

# Theoretische Physik 3 - Klassische Elektrodynamik (WS 22/23)

Arthur Hebecker

## TP 3: Klassische Elektrodynamik

### 1. SRT-Kinematik

1.1. Galilei-Transformationen – Erinnerung	S. 3
1.2. Lorentz-Transformationen – Herleitung 1	S. 7
1.3. Die Lorentz- u. Poincaré-Gruppe	S. 9
1.4. Lorentz-Transformationen – Herleitung 2	S. 13
1.5. Lorentz-Transformation – Herleitung 3	S. 14
1.6. Lorentz-Transformation – Herleitung 4	S. 17
1.7. Zusammenfassung	S. 19

### 2. SRT-Dynamik

2.1. Wirkung für Massenpunkt	S. 21
2.2. Impuls und Energie	S. 23
2.3. Bewegungsgleichungen	S. 24
2.4. Zerfälle und Streuung	S. 26

### 3. Feldtheorien – grundlegende Konzepte

3.1. „Effektive“ Feldtheorien aus klassischer Mechanik	S. 27
3.2. Relativistisches Skalarfeld	S. 30
3.3. Bewegungsgleichung, Wellen	S. 33

### 4. Elektrodynamik – prinzipielle Struktur

4.1. Teilchen – Vektorpotential – Eichinvarianz	S. 36
4.2. Die Delta-Funktion	S. 40
4.3. Die 4-er Stromdichte	S. 41
4.4. Maxwell-Gleichungen	S. 43
4.5. Übergang zu $\vec{E}$ & $\vec{B}$	S. 46
4.6. Maxwell-Gleichungen in nichtrelativistischer Form	S. 48
4.7. Integralform der Maxwell-Gleichungen	S. 53

### 5. Elektrostatik

5.1. Feld von Punktladung(en)	S. 55
5.2. Methode der Greenschen Funktion	S. 58
5.3. Greensche Formeln	S. 60
5.4. Greensche Methode für Gebiete mit Rand	S. 60
5.5. Spiegelladungen	S. 64
5.6. Multipol-Entwicklung: Kartesisch	S. 68

### 6. Vollständige Funktionssysteme und die sphärische Multipolentwicklung

6.1. Fourier-Reihe	S. 72
6.2. Fourier-Transformation	S. 75
6.3. Greensche Funktion im Fourier-Raum	S. 78
6.4. Fourier-Reihe und Polarkoordinaten	S. 79
6.5. Kugelflächenfunktionen	S. 81
6.6. Poisson-Gleichung in Kugelkoordinaten und sphärische Multipolentwicklung	S. 83
6.7. Greensche Funktion in Kugelkoordinaten und sphärische Multipolentwicklung	S. 86

## 7. Magnetostatik

7.1. Grundgleichungen, Poisson-Gleichung für Vektor-Potential	S. 88
7.2. Helmholtz-Theorem	S. 90
7.3. Magnetische Multipolentwicklung und Dipolmoment	S. 93
7.4. Dünne Leiter und Biot-Savart	S. 96
7.5. Beispiele	S. 97

## 8. Elektrisch-Magnetische Dualität

8.1. Dualität ohne Ladungen	S. 99
8.2. Dualität und Ladungen	S. 101
8.3. Dualität und Wirkung	S. 104

## 9. ED in Differentialformen

9.1. Tangentialraum und Vektorfelder	S. 108
9.2. Cotangentialraum und 1-Formen	S. 115
9.3. Höhere p-Formen	S. 117
9.4. Integration von p-Formen	S. 121
9.5. Wirkung der ED und Maxwell-Gleichungen	S. 124

## 10. Dynamik geladener Teilchen und Energie-Impuls-Erhaltung

10.1. Bewegungsgleichungen für Teilchen im Feld	S. 129
10.2. Beispiel: Homogene Felder	S. 131
10.3. Energie-Impuls-Tensor eines Teilchenstroms	S. 134
10.4. Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes	S. 137

## 11. Elektromagnetische Wellen

11.1. Relativistische Herleitung	S. 140
11.2. Polarisation und Feldstärken	S. 143
11.3. Nichtkovariante Herleitung der Wellengleichung	S. 147

## 12. Felder bewegter Ladungen

12.1. Relativistische Greensche Funktion	S. 148
12.2. Residuensatz	S. 153
12.3. Relativistische Greensche Funktion – Fortsetzung	S. 157
12.4. Feld einer bewegten Punktladung	S. 161
12.5. Felder einer geradlinig bewegten Ladung	S. 163
12.6. Dipol-Strahlung	S. 164

## 13. Felder in Materie

13.1. Dielektrische Verschiebung und magnetische Erregung	S. 169
13.2. Maxwell-Gleichungen in Materie	S. 173
13.3. Wellen in Materie	S. 180
13.4. Brechung und Reflexion	S. 183

## TP3: Klass. Elektrodynamik

→ [www.thphys.uni-heidelberg.de/~hebecker](http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~hebecker)

→ Lectures

### Motivation:

- Fast alles, was uns umgibt, braucht zum Verständnis nur Kerne + Elektronen (als geladene Part.-Teilch.) + EM-Felder
- Natürlich ist bei kleinen Abst. die Beschreibung quant.-med. → nächstes Sem.
- Aber: Die klass. Theorie der EM-Felder & gelad. Teilch. ist grundlage sowohl der späteren quant.-med. Analyse als der angenähert klass. Phänomene auf makrosk. Skalen
- Also: Die TP3 legt die Grundlage für das Verständnis (fast) der gesamten Welt — mikroskopisch & makroskopisch.

## Grober, vorläufiger Plan

- Spezielle Relativitätstheorie
- Feldtheorie (frühd idee)
- die Elektrodynamik als Eichtheorie  
(prinzipielle Struktur)
- $\rho$ -Formen
  - Kopplung an Teilchen
  - Maxwell-Gleichungen
- Elektrostatik
- Multipolentwicklung / Funktionensysteme
- Magnetostatik, Dualität
- El.-mag. Wellen, Cauchy-Problem
- Abstrahlung, Feld bewegter Ladungen
- Feld in Festkörpern
- Optik

# 1 SRT - Kinematik

- Die ED ist zutiefst mit der speziell-relativist. Kovarianz verbunden (sowohl historisch als auch konzeptionell)
- Ein gutes Verständnis der SRT erlaubt eine mühelose Herleitung der Maxwell-Gleichungen

## 1.1 Galilei-Trf.-en - Erinnerung

$$\text{Raumzeit} = \mathbb{R}^4 \ni \begin{pmatrix} t \\ \bar{x} \end{pmatrix}; \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \{x^i\}$$

### Galilei-Trf.-en

$$(1) \text{ Rotationen: } \begin{pmatrix} t \\ \bar{x} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} t \\ R\bar{x} \end{pmatrix}; \quad R \in O(3)$$

d.h.  $R$  ist orthogonal

$$(2) \text{ Translationen: } \begin{pmatrix} t \\ \bar{x} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} t+s \\ \bar{x} + \bar{y} \end{pmatrix}$$

$$s \in \mathbb{R}; \quad \bar{y} \in \mathbb{R}^3$$

$$(3) \text{ Boosts: } \begin{pmatrix} t \\ \bar{x} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} t \\ \bar{x} + \vec{v}t \end{pmatrix}; \quad \vec{v} \in \mathbb{R}^3$$

## Bemerkung

Es liegt nahe,  $\mathbb{R}^4$  als Vektorraum zu sehen. Denn ist (2) "unnatürlich", weil es nicht die Sonderstellung der Null im Vektorraum respektiert. Math. saubere

Lösung: Die phys. Raumzeit ist kein Vektorraum sondern nur ein "affiner Raum"  $\rightarrow$  TP1. Für uns: Es wird

bequem sein, (2) weitestgehend zu ignorieren und (1), (3) als Trf.-en auf Vektorraum zu sehen. Phys. heißt das:

Wir schränken uns auf Koord.-systeme ein, die bei  $t=0$  ihren Ursprung bei  $\bar{x}=0$  haben. (Wenn nötig, kann man Verschiebungen leicht wieder zulassen.)



- Wir betrachten also die linearen Trf.-en

$$\begin{pmatrix} t \\ \bar{x} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} t \\ R\bar{x} + \bar{v}t \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} t \\ \bar{x} \end{pmatrix} \text{ mit } G = \left( \begin{array}{c|c} 1 & \bar{0}^T \\ \hline \bar{v} & R \end{array} \right)$$

4x4-Matrix in Block-Form mit  
 $\bar{0}^T \equiv$  "Zeilenvektor Null".

(Zeigen Sie, dass solche  $G$  eine Gruppe bilden!)

- Bekannt: galilei-fr. ist Symm.-fr. der Newtonschen Mechanik, d.h.:

phys. Prozess  $\xrightarrow{G}$  phys. Prozess  
 (erfüllt wieder Bew.-gl.-en)

- Obiges ist die aktive Sicht auf Symmetrien. Ebenso nützlich ist die passive Sicht:

- Beschreibe Dynamik in Koord.-Systemen  $k$  &  $k'$ , die durch galilei-Trf. verbunden sind (Inertialsysteme)

- Symm. heißt: Phys. Gesetze haben in  $k$  &  $k'$  gleiche math. Form.

- Fokussiere jetzt auf passive Sicht.
- $K'$  gehe aus  $K$  durch Drehung  $R$  & Boost  $\vec{v}$  hervor. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} t' \\ \vec{x}' \end{pmatrix} = G^{-1} \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} \text{ mit } G = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{v} & R \end{pmatrix}.$$

- können durch Umbenennung  $G^{-1}$  wieder in Form  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vec{v} & R \end{pmatrix}$  bringen, so dass

in  $K$ :  $\begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix}$  ; in  $K'$ :  $\begin{pmatrix} t' \\ \vec{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ R\vec{x} + \vec{v}t \end{pmatrix}$

- Betrachte nun Trajektorie (Weltlinie in  $\mathbb{R}^4$ )  $\begin{pmatrix} t \\ \vec{x}(t) \end{pmatrix}$  mit  $\dot{\vec{x}}(0) = \vec{a}$

- Wende einen Boost ( $R = 1, \vec{v}$ ) auf

$K$  an  $\Rightarrow \begin{pmatrix} t' \\ \vec{x}'(t') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \vec{x}(t) + \vec{v}t \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \dot{\vec{x}}'(0) = \vec{a} + \vec{v}$

$\Rightarrow$  Jede f.s.d.w. ändert sich!

## 1.2 Lorentz-Transf.-en (Herleitung 1)

- Exp. Fakt: Lichtgeschw.  $c$  in allen Inertialsystemen gleich.
- D.h.: Licht ist weder "Welle auf Äther" noch "von der Quelle mit  $c$  abgeschossenes Objekt a la Galilei". Sondern:

Die Regeln für Trf.  $K \rightarrow K'$  sind so zu ändern, dass zwei Ereignisse ( $\equiv$  R.-Z.-Punkte), die in  $K$  lichtartig getrennt sind, dies auch in  $K'$  sind.

- Lichtartig getrennt: Lichtstrahl von  $\bar{x}_1, t_1$  trifft bei  $\bar{x}_2$  zur Zeit  $t_2$  ein.

Also mit  $\Delta \bar{x} = \bar{x}_2 - \bar{x}_1$ ,  $t = t_2 - t_1$ :

$$|\Delta \bar{x}| = c \Delta t \Rightarrow |\Delta \bar{x}'| = c \Delta t'$$

Oder:

$$-c^2 \Delta t^2 + \Delta \bar{x}^2 = 0 \Rightarrow -c^2 \Delta t'^2 + \Delta \bar{x}'^2 = 0$$

- Um dies besser zu formulieren, führen wir 4-er-Vektoren ein:

$$x = \{x^\mu\} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix} \text{ mit } x^0 = ct.$$

$[\mu, \nu, \dots \in \{0, \dots, 3\}]$

- Noch besser: Wir setzen  $c = 1$ .

(Miss  $t$  in "m". D.h. die Zeit "1m" ist die Zeit, die Licht braucht, um 1m zurückzulegen.)

- Also:  $x$  ist lichtartig von 0 getrennt, falls  $x^2 \equiv -(x^0)^2 + \vec{x}^2 = 0$ .

[Vorsicht: Die Konvention  $x^2 \equiv (x^0)^2 - \vec{x}^2$  ist auch weit verbreitet.]

- Def.-en:  $x^2 < 0 \Rightarrow$  "zeitartig"  
 $x^2 > 0 \Rightarrow$  "raumartig"

- Wir haben schon gesehen:

$$x \rightarrow x' = Gx \quad (\text{d.h. } x'^\mu = G^\mu_{\nu} x^\nu)$$

mit Lorentz-Matrix  $G$  erfüllt die

Forderung  $x^2 = 0 \Rightarrow x'^2 = 0$  nicht.

• gesucht: Alle Matrizen  $\Lambda$ , für die gilt  
 $x^2 = 0 \Rightarrow x'^2 = 0$  (für  $x' = \Lambda x$ ).

• Einfacher zu implementieren:

Fordere stärkere Bedingung  $x'^2 \equiv (\Lambda x)^2 = x^2$ .

• Dies könnte einige der im Prinzip erlaubten Trf.-en (3 Rot. + 3 Boosts) ausschließen.

• Aber: Wir werden sehen, dass der Raum der  $\Lambda$ 's, die obigen erfüllen, 6-dim. ist. Also haben wir nichts "verloren" und die Forderung  $(\Lambda x)^2 = x^2$  ist nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig.

### 1.3 Die Lorentz- u. Poincaré-Gruppe

Erinnerung an  $O(3)$ :

Def. 1: alle  $R$  mit  $(R\bar{x})^2 = \bar{x}^2$  ( $\forall \bar{x}$ )

(Rang 2 Tensor)  $\xrightarrow{(\bar{x}^2 = x^i x^j \delta_{ij})}$  "Metrik".

(allgemeiner:  $\bar{x}^2 \equiv x^i x^j g_{ij}$ )

allg., nicht unbedingt eukl. Metrik

Def. 2: alle  $R$  mit  $\delta_{ij} R^i_k R^j_l = \delta_{kl}$

Jetzt: Lorentz-Gruppe  $O(1,3)$

Def. 1: alle  $\Lambda$  ( $4 \times 4$ ) mit

$$(\Lambda x)^2 = x^2 \quad (4x)$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ \equiv \Lambda^\mu_\nu x^\nu & \equiv & x^\mu \end{array}$$

Entscheidend:  $x^2 \equiv (x^0)^2 + \bar{x}^2$

$$= x^\mu x^\nu \eta_{\mu\nu}$$

Lorentz-Metrik

$$\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$$

Def. 2: alle  $\Lambda$  mit  $\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta = \eta_{\alpha\beta}$

Erinnerung:

$\{x^i\} \in V$  (analog  $\{t^{ij}\} \in V \otimes V$  etc.)

$\{x_i\} \in V^*$  (---  $\{t_{ij}\} \in V^* \otimes V^*$  etc.)

↑

Dualraum

$g_{ij}$  - Metrik auf  $V$

$g^{ij}$  (= inv. Matrix) - Metrik auf  $V^*$

$g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k$  (auch wenn  $g_{ij} \neq \delta_{ij}$ )

Entscheidend: Können mit Metrik

Judizes heben & senken, z.B.

