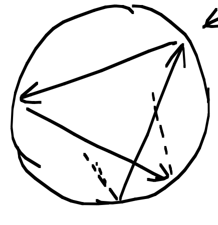
$$a_1 = 2^N r = 2^{t/\tau} r$$

$$\lambda_1 = \lim_{t\to\infty} \lim_{r\to 0} \frac{1}{t} \ln\left(\frac{2^{t/\tau} r}{r}\right) = \frac{1}{\tau} \cdot \ln 2 > 0$$

$\Rightarrow$ Chaos

- anderes Beispiel: "Billiard"

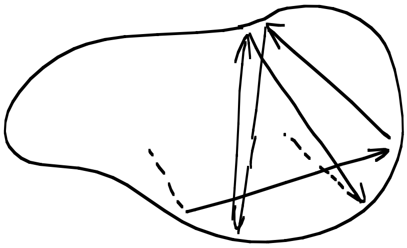
rundes Billiard.



jeweils perfekte Reflexion

H, L erhalten $\Rightarrow$ integrabel

allgemeines Billiard



nur H erhalten; i.A. Chaos