$t_{ij} = g_{ik} g_{je} t^{ke}$  etc.

Weitere Erinnerung: Zu einer (Lie-)Gruppe

$G$  gehört die Lie-Algebra  $\text{Lie}(G)$ , z.B.

$R = \exp(\varepsilon T)$   $i \in \mathbb{R}$

⌞

⌞

$O(3)$

$\text{Lie}(O(3))$

Für  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$RR^T = \underline{1} \Rightarrow (\underline{1} + \varepsilon T)(\underline{1} + \varepsilon T)^T = \underline{1} + O(\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow T + T^T = 0 \Rightarrow T \text{ antisymm.}$$

$$\Rightarrow \dim(O(n)) = (n^2 - n) / 2$$

alle  $\uparrow$  ohne  
Diagonale  $\uparrow$   
Antisymm.  $\uparrow$



Zurück zur Lorentz-fr.

$$\Lambda = \exp(\varepsilon M)$$

$$\eta_{\mu\nu} (\underline{1} + \varepsilon M)^\mu_\sigma (\underline{1} + \varepsilon M)^\nu_\sigma = \eta_{\sigma\sigma} + O(\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow \eta_{\mu\nu} M^\mu_\sigma \delta^\nu_\sigma + \eta_{\mu\nu} \delta^\mu_\sigma M^\nu_\sigma = 0$$

$$\Rightarrow M_{\sigma\sigma} + M_{\sigma\sigma} = 0 \Rightarrow M \text{ antisymm.}$$

(Wenn beide  
Indizes unten)

$$\Rightarrow \dim(O(1, n-1)) = (n^2 - n) / 2, \quad \dim O(1, 3) = 6$$



$\Rightarrow$  3 Rot. + 3 Boosts

$\Rightarrow$  Unsere Bedingung  $x'^2 = x^2$  ist auch notwendig (d.h.  $O(1,3)$ , wie oben definiert, enthält alle Tvf.-en, die die Lichtartigkeit respektieren)

### 1.4 Lorentz-Tvf.-en — Herleitung 2

- Wir lassen das Argument für  $\{x^2 = 0 \Rightarrow x'^2 = 0\}$  bestehen, so wie bei "1.2".
- Aber jetzt erlauben wir zunächst, dass, für  $x^2 \neq 0$ , auch  $x'^2 \neq x^2$  sein kann:

$$\Rightarrow x'^2 = f(\vec{v}^2) x^2 \quad (\text{wegen Linearität der Tvf.})$$

$\vec{v} \equiv$  "Boost-fachw."

(Wegen Äquivalenz aller Boost-Richtungen, nur Abhängigkeit von  $\vec{v}^2$  möglich.)

Wiederhole Tr.f.:  $x \rightarrow x' \rightarrow x''$

$$\Rightarrow x''^2 = f(\bar{v}_2) f(\bar{v}_1) x^2; \text{ Wähle } \bar{v}_2 = -\bar{v}_1$$

$$\Rightarrow f(\bar{v}^2)^2 = 1 \Rightarrow f(\bar{v}^2) = 1$$

("-1" ausgeschlossen wegen  
mögl. Limes  $\bar{v} \rightarrow 0$ )

### 1.5 Lorentz-Tr.f. — Herleitung 3

(vgl. Bertalanoni Skript)

- Betrachte 1+1-dim. Welt mit  
Koord.  $x^0 = t$  &  $x^1$  (Ergänzung um  $x^2, x^3$   
einfach)
- $x^2 = -(x^0)^2 + (x^1)^2 = -\underbrace{(x^0 + x^1)}_{\equiv x^+} \underbrace{(x^0 - x^1)}_{\equiv x^-} = -x^+ x^-$
- Zentrale Forderung:  $x^+ x^- = 0 \Rightarrow x^{+1} x^{-1} = 0$   
Also:  $x^+ \text{ od. } x^- = 0 \Rightarrow x^{+1} \text{ od. } x^{-1} = 0$
- Wegen Kontinuität bei  $\bar{v} \rightarrow 0$  (wie oben)  
impliziert dies  $x^+ = 0 \Rightarrow x^{+1} = 0$   
&  $x^- = 0 \Rightarrow x^{-1} = 0$ .

$$\Rightarrow x^{+'} = f^{+}(v)x^{+}; \quad x^{-'} = f^{-}(v)x^{-} + \cancel{g \cdot x^{+}}^{15}$$

mit ↑ Linearität      ↑ nur Zahl:  $v \equiv v^1$       ↑ verboten!

• Verknüpfte um:

Boost mit  $v$ ; Spiegelung  $x^1 \rightarrow -x^1; \dots$

$\dots$ ; Boost mit  $v$ ; Spiegelung  $x^1 \rightarrow -x^1$

Das Ergebnis ist offensichtlich die Identität, da sich die beiden Boosts gerade aufheben.

$$\Rightarrow f^{+}(v)f^{-}(v) = 1$$

$$\Rightarrow x^{+'} = g(v)x^{+}; \quad x^{-'} = \frac{1}{g(v)}x^{-}$$

$$(g(v) \equiv f^{+}(v))$$

• Wir sehen:  $x^{+}x^{-}$  invariant, wie auch schon bei Kerl. 1 & 2.

• Aber: wir können jetzt noch expliziter werden:

$$x^{11} = \frac{1}{2}(x^{+'} - x^{-'}) = \frac{1}{2}\left(gx^{+} - \frac{1}{g}x^{-}\right) = \dots$$

$$\dots = \frac{1}{2} \left( \gamma - \frac{1}{\gamma} \right) x^0 + \frac{1}{2} \left( \gamma + \frac{1}{\gamma} \right) x^1$$

- Der Pkt.  $x'' = 0$  ist der Ursprung von  $k'$  und bewegt sich demnach in  $k$  mit Geschw.  $v$ , also:

$$0 = \left( \gamma - \frac{1}{\gamma} \right) x^0 + \left( \gamma + \frac{1}{\gamma} \right) v x^0$$

$$\Rightarrow \gamma = \sqrt{\frac{1-v}{1+v}}$$

$$\Rightarrow \gamma + \frac{1}{\gamma} = \frac{2}{\sqrt{1-v^2}} \quad ; \quad \gamma - \frac{1}{\gamma} = \frac{-2v}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 - v x^1 \\ -v x^0 + x^1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

- Wenn wir unser spezielles System mit  $c=1$  aufgeben, so wird daraus:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct - \beta x \\ -\beta ct + x \end{pmatrix} \cdot \gamma \quad \text{mit} \quad \beta \equiv v/c$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

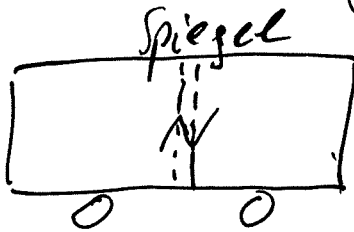
oder

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}$$

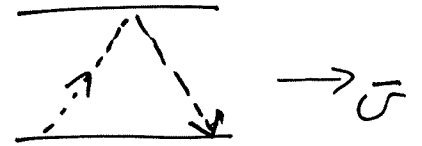
# 1.6 Lorentz - Trf. - Herleitung 4

## Aufgabe A:

Lichtstrecke im  
Eisenbahnwaggon:



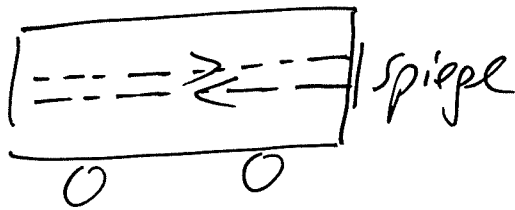
... im bewegten  
Waggon



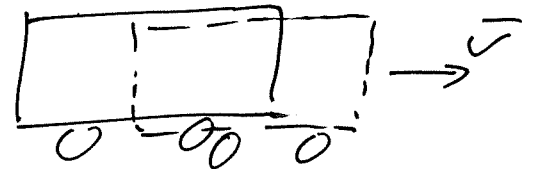
vgl.  
⇓

Zeitdilatation:  $\Delta t' = \Delta t / \gamma$   
(siehe Üb.aufgaben)

## Aufgabe B:



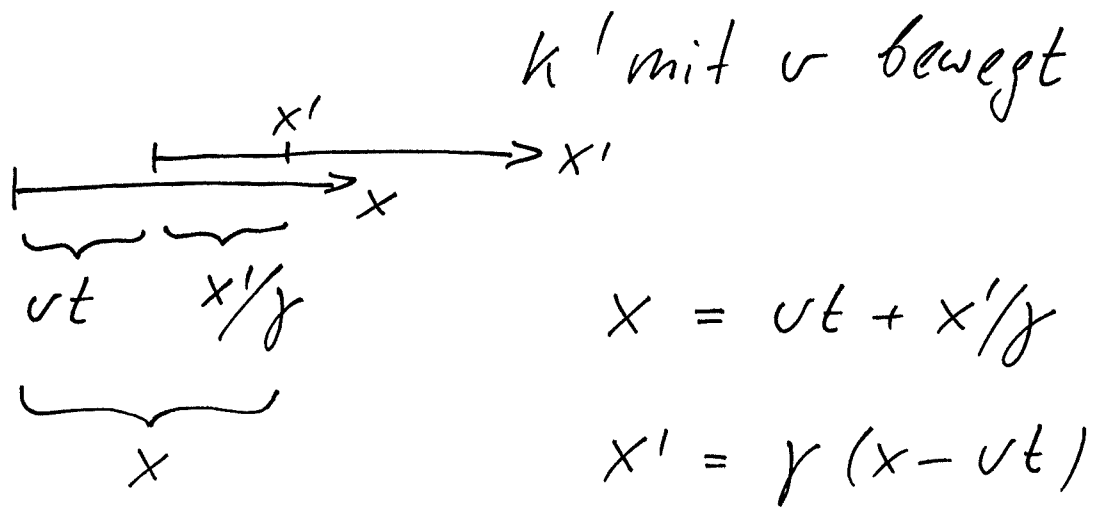
vgl.



⇓

minimal kompliziertere Analyse  
liefert: Längenkontraktion:  $\Delta \tilde{x} = \gamma \Delta x$

Mit diesem Input betrachten wir jetzt  
einen gemessenen Ph.  $t', x'$  in einem  
geboosteten System  $k'$  (in  $d=2$ ):



- Betrachte Situation jetzt aus  $k'$   
 $\Rightarrow$  gleiche Formel, aber mit  
 $x, t \leftrightarrow x', t'$  und  $v \rightarrow -v$ .

• Also:  $x' = -vt' + x/\gamma$

$$t' = \frac{1}{v} \left( \frac{x}{\gamma} - \underset{\substack{\uparrow \\ \gamma(x-vt)}}}{x'} \right)$$

$$t' = \frac{1}{v} \left( x \left( \frac{1}{\gamma} - \gamma \right) + \gamma vt \right)$$

$$t' = \gamma(t - vx)$$

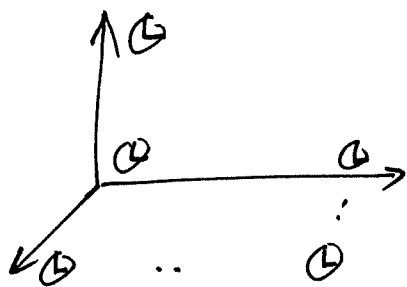
Zusammen und mit  $v \rightarrow \beta$ :

$$t' = \gamma(t - \beta x)$$

$$x' = \gamma(x - \beta t)$$

, wie oben.  $\checkmark$

Achtung: Ein System (kod.  $K'$ ) ist immer ein Koord. system  $(x, y, z)$  und ein Satz synchronisierter Uhren:



(Aus Sicht eines anderen Systems sind diese nicht mehr synchronisiert.)

Wenn man dies nicht beachtet, kann man zu vielen Paradoxa & Fehlern kommen.

### 1.7 Zus. fassung

- $O(1,3)$  def. durch  $\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta = \eta_{\alpha\beta}$   
(bzw.  $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ )

- $O(3)$  als Untergruppe:  $\Lambda = \left( \begin{array}{c|c} 1 & \vec{0}^T \\ \hline \vec{0} & R \end{array} \right)$

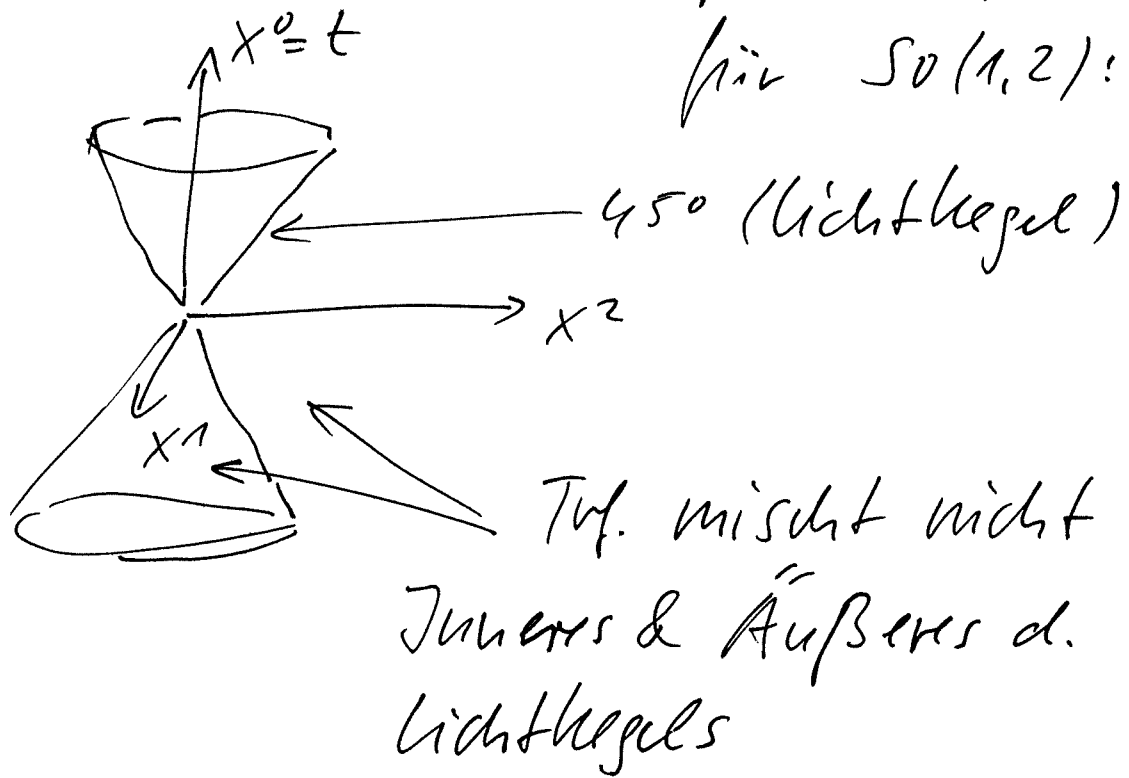
- Boost in 1-Richtung:

(analog f. Boosts  
in 2,3-Richtung)

$$\Lambda = \left( \begin{array}{cc|c} \gamma & -\beta\gamma & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathbb{1} \end{array} \right)$$

• Wirkung auf  $\mathbb{R}^{1,3}$ :  $x \rightarrow \Lambda x$   
 ("Darstellung")

•  $x^2$  inv.  $\Rightarrow$  Licht-/Zeit-/Raumartigkeit  
 wird respektiert, also z.B.



• Extra Bedingung  $\det \Lambda = 1 \Rightarrow SO(1,3)$

• Zus.hangs-komponente der  $\mathbb{1} \Rightarrow SO^+(1,3)$   
 (eigentlich-orthogonale Lorentz-gr.)

hier  $\uparrow$  fehlen insbes.  $P = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{0}^T \\ \mathbb{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$

&  $T = \begin{pmatrix} -1 & \mathbb{0}^T \\ \mathbb{0} & \mathbb{1} \end{pmatrix}$

(& alle Kombinationen  
 mit Elementen von  $SO^+(1,3)$ )



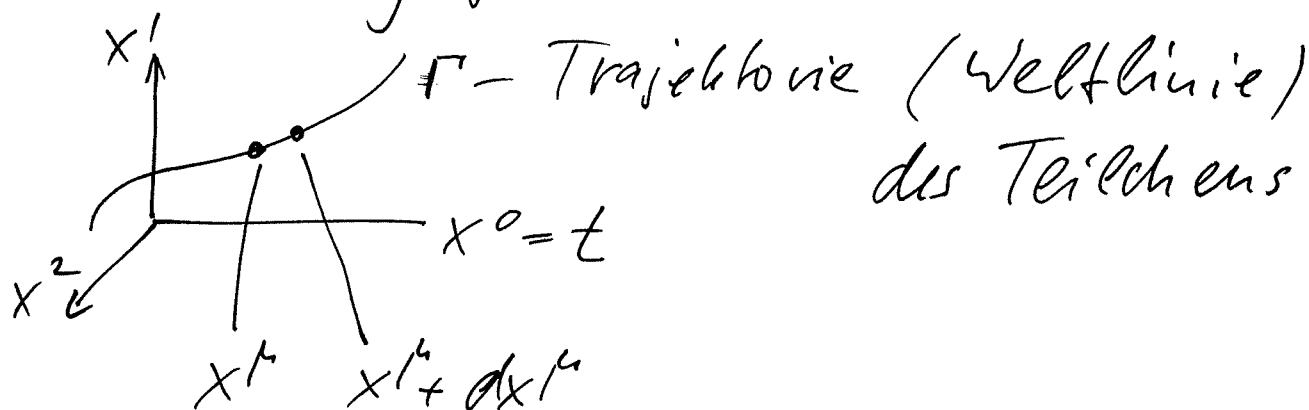
Poincaré-Gruppe:

Alle Tpf. der Form  $x \rightarrow x' = Ax + a$

$\uparrow$                      $\uparrow$   
 $\in O(1,3)$             $\in \mathbb{R}^4$

## 2 SRT - Dynamik

### 2.1 Wirkung für Massenpunkt.



Math. "natürliche" Wirkung?

Länge der Trajektorie! (Natürlich  
gemessen mit Lorentz-Metrik)

$$\Rightarrow S = \alpha \int_{\Gamma} \sqrt{-\Delta x^2} = \alpha \int_{\Gamma} ds; \quad ds = \sqrt{-\Delta x^2}$$

noch  
zu bestimmen

$$\Delta x^\mu \Delta x_\mu = \Delta x^\mu \Delta x^\nu \eta_{\mu\nu}$$

$$\text{auch: } ds = \sqrt{(cdt)^2 - d\vec{x}^2} = cdt \sqrt{1 - \beta^2}$$

- Unser "ds" ist die inv. Länge eines Stückes Trajektorie (Weltlinie).
- Wir können auch  $dt = \frac{ds}{c} = \frac{dt}{\gamma}$  benutzen - dies entspricht offensichtlich der Zeit auf einer mitgeführten Uhr ("Eigenzeit").
- Oder wir benutzen direkt die Koord.-zeit:

$$S = \int L dt = \alpha c \int \sqrt{1 - \beta^2} dt$$

↓ großes c

$$\approx 1 - \frac{v^2}{2c^2}$$

$$\Rightarrow S = \alpha c \int dt \left( 1 - \frac{v^2}{2c^2} + \dots \right)$$

↪ soll mit Newtonscher Mech. konsistent sein

$$\Rightarrow \alpha = -mc$$

$$S = -mc \int_{\Gamma} ds = - \int_{\Gamma} mc^2 d\tau$$

$$= \underbrace{- \int mc^2 \sqrt{1-\beta^2} dt}_{-L} = \int dt \left( \frac{m}{2} \vec{v}^2 - mc^2 + \dots \right)$$

vgl.  $L = T - V$

$\Rightarrow mc^2 \equiv$  Ruheenergie  
des Teilchens

## 2.2 Impuls & Energie

$$p^i = \frac{\partial L}{\partial v^i} = -mc^2 \frac{\partial}{\partial v^i} \sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2} = \frac{mv^i}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$= \gamma m v^i = \gamma m \frac{dx^i}{dt} = m \frac{dx^i}{d\tau}$$

$$E = \vec{p} \cdot \vec{v} - L = m\gamma \vec{v}^2 + mc^2/\gamma = \dots$$

$$\dots = \gamma mc^2 \quad \uparrow \quad \text{check!}$$

Fazit:  $\begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix}$  ist ein "4-er-Vektor", der  
sogenannte "4-er-Impuls"  $p^\mu$ .

Begründung:

$$\begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \gamma c \\ d\vec{x}/d\tau \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} d(ct)/d\tau \\ d\vec{x}/d\tau \end{pmatrix} = m \underbrace{\frac{dx^\mu}{d\tau}}_{\equiv p^\mu}$$

(  $d\tau$  invariant,  
  $dx^\mu$ -Vektor )

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} \equiv u^\mu = \text{"4-er Geschwindigkeit"}$$

$$u^2 = -\gamma^2 c^2 + \gamma^2 \vec{v}^2 = -c^2$$

$$\text{(bzw. für } c=1: u^2 = -1)$$

$$p^2 = -m^2$$

[<sup>↑</sup> oft "+" in Teilch. physik, mit  $\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ ]

### 2.3 Bewegungsgleichungen

$$S = -m \int \sqrt{-dx^\mu dx^\nu \eta_{\mu\nu}}$$

Können Weltlinie durch beliebigen Parameter  $\lambda$  (nicht unbedingt Eigenzeit) parametrisieren und schreiben:

$$S = -m \int d\tau \sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \eta_{\mu\nu}} \quad \text{mit } \dot{x}^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

( $S$  ist "reparametrisierungs-invariant")

Jetzt können wir die  $x^\mu = x^\mu(\tau)$  völlig unabhängig variieren. (Das geht für  $x^\mu = x^\mu(\tau)$  offensichtlich nicht.)

$$\Rightarrow 0 \stackrel{!}{=} \delta S = m \int \frac{1}{\sqrt{-\dot{x}^2}} \frac{dx^\mu}{d\tau} \left( \frac{d}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) \eta_{\mu\nu} d\tau$$

$$\Rightarrow \text{nach part. Int.: } 0 \stackrel{!}{=} \int d\tau \frac{d}{d\tau} \left( \frac{1}{\sqrt{-\dot{x}^2}} \cdot \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) \delta x^\nu$$

(ohne Randterme)

$\eta_{\mu\nu}$

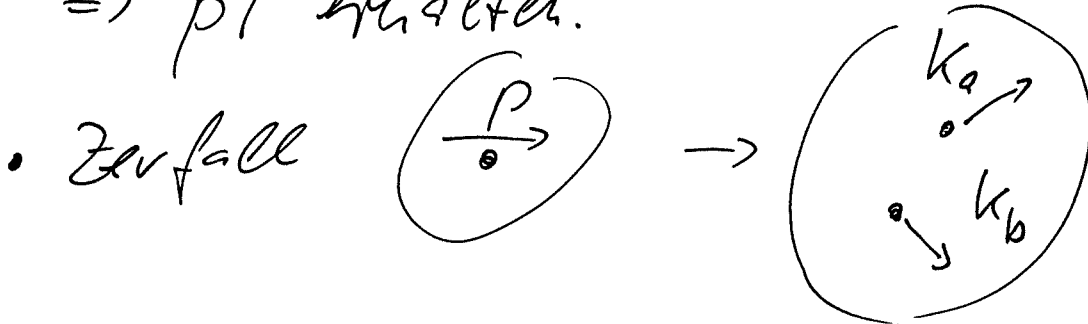
$$\Rightarrow \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}} \right) = 0$$

$$\underbrace{\text{const.}} \rightarrow \frac{dx^\mu}{\sqrt{-(dx)^\mu (dx)^\nu} d\tau} = \frac{dx^\mu}{ds} = \text{const.}$$

$\Rightarrow u^\mu = \text{const.}$  entlang Weltlinie  $\checkmark$

## 2.4 Zerfälle und Streuung

- $L$  inv. bei Verschieb. von  $t, \vec{x} \Rightarrow E, \vec{p}$  erhalten  
 $\Rightarrow p^\mu$  erhalten.



erhalten, falls  $p^\mu = k_a^\mu + k_b^\mu$

- Seien die Massen  $m \rightarrow m_a, m_b$ .

Nutze Ruhesystem von  $m$ :

$$\begin{pmatrix} m \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_a^0 \\ \vec{k}_a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_b^0 \\ \vec{k}_b \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{k}_a = -\vec{k}_b$$

$$k_a^2 = -m^2 \Rightarrow k_a^0 = \sqrt{\vec{k}_a^2 + m_a^2}$$

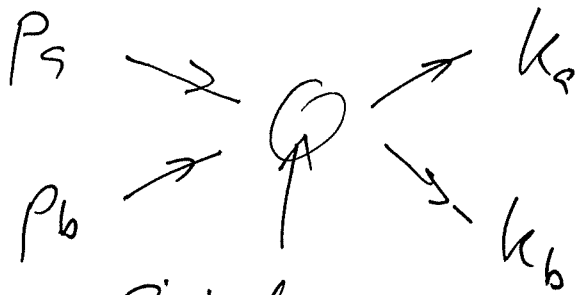
(analog für  $b$ )

$$\Rightarrow m = \sqrt{\vec{k}_a^2 + m_a^2} + \sqrt{\vec{k}_a^2 + m_b^2}$$

$\Rightarrow |\vec{k}_a|$  folgt. (Aufs.! Betrachte Abschaltung

von Photonen als Grenzwert  $m_e \rightarrow 0$ .)

- Streuung, elastisch:



Zwischen-  
zustand mit  $p = p_a + p_b = k_a + k_b$

- Oft bequem: sehe ins Centre-of-Mass-System, wo  $p = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \end{pmatrix}$ .  $M$  folgt leicht aus  $M^2 = -(p_a + p_b)^2$ .
- Viel mehr dazu in Teilch.physik, QFT etc. ....

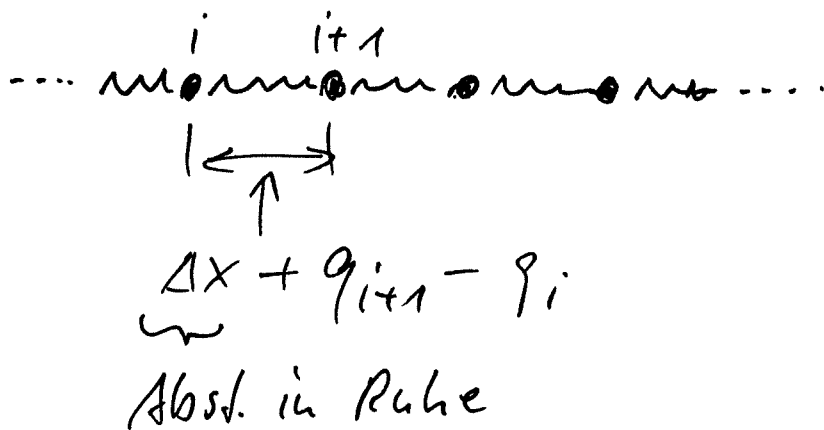
### 3 Feldtheorien - grundlegende Konzepte

Motivation: ED ist eine relativ komplizierte Feldtheorie (FT), u.a. weil  $\vec{E}, \vec{B}$  vektorwertig sind. Sinnvoll, zunächst einfache "Toy Models" anzusehen.

#### 3.1 "Effektive" Feldtheorien aus klass.

Lineare Kette:

Mechanik



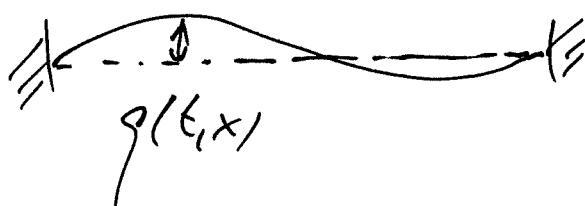
$$L = \sum_i \frac{m}{2} \dot{\rho}_i^2 - \sum_i \frac{k}{2} (\rho_{i+1} - \rho_i)^2$$

↓ Kontinuumslimes

$$L = \int dx \left( \frac{\rho}{2} \dot{\rho}(t, x)^2 - \frac{b}{2} \rho'(t, x)^2 \right)$$

$$\rho = \frac{m}{\Delta x} ; \quad b = k \cdot \Delta x$$

Analog: Schwingende Saite oder "String"

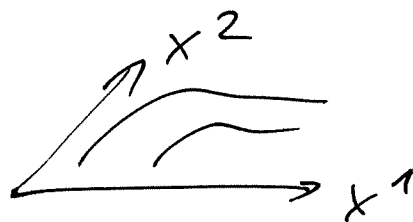


$L$  wie oben;  $b \rightarrow F$  (Kraft)

Einfache Erweiterung: Schwing. Membran

$$L = \int d^2x \left( \frac{\rho}{2} \dot{\rho}^2 - \frac{T}{2} (\nabla \rho)^2 \right)$$

$\uparrow$  Spannung  $2d$





Auch: - Höhenwellen auf Wasser  
- Druckwellen in Gas / Flüss.

Dyn. Objekt:  $q = q(t, \vec{x})$  "Feld"

↑  
kann auch Vektor / Tensorfeld sein  
z.B. Auslenkungs-Wellen im Festkörper!

• All diese Feldtheorien sind "effektiv",  
d.h. sie entstehen im Kontinuumslimes  
(= aus mikrosk. od. IR-Sicht) aus  
mikroskopisch anderen Systemen (hier aus  
einfachen mech. Systemen)

• ED ist "fundamental" in dem Sinne,  
dass wir bisher keine grundlegendere,  
mikrosk. Erklärung dafür haben.

• Obige Feldtheorien sind alle lokal,  
d.h.  $L$  ist Integral über  $\mathbb{R}^{d-1}$   
mit Integranden, der von einem Pkt.  $\vec{x}$   
abhängt (bzw. durch Ableitungen von

nah benachbarten Punkten:

$$q' = \lim_{\Delta} \frac{q(x+\Delta) - q(x)}{\Delta}$$

- Lokalität scheint ein grundlegendes Prinzip d. Natur zu sein.

=> allg. Def. einer FT:

$$S = \int dt L = \int dt d^{d-1}x \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}, \nabla\varphi, \dots)$$

Lagrange-Dichte

$\varphi = \varphi(t, \vec{x})$   
"Skalarfeld"

and  $\nabla^2$  etc.

### 3.2 Relativistisches Skalarfeld

- Fund. Symm. d. Natur: SRT (Poinc.)  
=> fund. FT-en müssen Poinc.-inv. sein.

$$\Rightarrow S = \int d^4x \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi, \partial_\mu\partial_\nu\varphi, \dots)$$

inv. wegen  
 $\det(\Lambda) = \pm 1$

$\dot{\varphi}$  &  $\nabla\varphi$  müssen  
gemeinsam auftreten,  
sonst Invarianz unmögl.

- Einfachste nichttriviale Möglichkeit:

$$S = \int d^4x \left( -\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi) (\partial_\nu \varphi) \eta^{\mu\nu} \right)$$

$$\varphi = \varphi(t, \vec{x}) = \varphi(x)$$

↑  
{x<sup>μ</sup>}

- Inv. folgt aus vollst. "Kontraktion" aller Lorentz-Indizes, so wie in Mechanik:

$$S = \int dt \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2$$

↑  
 $\dot{x}^i \dot{x}^j \delta_{ij}$  wegen  $O(3)$ -Symm.  
einzige Möglichkeit

• Hier:  $\partial_\mu \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \xrightarrow{1} \Lambda_\mu^\nu \partial_\nu \varphi$

Index unten (Co-Vektor!)

$$\Lambda_\mu^\nu \equiv \eta_{\mu\rho} \Lambda^\rho \delta^\sigma \eta^{\sigma\nu}; \quad (x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu x^\nu)$$

für Vektor

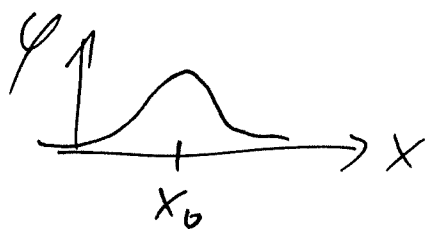
- leicht zu prüfen: So wie  $x^2 \equiv x^\mu x_\mu$  inv. ist, so ist auch

$$(\partial_\mu \varphi)^2 \equiv \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi \eta^{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi \partial^{\mu} \varphi$$

inv. wegen Def. von  $\Lambda$  bzw.  $O(1,3)$ .

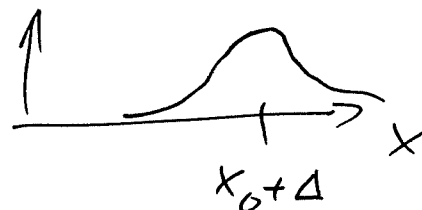
Folgender. Einspruch:

$\varphi = \varphi(x)$  1-dim. Feld; Tvf.: Verschiebung  
in  $x$



Fkt.  $\varphi(x)$

$\Delta$



Fkt.  $\varphi'(x) = \varphi(x - \Delta)$

- Analog bei Lorentz-Tvf. von Feldkonfiguration  $\varphi$ :

$$\varphi \xrightarrow{\Lambda} \varphi' \text{ mit } \varphi'(x) = \varphi(\Lambda^{-1}x)$$

- Daraus folgt:

$$\partial_\mu \varphi \xrightarrow{\Lambda} \partial_\mu \varphi' \quad \text{mit} \quad \partial_\mu \varphi'(x) = \Lambda_{\mu\nu}^{\nu} \partial_\nu \varphi(\Lambda^{-1}x)$$

- Für uns unbedeutend:

$\partial_\mu \varphi$  ist ein (Co-)Vektorfeld, d.h.

$$\partial_\mu \varphi \xrightarrow{\Lambda} \Lambda_\mu^\nu \partial_\nu \varphi.$$

(Analog ist  $\partial^\mu \varphi = \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi$  ein Vektorfeld)

- Wir sehen:

$$S = \int d^4x \left( -\frac{1}{2} (\partial\varphi)^2 \right) = \int d^4x \left( -\frac{1}{2} \right) (-\dot{\varphi}^2 + (\nabla\varphi)^2)$$

ist Saite, Membran etc. sehr ähnlich.

Aber: Koeff. der beiden Terme sind hier zwingend so, dass  $O(1,3)$  respekt. wird.

### 3.3 Bewegungsgl., Wellen

$$0 \stackrel{!}{=} \delta S = \int d^4x \left( -\frac{1}{2} \right) 2 \partial_\mu (\delta\varphi) \partial_\nu \varphi \eta^{\mu\nu}$$

$$= \int d^4x (\partial^2 \varphi) \delta\varphi \Rightarrow \boxed{\partial^2 \varphi = 0}$$

$$\uparrow \\ \equiv \partial^\mu \partial_\mu$$

Klein-Gordon-Gl.

Ansatz:  $\varphi = \sin(kx)$

$$\uparrow$$

$$k_\mu x^\mu$$

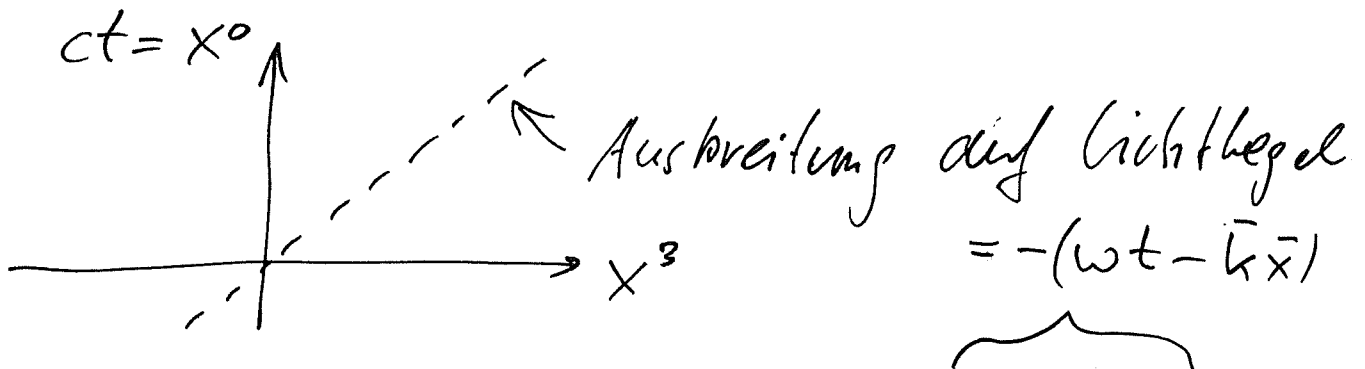
$$\partial^\mu \partial_\mu \sin(k_\nu x^\nu) = \partial^\mu \left[ (k_\nu \delta_\mu^\nu) \cos(k_\rho x^\rho) \right]$$

$$= k_\mu (k_\rho \eta^{\mu\rho}) (-\sin(k_\sigma x^\sigma)) = -k^2 \sin(kx)$$

$$\Rightarrow k^2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad k_0 = \pm |\vec{k}|$$

- Wähle z.B.  $k_0 = -k_3$ ,  $k_1 = k_2 = 0$

$\Rightarrow$  Wellenfunkt in  $x_{1,2}$ -Ebene; 2d-Problem



- Unsere Welle explizit:  $\sim \sin(-k_3 x^0 + k_3 x^3)$

Phasengeschw.:  $v_p = \omega/|\vec{k}| = k_3/k_3 = 1 (= c)$

Gruppengeschw.:  $v_g = d\omega/d|\vec{k}| = 1$

$\Rightarrow$  Ausbreitung v. Wellenfunkt & Informations-/Energie transport mit Lichtgeschw.

(Maximum für Inf.-Transport in relativist. FT.)

Kommentar: Leider hat die Natur

kein fundamentales Skalarfeld außer dem "Higgs-Feld". Aber dieses hat "Masse" ( $\neq m^2 \varphi^2$ ) und ist außerdem instabil. Also können wir obiges einfache System nicht real erleben. (Higgs-Feld existiert nicht im "klassischen" Regime.)

Kommentar (von großer konzeptioneller Bedeutung): SRT odrückt FT-en nicht nur ein, sondern sie erzwingt auch den Übergang von der "instantanen Fernwirkung" (vgl. Potential d. klass. Mech.) zur indirekten Fernwirkung durch Felder. (grund: Konzept d. Gleichzeitigkeit geht verloren.) Abu: Quelle erzeugt Feld, Feld propagiert (breitet sich aus), Probe reagiert auf Feld. Dies geht höchstens mit Lichtgeschw.!

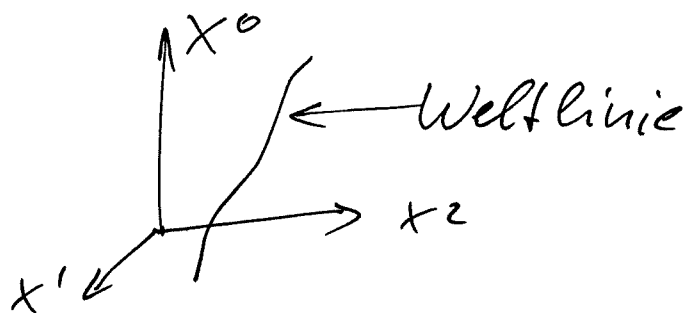
# 4 Elektrodynamik - prinzipielle Struktur

## 4.1 Teilchen - Vektorpotential - Eichinvarianz

- Startpt.: Teilchen

$$S = -m \int ds$$

$$(c=1)$$



- Wir wissen: Es gibt "geladene" Teilchen, d.h. solche, die an Felder koppeln. Was ist die math. natürliche Beschreibung dazu?

- Zentrale Behauptung: Um eine inv. Wirkung auf der Basis einer Weltlinie hinzuschreiben, ist die natürl. Option ein Vektorfeld (genauer: Co-Vektorfeld):

$$\int dx^\mu \text{ mit } A_\mu(x) \Rightarrow \int dx^\mu A_\mu \text{ inv.}$$

$$\Rightarrow S = -m \int ds + e \int A_\mu dx^\mu$$

Kopplung  
bzw. Ladung d. Teilch.

[ vgl. Arbeit in klass.

Mechanik:  $\int \vec{F} \cdot d\vec{x}$  ]



• Wichtige Beobachtung:

Falls  $A_\mu$  die spezielle "Gradienten"form

$A_\mu = \partial_\mu X$  annimmt, trägt der neue  
Wirkungs-Term nicht zu den EOMs bei.  
↑  
"Equations-of-Motion"

Begründung:

$$\int_{x_i}^{x_f} (\partial_\mu X) dx^\mu = X(x_f) - X(x_i)$$

↑ final    ↑ initial

weil Int. von Gradient über Linie

Expliziter: Parametrisiere Weltlinie  
durch  $x = x(\lambda)$ , so dass

$$\int (\partial_\mu X) dx^\mu = \int (\partial_\mu X) \dot{x}^\mu d\lambda$$

$$= \int d\lambda X(x(\lambda))' = X(x(\lambda_f)) - X(x(\lambda_i))$$

⇒ Variation von Traj. od. Feld zwischen  
Endpunkten ändern  $S$  nicht!

$\Rightarrow A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi$  ändert nichts!

"Eichttransformation" des

"Vektorpotentials"  $A_\mu$ .

$\Rightarrow$  Jedes Teilch. koppeln notwendigerweise an  $A_\mu$ , wobei  $A_\mu \sim A_\mu + \partial_\mu \chi$

"äquivalent".

• Wir wollen fordern, dass die Eichtrf. nicht nur eine Symm. ist ("inv."), sondern, dass  $A_\mu$  &  $A_\mu + \partial_\mu \chi$  (für belieb.  $\chi$ ) die exakt gleiche Physik beschreiben.

$\Rightarrow$  Eichtrf. sind eine "Redundanz der Beschreibung".

• Dies schränkt S[A] ein!

Naheliegend:  $S \sim (\partial^\mu A_\nu) (\partial^\sigma A_\rho) \eta_{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho}$

$$= -(\partial^\mu A_0) (\partial^\sigma A_0) \eta_{\mu\sigma} + \dots$$

(wie  $(\partial\phi) \cdot (\partial\phi)$ )

- Auch möglich:  $S \sim (\partial_\mu A^\mu) / (\partial_\nu A^\nu)$
- Aber: beides nicht lichtinv.!

Idee:  $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  ist lichtinv.

"Feldstärke tensor"  $\leftarrow \begin{cases} \sim \vec{E}, \vec{B} \\ \text{Vorsicht} \\ A_0 \sim \text{"}\varphi\text{"} \\ \text{elektrostat.} \\ \text{Pot.} \end{cases}$

$$(F_{\mu\nu}(A = \partial X) = \partial_\mu \partial_\nu X - \partial_\nu \partial_\mu X = 0)$$

$\Rightarrow$  Vorschlag:

$$S = \int_{\mathbb{R}^{1,3}} d^4x \left( -\frac{1}{4} \right) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + e \int_{\gamma} A_\mu dx^\mu - m \int_{\gamma} ds$$

(Weltlin.)

Zentrale Aussage der TP3:

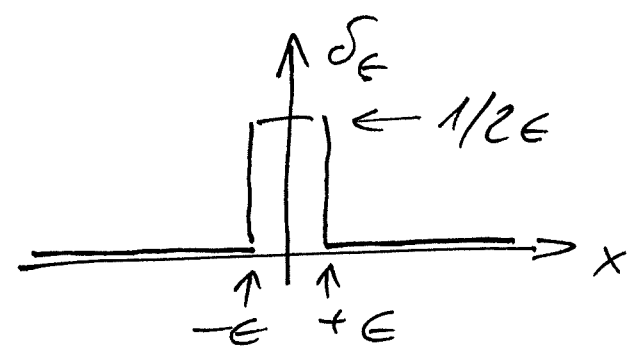
Dieses  $S$  (ggf. ergänzt um mehr Teilchen mit versch. Ladungen) beschreibt vollst. die gesamte ED! Grundideen aus denen wir dieses  $S$  gefunden haben:

SRT + natürl. (lichtinv.) Kopplung von Teilch. & Feld.

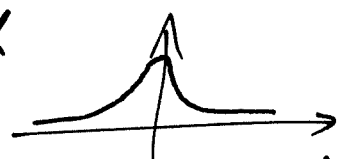
4.2 Die Delta-Fkt. (M)

↑  
"math. Einsdruck"

Definiere  $\delta_\epsilon(x)$  durch



[Alternativ hätten wir auch



oder eine andere Form wählen können.]

(Sehr grobe) Def. der  $\delta$ -Fkt.:

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(x)$$

Etwas besser:  $\delta(x)$  ist def. durch

(1)  $\int \delta(x) dx = 1$  & (2)  $\delta(x) = 0 \forall x \neq 0$ .

[Dabei sind nur Ausdrücke mit  $\delta$  zulässig, die man mit (1) & (2) auswerten kann.]

Noch besser:  $\delta$  ist ein Funktional (man sagt auch "Distribution"), das def. ist durch

$$\delta: f \mapsto \int f(x) \delta(x) dx = f(0)$$

nur eine Schreibweise

Intuition:  $\delta(x)$  ist eine Fkt., die ganz scharf bei Null lokalisiert und auf 1 normiert ist. (entspr. ist  $\delta(x-x_0)$  bei  $x_0$  lokalisiert.)

Oft auch nützlich:  $\delta^n(x) \equiv \delta(x^1)\delta(x^2)\dots\delta(x^n)$   
auf  $\mathbb{R}^n$  ( $x \in \mathbb{R}^n$ )

Einf. Bsp.:  $\int d^3\bar{x} f(\bar{x}) \delta^3(\bar{x}-\bar{y}) = f(\bar{y})$ .

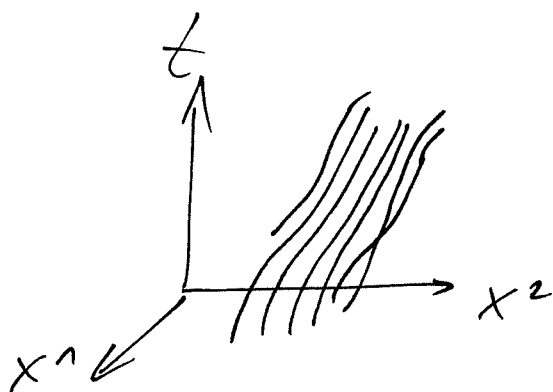
### 4.3 Die 4-er Stromdichte

Ziel: Math. Formulierung der ED-Wirkung so erweitern, dass auch "ausgedehnte" Ladungsverteilungen ok sind. Solche sind natürlich mikroskopisch immer durch Summen über viele Weltlinien realisiert, aber wir wollen statt dessen eine "effektive, glatte" Beschreibung.

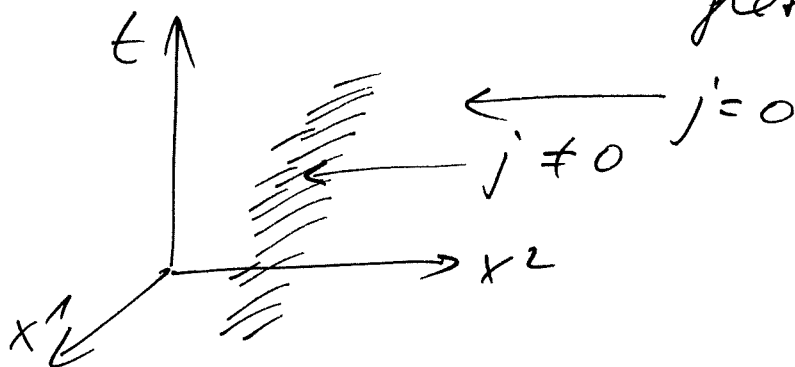
- Wir schreiben um:

$$\sum_i e_{ij} \int_{\gamma_i} d^4 x_i A_\mu = \sum_i e_{ij} \int d\lambda x_i^\mu(\lambda) A_\mu$$

$$= \int d^4 x \underbrace{\sum_i e_{ij} \int d\lambda \delta^4(x - x_i(\lambda)) x_i^\mu(\lambda) A_\mu(x)}_{\equiv j'^\mu(x) - 4\text{-er Stromdichte}}$$



⇓ Verallg. auf ungerichtetes, flaches  $j$ :



- Eine äquivalente, intuitivere Def. ist:

$$j'^\mu = \int_{\gamma(x)} \frac{dx^\mu}{dt}(x)$$

geschw. d. Teilchenstroms am Ort  $x$ .

Dabei ist  $\rho$  die Ladungsdichte:

$$\rho = \frac{e \cdot dN}{d^3x} \rightarrow \text{[Diagram of a small cube with dots inside, labeled } d^3x \text{]}$$

$$j^\mu = \frac{e \cdot dN}{(d^3x \cdot dt)} \cdot dx^\mu \Rightarrow \text{4-er Vektor}$$

invariant

(Aber  $\rho$  &  $dt$  sind keine Skalare,  
nur  $\rho/dt$  ist linear.)

• Wir können also schreiben:

$$S = \int d^4x \left[ -\frac{1}{4} F^2 + j^\mu A_\mu \right] + S_{\text{matter}}$$

↑

wichtig für  
Dynamik  
von  $A_\mu$ .

{  $\Sigma (-m \int ds) +$  alle  
mögl. WW-en der  
Teilchen außer  
mit  $A_\mu$

### 4.4 Maxwell-Gl.-en

$$0 \stackrel{!}{=} \delta S = \int d^4x \left( -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} + j^\mu \delta A_\mu \right)$$

bzgl.  $A$  ↑

$$= \int d^4x \left( -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} (\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu) + j^\mu \delta A_\mu \right)$$

$$= \int d^4x (\partial_\nu F^{\nu\mu} + j^{\mu}) \delta A_\mu$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^{\mu}} \quad \text{"Inhomogene Maxwell-fl.-en"}$$

(Vorsicht! Vorzeichen hängt am  $\eta$ -Def.)

• Außerdem:

$F_{\mu\nu}$  erfüllt aufgrund seiner Def. aus  $A_\mu$  die sogenannte Bianchi-Identität:

$$\boxed{\partial_{[\mu} F_{\nu\sigma]} = 0} \quad \text{"Homogene Maxwell-fl.-en"}$$

"totale Antisymmetrisierung", d.h.

$$T_{[\mu_1 \dots \mu_n]} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) T_{\sigma(\mu_1) \dots \sigma(\mu_n)}$$

z.B.  $T_{[\mu_1 \mu_2 \mu_3]} = \frac{1}{6} (T_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} + T_{\mu_2 \mu_3 \mu_1} + T_{\mu_3 \mu_1 \mu_2} - T_{\mu_2 \mu_1 \mu_3} - T_{\mu_1 \mu_3 \mu_2} - T_{\mu_3 \mu_2 \mu_1})$

Begründung:

Bsp:  $F_{\mu\nu} = 2 \partial_{[\mu} A_{\nu]}$

$$\partial_{[\mu} F_{\nu\sigma]} = \partial_{[\mu} \partial_{\nu} A_{\sigma]} - \partial_{[\mu} \partial_{\sigma} A_{\nu]} = 0$$

weil  $\partial_{[\mu} \partial_{\nu]} = 0$  /  $\partial_{[\mu} \partial_{\sigma]} = 0$



- Oft nützliche alternative Formel ergibt sich bei Benutzung von

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \equiv \begin{cases} \pm 1 & \text{falls } \{\mu\nu\alpha\beta\} \text{ gerade/unger.} \\ & \text{Permut. von } \{0123\} \\ \text{sonst } 0 & \end{cases}$$

↑  
ist (invarianter) Tensor bezgl.  $SO(1,3)$ ,  
ganz analog zum inv. Tensor  $\epsilon_{ijk}$  bezgl.  
 $SO(3)$ . ("Levi-Civita-Symbol")

- Def.:  $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$

("dualer Feldstärketensor")

- Man überlegt sich leicht: Bianchi-Id. ist äquivalent zur Aussage  $\boxed{\partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0}$

Also: (Kovariante) Maxwell-Gl.-en:

$$\boxed{\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu \quad ; \quad \partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0}$$

## 4.5 Übergang zu $\bar{E}$ & $\bar{B}$

Die tägl. Erfahrung (mit  $|v| \ll c$ ) kennt nur die Untergruppe  $SO(3) \subset SO(1,3)$ .

Es ist oft nützlich, die Beschreibung entsprechend anzupassen:

$$A_\mu \rightarrow A_0; A_i$$

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F_{0i}, F_{ij} \quad (F_{00} = 0)$$

Darstellungstheorie:	$O(1,3)$	$\supset$	$O(3)$
	4	=	$1 + 3_V$
	$6 = (4 \times 4)_A$	=	$3_V + 3_P$
	antisymm.	↑	↑
		Vektor	↑
			Pseudo vekt.

$$\text{Also: } \{A^\mu\} = \{A^0 \equiv \varphi; \{A^i\} = \bar{A}\}$$

↑  
 elektrost. Pot.      (3-er) Vektor-  
 ↑  
 Potential

$$F_{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = -\partial_t \bar{A} - \nabla \varphi \equiv \bar{E}$$

Warum dies unser vertrautes E-Feld ist, wird bald klar werden.

$$F^{ij} = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \epsilon_{klm} F^{lm}$$

$$\partial_l A_m - \partial_m A_l$$

$$\Rightarrow F^{ij} = \epsilon^{ijk} (\nabla \times \vec{A})_k \Rightarrow F^{ij} = \epsilon^{ijk} B_k$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\equiv \vec{B}}$

$$\Rightarrow F^{\mu\nu} = \left( \begin{array}{c|ccc} 0 & \vec{E} & & \\ \hline & 0 & B_3 & -B_2 \\ -\vec{E} & -B_3 & 0 & B_1 \\ & B_2 & -B_1 & 0 \end{array} \right)^{\mu\nu}$$

Es ist sofort klar, dass  $\tilde{F}^{01} = \epsilon^{0123} F_{23}$

$$= -F_{23}$$

$$\tilde{F}^{23} = \epsilon^{2301} F_{01}$$

$$= -F_{01} = F^{01}$$

$$\Rightarrow \tilde{F}^{\mu\nu} = \left( \begin{array}{c|ccc} & -\vec{B} & & \\ \hline \vec{B} & 0 & E_3 & -E_2 \\ & -E_3 & 0 & E_1 \\ & E_2 & -E_1 & 0 \end{array} \right)^{\mu\nu}$$

etc.

← folgt aus  $F$  durch  
 $\vec{E} \rightarrow -\vec{B}; \vec{B} \rightarrow \vec{E}$

## 4.6 Maxwell-Gl.-en in nichtrelativist. Form

- Die beiden 4-er Vektoren  $\partial_\nu F^{\mu\nu}$  und  $j^\mu$  zerfallen wie oben gemäß:

$$SO(1,3) \supset SO(3) ; 4 = 3 + 1$$

- Wir definieren  $\{j^\mu\} = \{\rho, \vec{j}\}$  und finden somit:

"1":  $\partial_\nu F^{0\nu} = \rho \Rightarrow \boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \rho}$

"3":  $\partial_\nu F^{i\nu} = j^i \Rightarrow -\partial_t E^i + \underbrace{\partial_j F^{ij}}_{\substack{= \\ \varepsilon^{ijk} B_k}} = j^i$

$$\Rightarrow \boxed{-\dot{\vec{E}} + \nabla \times \vec{B} = \vec{j}}$$

- $\partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu}$  zerfällt analog, aber mit

$\vec{E}, \vec{B} \rightarrow -\vec{B}, \vec{E}$ . Also folgt aus den

homog. Gl.-en:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0} ; \boxed{\dot{\vec{B}} + \nabla \times \vec{E} = 0}$$

(für  $\nabla \times \vec{B}$  schreibt man auch  $\text{rot } \vec{B}$  etc.)

Zus. Formung:  $\nabla \cdot \vec{E} = \rho$   $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

$$\nabla \times \vec{B} = \vec{j} + \dot{\vec{E}} \quad \nabla \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$$

Verschiebungsstrom  $\nearrow$   
(Displacement current)

mag. Verss. Strom  $\nearrow$   
(mag. displ. curr.)

- Rechts "fehlen" offensichtlich Beiträge  $S_{\text{mag}}$  &  $J_{\text{mag}}$ . Die Struktur der fl.-en lässt solche magn. Ladungen zu. Man erwartet sie theoretisch sogar. Aber bislang wurde noch kein sogenanntes "mag. Monopol" gefunden. Er ist vermutlich (auch das ist theoretisch erwartet) zu schwer.
- Obige Form der Maxwell-fl.-en entspricht dem "Lorentz-Heaviside"-Einheitensystem, wobei zusätzlich  $c = 1$  ist.
- Führen wir nun zunächst  $c$  wieder ein:

• Erinnerung:  $S_{\text{WW}} = e \int A_\mu dx^\mu$  ( $c=1$ ).

• Mit  $c$  definiert man

$$S_{\text{WW}} = \frac{e}{c} \int A_\mu dx^\mu$$

Im Prinzip ist dieser Faktor beliebig, da er in eine Umdef. von  $e$  absorbiert werden könnte. Aber er ist logisch begründbar aus der Form der Wirkung für ein Teilchen in Ruhe:

$$S_{\text{WW}} = -\frac{e}{c} \int \varphi dt \quad (x^0 = cdt)$$

• Beim Übergang zum Strom definieren wir:

$$S_{\text{WW}} = \frac{1}{c} \int d^4x e \int d\lambda \delta^4(x - x(\lambda)) \dot{x}^\mu A_\mu$$

$$([\delta(x \dots)] = [\frac{A}{x}])$$

↑  
"Einheit von"

$$\equiv j^\mu / c$$

• Dadurch hat  $J$  die Einheit von  $e \delta^4(x \dots) x^\mu$ , also von  $e \delta^3(x \dots) v$ , also von  $e v$ . Das macht physikalisch Sinn.

• Also:  $S_{WW} = \frac{1}{c^2} \int d^4x j^{\mu} A_{\mu}$

mit  $j^{\mu} = \begin{pmatrix} \rho c \\ \mathbf{J} = \rho \mathbf{v} \end{pmatrix}$ .

• Des Weiteren definieren wir bei  $c \neq 1$ :

$$S_{ED} = \int \left(-\frac{1}{4c}\right) F^2 d^4x$$

↑  
um das  $c$  aus  $dx^0 = c dt$   
zu kürzen.

• Zus. fassung:

$$S = \int d^4x \left( -\frac{1}{4c} F^2 + \frac{1}{c^2} j \cdot A \right)$$

↓ Analyse wie oben

$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J}/c + \dot{\mathbf{E}}/c$	$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}/c$

aus  
 $dx^0 = c dt$

Hier hat sich  $c$  aus  
 $j^0 = c\rho$  mit  $1/c$  aus

Obige Maxwell-Gl.-en  
sind im Lorentz-Gaußsche Syst.

$S_{WW}/S_{ED}$  gekürzt

• Im weit verbreiteten Gauß-System ersetzt man noch  $j \rightarrow 4\pi j$  (die historischen Gründe dafür werden bald klar). Also:

$\nabla \bar{E} = 4\pi S$	$\nabla \bar{B} = 0$
$\nabla \times \bar{B} = 4\pi \bar{J}/c + \dot{\bar{E}}/c$	$\nabla \times \bar{E} = -\dot{\bar{B}}/c$

• Maßeinheiten der einzelnen Größen im Gauß-System: Starte mit cgs (nicht mit mks wie bei SI) und definiere Einheiten von  $e, \bar{E}, \bar{B}$  etc. auf dieser Basis:

$$S_{ED} \sim \frac{1}{c} \int d^4x F^2$$

$$\Rightarrow [S] = \left[ \frac{L^4}{c} \right] \cdot [E; B]^2$$

$$\Rightarrow [E; B]^2 = \frac{9 \text{ cm}^2}{s} \cdot \frac{1}{\text{cm}^4} \cdot \frac{\text{cm}}{s}$$

$$[E; B] = \sqrt{\frac{9}{\text{cm} \cdot s^2}} = \begin{cases} \text{Gauß (B)} \\ \text{statV/cm (E)} \end{cases}$$

---

$$S_{WW} \sim \frac{e}{c} \int A dx$$

"statvolt"

$$[A] = [E] \cdot \text{cm}$$



$$\Rightarrow [e] = \frac{g \text{ cm}^2}{s} \cdot \frac{\text{cm}}{s} \cdot \sqrt{\frac{\text{cm s}^2}{g}} \cdot \frac{1}{\text{cm}} \cdot \frac{1}{\text{cm}}$$

$$[e] = \sqrt{\frac{g \text{ cm}^3}{s^2}} = \text{statC} = \text{Fr}$$

("Statcoulomb", "Franklin")

$$e = 5 \cdot 10^{-10} \text{ Fr}$$

(In "natürlichen" Einheiten mit  $\hbar = 1$

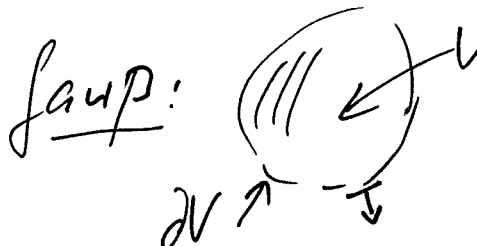
ist  $e = \sqrt{4\pi/137} = 0.303$ . Die Ele-

mentarladung ist also trotz obiger "10<sup>-10</sup>"

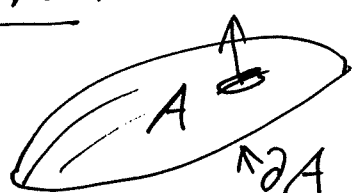
in keiner objektiven Weise "besonders klein".)

#### 4.7 Integralform d. Maxwell-Gl.-en

Erinnerung an Sätze v. Gauß & Stokes:

Gauß:  
$$\int_V d^3x \nabla \cdot \vec{v} = \oint_{\partial V} \vec{v} \cdot d\vec{f}$$

Stokes:



$$\int_A (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{f} = \oint_{\partial A} \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

Jetzt wieder mit Heaviside &  $c=1$ :

$$\nabla \bar{E} = \rho \xrightarrow{\text{Int.}} \int_V (\nabla \bar{E}) d^3x = \int_V \rho d^3x$$

$$\text{Gauß} \Rightarrow \int_{\partial V} \bar{E} \cdot d\vec{f} = \int_V d^3x \rho$$

$$\nabla \times \bar{B} = \vec{J} + \dot{\bar{E}} \xrightarrow{\text{Int.}} \int_A (\nabla \times \bar{B}) \cdot d\vec{f} = \int_A (\vec{J} + \dot{\bar{E}}) \cdot d\vec{f}$$

$$\text{Stokes} \Rightarrow \int_{\partial A} \bar{B} \cdot d\vec{s} = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{f} + \frac{d}{dt} \int_A \bar{E} \cdot d\vec{f}$$

Analog erhält man für die homog. fl. m:

$$\int_{\partial V} \bar{B} \cdot d\vec{f} = 0$$

$$\int_{\partial A} \bar{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{d}{dt} \int_A \bar{B} \cdot d\vec{f}$$

• Wiedereinführung von  $c$ :  $\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{1}{c} \frac{d}{dt}$

• für Gauß-System:

$$\vec{J} \rightarrow \vec{J}/c$$

$4\pi$  bei  $\rho, \vec{J}$ .

(wegen  $\vec{J} = \rho \vec{v}$ )

## 5 Elektrostatik

- Maxwell-fl.-en mit  $c \rightarrow \infty$
- $\Rightarrow$  keine Quellen für  $\vec{B}$
- $\Rightarrow \vec{B} = 0$  ist konsistente Annahme

Es bleiben:  $\boxed{\vec{\nabla} \vec{E} = \rho, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0}$

Außerdem: Suche Lsg.-en unabh. von  $t$   
("Statik")

- $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \exists \phi$  mit  $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$  ( $\rightarrow$  TP1/2)
- (folgt auch aus Def. von  $F_{0i}$  bei  $a_k \rightarrow 0$  & mit  $A^0 = \phi$ )

$\Downarrow$

- zu lösen:  $\vec{\nabla}(-\vec{\nabla} \phi) = \rho$  bzw.  $\boxed{\Delta \phi = -\rho}$
- ( $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \sum_i \partial_i^2$ )  $\uparrow$  "Poisson-fl."

### 5.1 Feld von Pkt.-ladung(en)

- Pkt.-ladung bei  $\vec{x}_0$ :  $\rho = e \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0)$
- Sei o.B.d.A.  $\vec{x}_0 = 0$ . Außerdem zur Allg.heit:  
 $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$

$\Rightarrow$  Löse:  $\boxed{\Delta \phi = -e \delta^d(\vec{x})}$

Ansatz:  $\phi = \frac{c}{|\bar{x}|^\alpha}$  ← Konstanten

$$\bar{\nabla} \phi = \bar{\nabla} \frac{c}{(\sum_i x_i^2)^{\alpha/2}} = - \frac{c \alpha \bar{x}}{(\bar{x}^2)^{\alpha/2+1}}$$

$$\bar{\nabla}^2 \phi = -\alpha \alpha \left[ \frac{d}{(\bar{x}^2)^{\alpha/2+1}} - \frac{(\alpha+2) \bar{x}^2}{(\bar{x}^2)^{\alpha/2+2}} \right]$$

$$\sim (d - (\alpha+2)) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = d-2}}$$

↑  
bei  $\bar{x} \neq 0$

(Man sagt:  $\phi$  ist harmonisch, außer bei  $\bar{x}=0$ )  
 $\boxed{\Delta(\dots) = 0}$

- Müssen jetzt noch  $\bar{x}=0$  analysieren.  
(Zur Zeitersparnis nur bei  $d=3$ .)

$$\bar{\nabla}^2 \frac{c}{|\bar{x}|} = -c \delta^3(\bar{x})$$

? gilt dies auch bei  $\bar{x}=0$ ?

- Erinnerung: S-Fkt. nur durch Int. mit Fkt.  $f(\bar{x})$  definiert.
- Wir wissen schon: Beide Seiten = 0 außer bei  $\bar{x}=0 \Rightarrow$  Wähle o.B.d.A.  $f \equiv 1$ .

- Wähl O.B.d.A. Int. über Kugel mit Radius 1, also:

$$\alpha \int_{B_3} d^3x \nabla \left( \nabla \frac{1}{|\bar{x}|} \right) \stackrel{!}{=} -e \int_{B_3} \delta^3(\bar{x}) d^3x$$

$$\Rightarrow \alpha \int_{S^2} d\bar{\omega} \cdot \underbrace{\left( \nabla \frac{1}{|\bar{x}|} \right)}_{-\bar{x}/|\bar{x}|^3} = -e \Rightarrow 4\pi\alpha = e$$

$$\alpha = \frac{e}{4\pi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi = \frac{e}{4\pi|\bar{x}|} \quad ; \quad \vec{E} = -\nabla\phi = \frac{e\bar{x}}{4\pi|\bar{x}|^3}}$$

(Im fern-System würden diese  $4\pi$  verschwinden.)

Ladung bei  $\bar{x}_0 \neq 0$ :

$$\boxed{\phi = \frac{e}{4\pi|\bar{x} - \bar{x}_0|}} \quad \& \quad \vec{E} \text{ entspr.}$$

Wichtige Erkenntnis:

$|\vec{E}| \sim \frac{1}{|\bar{x}|^2} \leftarrow$  Dies ist die Dim. der  $S^2$ , die die Ladung umschließt. (Wäre  $d-1$  in  $d$  Raumdimensionen.)

• Wegen Linearität der Poisson-ff.: 58

$$\text{Viele Ladungen} \Rightarrow \phi = \sum \frac{q_\alpha}{4\pi |\bar{x} - \bar{x}_\alpha|}$$

• Übergang zum Kontinuum

$$\Rightarrow \phi = \int \frac{d^3\bar{y}}{4\pi} \cdot \frac{\rho(\bar{y})}{|\bar{x} - \bar{y}|}$$

## 5.2 Methode der Greenschen Fkt.

Ziel: Löse  $\Delta\phi = -\rho(\bar{x})$

Idee: Löse zunächst  $\Delta G(\bar{x}, \bar{y}) = -\delta^3(\bar{x} - \bar{y})$ .

Met man dieses  $G$ , so gilt für

allg.  $\rho$ :

$$\phi(\bar{x}) = \int d^3\bar{y} G(\bar{x}, \bar{y}) \rho(\bar{y})$$

Begründung:

$$\left[ \Delta\phi = \int d^3\bar{y} \Delta G \rho = - \int d^3\bar{y} \delta^3(\dots) \rho = -\rho \quad \checkmark \right]$$

Die Methode gilt auch für Diff.-Operatoren

$D_x \neq \Delta$  und auf Räumen  $\neq \mathbb{R}^d$ . Wir

kennen für  $D_x = \Delta$  und  $\mathbb{R}^3$  natürlich

schon die Lsg.:

$$G(\bar{x} - \bar{y}) = \frac{1}{4\pi |\bar{x} - \bar{y}|}$$

- I.A. ist  $G$  nicht eindeutig und hängt von den Randbedingungen ab.  
(im einfachsten Fall bei  $|\bar{x}| \rightarrow \infty$ )

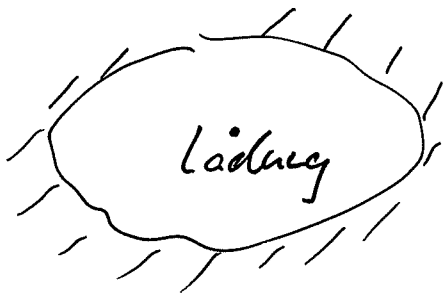
- Seien  $G_1, G_2$  zwei Lösungen. Dann erfüllt  $u = G_1 - G_2$  die Laplace-Gl.

$$\Delta u = 0.$$

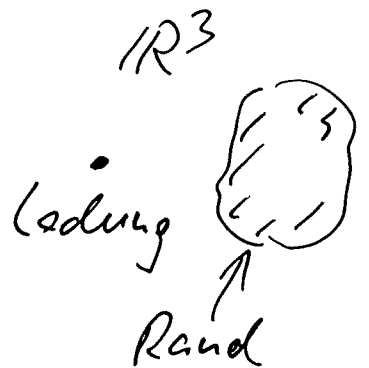
" $u$  ist harmonisch".

- Falls wir hinreichend schnellen Abfall bei  $|\bar{x}| \rightarrow \infty$  fordern, ist  $u \equiv 0$ .  
(siehe unten.)

- Wir wollen nun zu Situationen mit Rand (bei  $|\bar{x}| < \infty$ ) kommen:



oder



und im  $\infty$ -en.

- Um auch hierfür Greensche Fkt. zu benutzen, brauchen wir die...

## 5.3 Greensche Formeln (auch "Gr. Sätze") 60

• Betrachte

$$\int_V d^3x \operatorname{div}(\varphi \bar{\psi}) \stackrel{\text{Satz}}{=} \int_{\partial V} (\varphi \bar{\psi}) \cdot d\vec{f}$$
$$\stackrel{\text{Produkt-Regel}}{=} \int_V d^3x (\varphi \Delta \psi + (\bar{\nabla} \varphi) \cdot (\bar{\nabla} \psi))$$

⇒ 1. Greensche Formel

$$\int_V d^3x (\varphi \Delta \psi + (\bar{\nabla} \varphi) \cdot (\bar{\nabla} \psi)) = \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot (\varphi \bar{\psi})$$

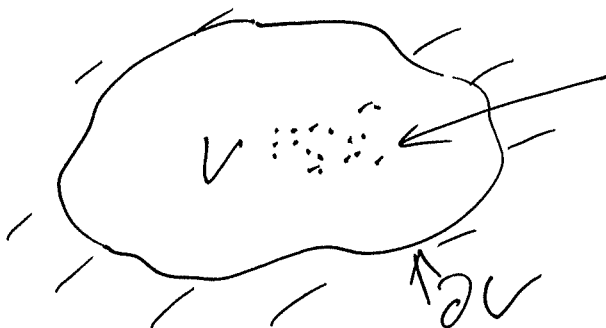
• Betrachte die Differenz

(1. Greensche F.) - (1. Greensche F. mit  $\varphi \leftrightarrow \psi$ )

⇒ 2. Greensche Formel

$$\int_V d^3x (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) = \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot (\varphi \bar{\psi} - \psi \bar{\varphi})$$

## 5.4 Greensche Methode f. Gebiete mit Rand



$S$  gegeben

Ziel: Löse  $\Delta \phi = -S$



• Lsg. nur eindeutig, falls Randbed. auf  $\partial V$  vorgeschrieben. Es gibt 2 grundlegende Möglichkeiten:

1) Dirichlet-Randbed.:  $\phi(\bar{x})|_{\partial V} = f(x)|_{\partial V}$   
↑  
gegebene Fkt.

2) Neumann-Randbed.:  $\bar{n} \cdot \nabla \phi(x)|_{\partial V} = g(x)|_{\partial V}$   
↑  
( $\bar{n}$  lfd &  $|\bar{n}| = 1$ )

• Wir definieren die entspr. freew. Fkt.-en

durch  $\Delta G_{D,N}(\bar{x}, \bar{y}) = -\delta^3(\bar{x} - \bar{y})$

↑  
(nicht mehr " $\bar{x} - \bar{y}$ " da die Translationsinv. des  $\mathbb{R}^3$  fehlt)

und  $G_D(\bar{x}, \bar{y})|_{\bar{x} \in \partial V} = 0$

bzw.

$\bar{n} \cdot \nabla_{\bar{x}} G_N(\bar{x}, \bar{y})|_{\bar{x} \in \partial V} = -\frac{1}{\|\partial V\|} \leftarrow$  Fläche von  $\partial V$

Dieser von Null verschiedene Wert wird durch Gauß. Satz erzwingen

Ziel: Wir wollen (wie im  $\mathbb{R}^3$ ) erreichen,

dass 
$$\phi(\vec{x}) = \int_V d^3x' G(\vec{x}, \vec{y}') \rho(\vec{y}') + \dots \quad (*)$$

Aber jetzt wird es  
hier je nach Randbed.  
Zusatzterme geben.

### Nichttriviale Fakten:

- Lösungen  $G_{D,N}$  existieren
- Sie sind eindeutig (siehe unten)
- Sie sind symmetrisch:  $G_{D,N}(\vec{x}, \vec{y}) = G_{D,N}(\vec{y}, \vec{x})$

(genauer: Im Fall von  $G_N$  muss ggf.  
ein Beitrag addiert werden, der  $G_N$   
symm. macht und  $\phi$  nicht verändert.)

Nächster Schritt: Vervollständige (\*)

Dazu: 2. Green. F.:

$$\int_V d^3\vec{y}' (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) = \int_{\partial V} d\vec{f}' \cdot (\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi)$$

Ersetze:  $\varphi \rightarrow \phi(\vec{y}')$ ;  $\psi \rightarrow G(\vec{x}, \vec{y}')$

$$\Rightarrow \int_V d^3\bar{y} \left( -\phi(\bar{y}) \delta^3(\bar{x}-\bar{y}) + G(\bar{x}, \bar{y}) \rho(\bar{y}) \right)$$

$$= \int_{\partial V} d\bar{f} \left( \phi(\bar{y}) \nabla_{\bar{y}} G(\bar{x}, \bar{y}) - G(\bar{x}, \bar{y}) \nabla_{\bar{y}} \phi(\bar{y}) \right)$$

$\uparrow$   $\uparrow$   
 $-1/\|\partial V\|$   $0$  falls "D"  
 falls "N" (G ist symm. !)

Ergebnis:

"D":  $\phi(\bar{x}) = \int_V d^3\bar{y} G(\bar{x}, \bar{y}) \rho(\bar{y}) - \int_{\partial V} d\bar{f} \cdot \left( \phi(\bar{y}) \nabla_{\bar{y}} G(\bar{x}, \bar{y}) \right)$

$\uparrow$   
ist vorgegeben!

"N":  $\phi(\bar{x}) = \int_V d^3\bar{y} G(\bar{x}, \bar{y}) \rho(\bar{y}) + \int_{\partial V} d\bar{f} \cdot \left( G(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \nabla_{\bar{y}} \phi(\bar{y}) \right)$

$\uparrow$   
ist vorgegeben

$+ \langle \phi \rangle_{\partial V}$

$$\leftarrow \equiv \frac{1}{\|\partial V\|} \int_{\partial V} d\bar{f} \cdot \phi(\bar{y})$$

Eindeutigkeit:

Seien zu geg.  $\rho$  & Randbed.  $\phi_1, \phi_2$  zwei versch. Lösungen. Dann löst  $\phi = \phi_1 - \phi_2$  offensichtlich die Laplace-Gl. und hat Randbed.-an "0." Setze nun in der 1. Form. F.

$$\varphi = \psi = \phi$$

$$\Rightarrow \int_V d^3\vec{x} (\nabla\phi)^2 = \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot (\phi \nabla\phi)$$

Int. über nichtneg.  $\Leftarrow$  0 auf Rand (D oder N)  
Fläch verschwindet

$\Downarrow$

$$\underline{\underline{\nabla\phi = 0}} \quad \checkmark$$

- Falls  $\phi$  schnell genug bei  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$  abfällt, kann man den Fall  $\mathbb{R}^3$  als Grenzfall eines endl. Gebietes auffassen (z.B.  $S^2(R)$  mit  $R \rightarrow \infty$ ) und findet damit auch Eindeutigkeit. z.B. verhält  $\phi \sim 1/|\vec{x}|$  &  $\nabla\phi \sim 1/|\vec{x}|^2$ .

### 5.5 Spiegelladungen

\*) zu  $\phi = 0$  bzw.  $\nabla\phi = 0$   
auf dem Rand

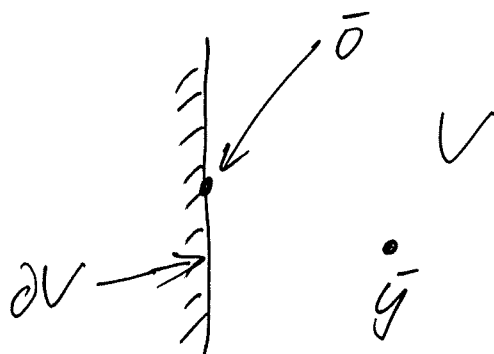


$\Rightarrow$  Potential:  $\underline{\underline{G(\vec{x}, \vec{y})}}$ . Kann geschrieben werden als

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} + \underbrace{F(\vec{x}, \vec{y})}_{\text{hängt ab von Randbed.}}$$

- Das Auffinden von  $F$  (und damit von  $G$ ) ist i.A. nichttrivial. Hat man aber für gegebene Geometrie und  $D$  od.  $N$  einmal  $G_D$  bzw.  $G_N$  gefunden, so hat man das Potential für beliebige  $\rho$  bzw.  $\bar{n} \cdot \bar{\sigma} \phi$ . Es lohnt sich also, an der Berechnung von  $F$  zu arbeiten...
- Wir wissen:  $\Delta F = 0$  in  $V$   
(wegen  $\Delta G = -\delta^3$ )  
 $\Rightarrow$  Es liegt nahe,  $F$  als Potential einer Ladungsverteilung nur außerhalb von  $V$  zu interpretieren ("Spiegel Ladungen").
- Einf. Beispiel:  $V =$  "Halbraum"; "D"

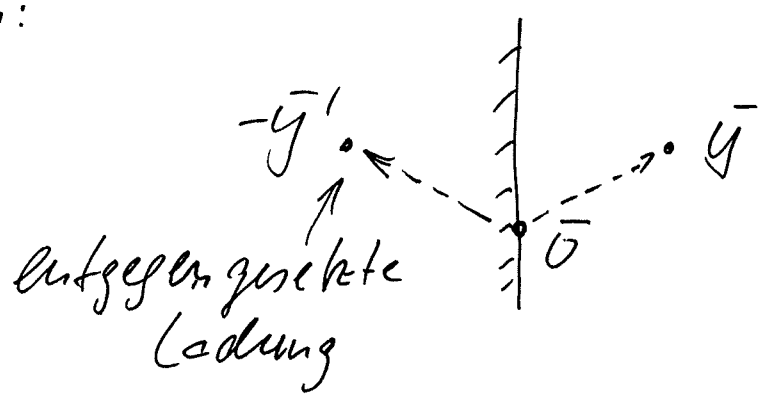
Also:



(Realisiert durch  $\infty$  ausgedehnte leitende Platte  
 $\Downarrow \phi = \text{const.}$ )

In Realität: Ladungen verteilen sich auf Oberfläche der Platte, so dass  $F$  erzeugt wird.

Spiegelladungsmethode: Man denke sich Platte entfernt und stellt dessen Ladungen dahinter, die in  $V$  den gleichen Effekt verursachen. Offensichtliche Idee im Halbraum:



$$\Rightarrow G(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{|\bar{x} - \bar{y}|} - \frac{1}{|\bar{x} - \bar{y}'|} \right)$$

$$(\bar{y}' = \bar{y} - 2\bar{n} \cdot (\bar{y} \cdot \bar{n}))$$

↑  
Einheitsvektor  
Orthog. zur Platte

Interessanteres Bsp.:

Leitende Kugel:



- Vielleicht überraschenderweise genügt eine einzige in der Kugel richtig platzierte Punktladung von passender Größe, um das Potential auf der Oberfläche zum Verschwinden zu bringen. (siehe  $\tilde{y}'$  im Bild oben.)

• Zugrunde liegende Idee:

Def.: Inversion an Sphäre vom Radius  $R$ :

$$I: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \bar{x} \rightarrow \frac{R^2}{|\bar{x}|^2} \bar{x}$$

Def.: Kelvin-Trf.:  $f \rightarrow \tilde{f}$  mit

$$\tilde{f}(\bar{x}) \equiv \left(\frac{R}{|\bar{x}|}\right)^{d-2} f(I(\bar{x})).$$

Fakt: (Im Prinzip leicht nachzurechnen)

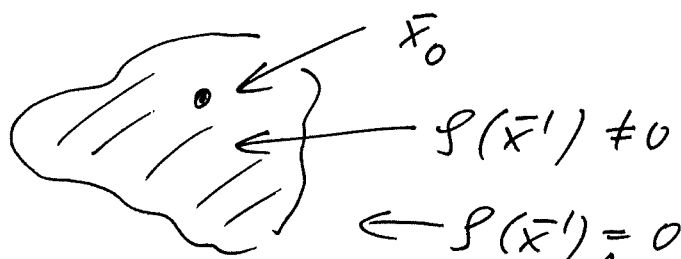
Die Kelvin-Trf. einer harmonischen Fkt.  $f$  ist wieder harmonisch.

Mit diesen Ideen sollte klar sein, wie und warum die Spiegelladungsmethode bei der Kugel so einfach funktioniert...  $\rightarrow$  Üb. (Falls  $V$  das Innere einer Sphäre ist, geht es auch.)

## 5.6 Multipol-Entwicklung: Kartesische

- Für die Praxis relevant: lokalisierte Ladungsverteilung, betrachtet aus großer Distanz:

$\phi(\vec{x})?$



- Allg. Formel:

$$\phi(\vec{x}) = \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} = \int d^3y \underbrace{\frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}_0 - \vec{y}|}}_{\text{Taylor-entw.}} \cdot \rho(\vec{x}_0 + \vec{y})$$

Taylor-entw. in  $\vec{y}$ , da nur kleine  $\vec{y}$  relevant sind.

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0 - \vec{y}|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (\vec{y} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}})^n \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|}$$

$$\underbrace{(\vec{y} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}})^n}_{\equiv y^{i_1} \dots y^{i_n} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_n}}$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! N_n 4\pi} \left[ (\partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|}) \right] \cdot \left. \begin{array}{l} \uparrow \\ \equiv \frac{\partial}{\partial x^{i_n}} \text{ etc.} \end{array} \right.$$

$$\cdot N_n \int d^3y y^{i_1} \dots y^{i_n} \rho(\vec{x}_0 + \vec{y})$$



## Ergänzung zur Taylor-Entwicklung in mehreren Variablen

- Sei  $f$  eine Fkt. auf  $\mathbb{R}^d$ , also  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ .
- Taylor-Entwicklung der Fkt.  $f(t\bar{x})$ , mit  $t \in \mathbb{R}$ , in  $t$  um  $t=0$ :

$$f(t\bar{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n \left[ (\partial_t)^n f(t\bar{x}) \right]_{t=0}$$

- Kettenregel:  $\partial_t f(t\bar{x}) = \frac{dy^i}{dt} \frac{\partial f}{\partial y^i}(\bar{y})$

$$\Downarrow$$

$$(\bar{y} \equiv t\bar{x})$$

$$\partial_t f(t\bar{x}) = \bar{x} \cdot \nabla_{\bar{y}} f(\bar{y})$$

- Es folgt:

$$f(t\bar{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n \left[ (\bar{x} \cdot \nabla_{\bar{y}})^n f(\bar{y}) \right]_{t=0}$$

$$\Rightarrow f(\bar{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{i_1} \dots x^{i_n} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} f(\bar{0})$$

- Eine analoge Rechnung mit  $\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0 + \bar{x}$  gibt:

$$\boxed{f(\bar{x}_0 + \bar{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{i_1} \dots x^{i_n} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} f(\bar{x}_0)}$$

## Unsere Anwendung:

Taylor-Entwicklung von  $\frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}_0 - \bar{y}|}$  in  $\bar{y}$ :

$$\frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}_0 - \bar{y}|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} y^{i_1} \dots y^{i_n} \left[ \frac{\partial}{\partial y^{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial y^{i_n}} \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}_0 - \bar{y}|} \right]_{\text{bei } \bar{y}=0}$$

Fakt:  $\frac{\partial}{\partial y^i} f(\bar{x} - \bar{y}) = - \frac{\partial}{\partial x^i} f(\bar{x} - \bar{y})$

$$\Rightarrow \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} y^{i_1} \dots y^{i_n} \left[ \left( - \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \right) \dots \left( - \frac{\partial}{\partial x^{i_n}} \right) \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}_0 - \bar{y}|} \right]_{\text{bei } \bar{y}=0}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}_0 - \bar{y}|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (\bar{y} \bar{\nabla}_{\bar{x}})^n \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}_0|} \quad \checkmark$$

- $N_n$  ist eine Normierungskonstante, mit  $N_0 = N_1 = 1$ ;  $N_2 = 3$ ;  $N_n$  ( $n > 2$ ) - Konventionen-abhängig  
( $N_2 = 3$  und damit die ganze Existenz von  $N_n$  hängt an der historischen Def. des Quadrupolmoments.)

- Die  $y$ -Integrale von  $\rho$  kodieren alle in der jeweiligen Ordnung der Taylor-Entw. relevanten Informationen über die Ladungsverteilung. Also:

$$\phi(\vec{x}) = \sum_n \frac{(-1)^n}{4\pi n! N_n} \left( \partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} \right) \cdot q^{i_1 \dots i_n}$$

leicht zu berechnen:  $\equiv N_n \int d^3y y^{i_1 \dots i_n} \rho(\vec{x}_0 + \vec{y})$

$n=0 \Rightarrow \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} \equiv \frac{1}{r}$  (feste Tensoren)

$n=1 \Rightarrow -\frac{(\vec{x} - \vec{x}_0)_i}{|\vec{x} - \vec{x}_0|^3} = -\frac{r_i}{r^3}$

$n=2 \Rightarrow \dots = \frac{3r_i r_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5}$

- Die Tensoren  $n$ -ter Stufe  $q^{i_1 \dots i_n}$  sind offensichtlich total symmetrisch:

$$\{q^{i_1 \dots i_n}\} \in \underbrace{(V \otimes \dots \otimes V)}_{n \text{ mal}} /_S \subset V \otimes \dots \otimes V \equiv V^{\otimes n}$$

↑  
symm.

- Nur ihre Projektion auf den sogenannten spurfreien Unterraum ist für  $\phi$  relevant.

Das folgt aus

$$\delta^{i_1 i_2} (\partial_{i_1} \dots \partial_{i_n}) \frac{1}{|x - \bar{x}_0|} = 0$$

[Könnten hier auch beliebiges anderes Indexpaar nehmen] (weil  $\Delta_x \frac{1}{|x - \bar{x}_0|} = 0$  für  $x \neq \bar{x}_0$ )

- Also können wir  $q^{i_1 \dots i_n}$  durch seine Projektion auf den spurfreien Unterraum

$$\text{ersetzen: } q \equiv q' ; \quad q^i \equiv q'^i$$

$$q^{ij} \equiv q'^{ij} - \frac{1}{3} \delta^{ij} q'^{kk}$$

$$q^{ijk} \equiv q'^{ijk} - \frac{1}{5} (\delta^{ij} q'^{kll} + \delta^{ik} q'^{jll} + \delta^{jk} q'^{ill})$$

$$q^{i_1 \dots i_n} = q'^{i_1 \dots i_n} - \dots$$

komplizierte allg. Formel

→ K.S. Thorne

Rev. Mod. Phys. 52 (1980) 299

- Unsere Formel für  $\phi$  bleibt gleich.  
Die  $q^{i_1 \dots i_n}$  sind jetzt total symm. und spurfrei, also

$$\{q^{i_1 \dots i_n}\} \in (V^{\otimes n})_{S, SF} \subset (V^{\otimes n})_S \subset V^{\otimes n}$$

$$\dim \dots = 2n+1 \quad ; \quad \dim \dots = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad ; \quad \dim(V^{\otimes n}) = 3^n$$

- Unsere finale Multipol-Entwicklungs-Formel:

$$\phi(\vec{x}) = \sum_n \frac{(-1)^n}{4\pi n! N_n} \left( \partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} \right) \underbrace{q^{i_1 \dots i_n}}_{\text{Multipol-Momente}}$$

$$q = \int d^3y \rho(\vec{x}_0 + \vec{y})$$

$$q^i \equiv \bar{p}^i = \int d^3y y^i \rho(\vec{x}_0 + \vec{y})$$

( $\bar{p}$   $\equiv$  Dipolmoment)

$$q^{ij} = \int d^3y (3y^i y^j - \vec{y}^2 \delta^{ij}) \rho(\vec{x}_0 + \vec{y})$$

$\uparrow$   $N_2$  durch obige Projektion auf spurfreien Teil.  
"Quadrupolmoment"



- Sei also  $V$  der Vektorraum der Fkt.-en auf  $S^1$ .  $V$  hat ein natürliches Skalarprodukt:

$$(f, g) \equiv \int_{-L/2}^{L/2} dx f^*(x) g(x)$$

- Es gibt viele mögliche Basen ( $\equiv$  vollst. Fkt.-systeme). Man wählt oft orthogonale oder sogar orthonormale Basen.
- Oft praktisch: Suche Basis, in der eine bestimmte wichtige Matrix (ein Operator) diagonal ist. (vgl. Trägheitstensor).
- Im Fall von Fkt.-Räumen sind die entsprechenden Objekte Operatoren, also lin. Abb.-en  $V \rightarrow V$ .
- Für uns oft wichtig: Laplace-Operator  $\Delta = \sum_i \partial_i^2$ .  
Für  $S^1$ :  $\Delta = \partial_x^2$ .
- Eigenfkt.-en dazu:  $e^{ikx}$ ;  $e^{ikx} = e^{ik(x+L)}$

$$\Rightarrow k = \frac{2\pi n}{L}; n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \text{Basis: } \left\{ \frac{e^{ik_n x}}{\sqrt{L}}; n \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{Orth. norm.: } \int_{-L/2}^{L/2} dx \frac{e^{-ik_n x}}{\sqrt{L}} \frac{e^{ik_m x}}{\sqrt{L}} = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx e^{-i(k_n - k_m)x} = \delta_{nm}$$

• Kommentar: Die Orthogonalität folgt hier automatisch, weil  $\Delta$  ein hermitescher bzw. symmetrischer Operator ist – das Analogon zu einer symm. od. herm. Matrix. Für letztere wissen Sie aus der lin. Alg., dass die Eigenvektoren orthogonal sind.

• Wir können jede Fkt. in die Basis zerlegen:

$$\left\| f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \cdot e^{ik_n x} / \sqrt{L} \right\|$$

Fourier-Reihe

• Die Koeffizienten ergeben sich durch Projektion auf die entspr. Basis-Vektoren:

$$\left\| f_n = \left( e^{ik_n x} / \sqrt{L}, f \right) = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L/2}^{L/2} dx e^{-ik_n x} f(x) \right\|$$

• Da  $e^{ik_n x} = \cos(k_n x) + i \sin(k_n x)$ , findet man sofort die alternative, rein reelle Basis

$$\{ e^{ik_n x} / \sqrt{L}, n \in \mathbb{Z} \} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1; \cos(k_n x); \\ \sin(k_n x); n \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$$

$\cos(0) \dashrightarrow$

(Diese Basis ist immer noch orthogonal; Prüfen Sie die Normierung selbst...)



- Multipliziert man diese Basis mit reellen Koeffizienten, so kann man reelle Fkt.-en bequem schreiben als

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(k_n x) + \sum_{n=1}^{\infty} s_n \sin(k_n x)$$

(Bestimmen Sie selbst die Formeln für  $c_n, s_n$ , indem Sie beide Seiten der obigen Gleichung mit  $\cos/\sin$  multiplizieren und integrieren.)

- Oft ist es auch nützlich, Fourier-Reihen für Fkt. mit bestimmten Randbedingungen auf Intervallen zu benutzen, z.B.

$$f(x); x \in [0, L/2]; f(0) = f(L/2) = 0$$

oder  $f'(0) = f'(L/2) = 0$   
etc.

(Finden Sie selbst die relevanten Basen.)

## 6.2 Fourier-Transformation

- Für Fkt.-en auf ganz  $\mathbb{R}$ , betrachte den Limes  $L \rightarrow \infty$  der obigen  $S^1$ -Analyse.

- $$f(x) = \sum_{k_n} f_n e^{ik_n x} / \sqrt{L} = \sum_{k_n} \underbrace{\frac{2\pi}{L}}_{\equiv \Delta k_n} \cdot \frac{1}{2\pi} f_n \sqrt{L} e^{ik_n x}$$

$$= \sum_{k_n} \Delta k_n \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi} f_n \sqrt{L}}_{\equiv \tilde{f}(k_n)} e^{ik_n x}$$

- In Limes:  $\left\| f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \tilde{f}(k) \right\|$

↑  
jetzt kontinuierl.  
Variable!

Vor dem Limes gilt außerdem:

$$f_n = \int_{-L/2}^{L/2} dx e^{-ik_n x} / \sqrt{L} \cdot f(x)$$

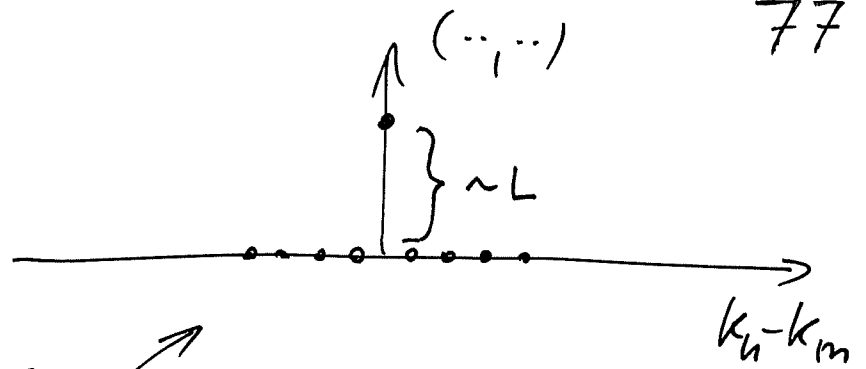
- In Limes:  $\left\| \tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x) \right\|$

Vor dem Limes haben wir die Orthogonalitäts-Relation  $(e^{ik_n x}, e^{ik_m x}) = L \delta_{mn}$

↑                    ↑

Das vollst. Funktionensystem ist jetzt kontinuierlich und wird ohne "L" definiert.

- Illustration dazu:



Wir erwarten, dass  $\nearrow$   
 hier im Limes so etwas, wie eine  $\delta$ -Fkt.  
 entsteht. Das kann man in der Tot zeigen.

- Ein einfacherer Weg, die relevante Formel zu gewinnen, besteht darin, direkt mit der  $\delta$ -Fkt. zu starten und die Fourier-Inf. anzuwenden:

$$f(x) = \delta(x-y) \xrightarrow[\text{Inf. in } x]{\text{Fourier}} \tilde{f}(k) = \int dx e^{-ikx} \delta(x-y) = e^{-iky}$$

- Da die Umkehr-Inf. uns zu  $f(x)$  zurückbringen muss, gilt:

$$\delta(x-y) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} e^{-iky}$$

$$\text{bzw. } \left\| \int dk e^{ik(x-y)} = 2\pi \delta(x-y) \right\|$$

Also gilt auch:

$$(e^{ikx}, e^{ik'x}) = \int dx e^{i(k-k')x} = 2\pi \delta(k-k')$$

- Man sagt auch, dass diese Basis "δ-Funktions-normiert" ist.

- Das Ganze geht völlig analog in d Dim.-en:

$$\tilde{f}(\bar{k}) = \int d^d x e^{-i\bar{k}\bar{x}} f(\bar{x}) ; f(\bar{x}) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\bar{k}\bar{x}} \tilde{f}(\bar{k})$$

(Zur Herleitung kann man von der Fourier-Reihe auf dem Raum  $(S^1)^d$  ausgehen, mit Basis  $e^{i\bar{k}\bar{x}} / L^{d/2}$

$$\& k_i = \frac{2\pi n_i}{L} ; \bar{n} \in \mathbb{Z}^d .)$$

### 6.3 freie Fkt. im Fourier-Raum

$$\Delta G(\bar{x}-\bar{y}) = -\delta^d(\bar{x}-\bar{y})$$

↓ Fourier

$$\Delta \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\bar{k}(\bar{x}-\bar{y})} \tilde{G}(\bar{k}) = - \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\bar{k}(\bar{x}-\bar{y})} \cdot 1 ,$$

$$\text{also: } -\bar{k}^2 \tilde{G}(\bar{k}) = -1 ; \tilde{G}(\bar{k}) = \frac{1}{\bar{k}^2}$$

Das ist offensichtlich " $-\Delta^{-1}$ "  
im Fourier-Raum.

$$\Rightarrow G(\bar{x}-\bar{y}) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\bar{k}(\bar{x}-\bar{y})} \cdot \frac{1}{\bar{k}^2}$$

Hängt wegen  $O(d)$ -Symm. nur von  $|\bar{x}-\bar{y}|$  ab.

Reskalierung:  $\bar{k} \rightarrow \bar{k}/|\bar{x}-\bar{y}|$

$$\Rightarrow G(\bar{x}-\bar{y}) = \underbrace{\frac{1}{|\bar{x}-\bar{y}|^{d-2}}}_{\checkmark} \cdot \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\bar{k} \cdot \hat{e}} \frac{1}{\bar{k}^2}$$

Einheitsvektor

Man könnte durch genaue Analyse dieser Formel sehr divergenten Integrals den konst. Faktor bestimmen, aber wir wollen dies nicht tun. Wir kennen die Normierung durch den Gaußschen Satz.

## 6.4 Fourier-Reihe und Polarkoordinaten

Betrachten wir ein E-Dynamik-Problem mit Zylindersymmetrie oder ähnlich die Poisson-Gl.

in  $d=2$ :

$$\Delta \phi = -\rho \quad ; \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^2$$

$$\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 = \frac{1}{r} \partial_r r \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2$$

$\uparrow$   
 $\ddot{u}$

$\underbrace{\quad}_{\equiv \Delta_\varphi}$

(Laplace-op. auf  $S^1$ )

• Jetzt ist  $\phi = \phi(r, \varphi)$ ;  $\varphi \in S^1$  bzw.  $\varphi \in (0, 2\pi)$ .

Wir wissen durch unser Studium der

Fourier-Reihe:

$$\phi(r, \varphi) = \sum_n \underbrace{\phi_n(r)} e^{in\varphi}$$

Ist hier besonders einfach, weil  $L=2\pi$ .

• Mit analogem Ansatz für  $\delta$  folgt:

$$\Delta \sum_n \phi_n(r) e^{in\varphi} = - \sum_n \delta_n(r) e^{in\varphi}$$

$$\Rightarrow \left( \frac{1}{r} \partial_r r \partial_r - \frac{n^2}{r^2} \right) \phi_n(r) = -\delta_n(r)$$

Aufgrund der Verwendung des vollst.

Funktionensystems  $e^{in\varphi}$  auf  $S^1$  hat sich

das Problem zu einer gewöhnl. Dgl. für

jedes  $n$  vereinfacht. Wir wollen dies hier

nicht weiter verfolgen sondern gehen gleich

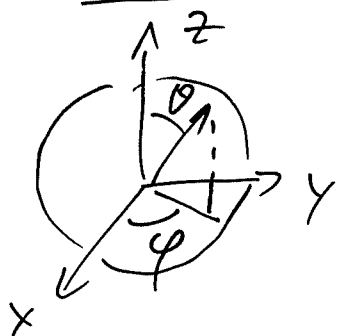
zum praktisch wichtigeren 3d-Fall.

## 6.5 Kugelflächenfunktionen (KFF)

81

- Eben gelernt:  $e^{in\varphi}$  ist vollst. Fkt. system auf  $S^1$ , welches  $\Delta_\varphi = \partial_\varphi^2$  diagonal macht.
- Auf der  $S^2$  gibt es ein entsprechendes Fkt.-system (die "KFF"), welches sich aus Physiker-Sicht besonders einfach mit den Methoden der Quantenmechanik gewinnen lässt.
- Wir verweisen für die Ableitung auf das kommende Semester (siehe auch Jackson, oder mein QM-Skript; oder viele andere Skripte & QM/EM-Bücher). Wir wissen jetzt genug über vollst. Fukt.-Systeme, um die KFF auch ohne Ableitung gewinnenbringend zu benutzen.

- Dazu: Erinnerung Kugelkoordinaten:



$$x = r \sin \theta \cos \varphi; \quad y = r \sin \theta \sin \varphi; \quad z = r \cos \theta$$

Laplace-Op. in Kugelkoord. ( $\rightarrow \Delta$ )

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \partial_r + \frac{1}{r^2} \Delta_{\varphi, \theta}$$

$$\Delta_{\theta, \varphi} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_{\theta} (\sin \theta) \partial_{\theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_{\varphi}^2$$

Eigenfunktionen dazu ("KFF"):

$$Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \quad ; \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

$$m = -\ell, -\ell+1, \dots, \ell-1, \ell$$

$$Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \cdot \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} \underbrace{P_{\ell}^m(\cos \theta)}_{\text{"zugeordnete Legendre-Polynome"}} e^{im\varphi}$$

"zugeordnete Legendre-Polynome"

$$P_{\ell}^m(z) = (-1)^m (1-z^2)^{m/2} \partial_z^m P_{\ell}(z) \quad (m \geq 0)$$

$$P_{\ell}^{-m}(z) = (-1)^m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_{\ell}^m(z)$$

"Legendre-Polynome"

(Orthogonalsystem auf  
 $z \in [-1, +1]$ )

$$P_{\ell}(z) = \frac{1}{2^{\ell} \ell!} \partial_z^{\ell} (z^2-1)^{\ell}$$

(vgl. schöne Zus.fassung in Nolting.)



Orthogonalität:

$$\underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d(\cos\theta)}_{\text{Flächenelement } (\equiv d\Omega) \text{ auf } S^2} Y_{\ell', m'}^*(\theta, \varphi) Y_{\ell, m}(\theta, \varphi) = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}$$

Eigenwerte:  $\Delta_{\theta, \varphi} Y_{\ell, m} = -\ell(\ell+1) Y_{\ell, m}$

6.6 Poisson-Gl. in Kugelkoordinaten  
& sphärische Multipolentwicklung

$$\Delta\phi = -\rho \Rightarrow \left( \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \partial_r + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta, \varphi} \right) \phi = -\rho$$

- Können Winkelabhängigkeit von  $\phi, \rho$  durch KFF beschreiben:

$$\phi = \sum_{\ell, m} \phi_{\ell m}(r) Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$$

$$\rho = \sum_{\ell, m} \rho_{\ell m}(r) Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$$

$$\Rightarrow \sum_{\ell m} \left( \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \partial_r - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) \phi_{\ell m} Y_{\ell m} = - \sum_{\ell m} \rho_{\ell m} Y_{\ell m}$$

$$\Rightarrow \left( \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \partial_r - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) \phi_{\ell m} = -\rho_{\ell m}$$

(Proj. auf Basisvektoren)

- Sei  $\rho = 0$  für  $r > r_{\max}$ . Dann gilt dort:

$$(\partial_r r^2 \partial_r - l(l+1)) \phi_{lm} = 0$$

$$\uparrow \\ \text{Ansatz: } \sim r^k$$

$$\Rightarrow k(k+1) - l(l+1) = 0 \Rightarrow k = l \text{ oder } k = -(l+1)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$   
 unphysikalisch  
 wegen Divergenz bei  
 $r \rightarrow \infty$

- Bisheriges Resultat:

$$\left( \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \partial_r - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \phi_{lm} = -\rho_{lm}$$

$$\uparrow \\ = \frac{c_{lm}}{r^{l+1}} \text{ bei } r > r_{\max}$$

- Wir wollen  $c_{lm}$  bestimmen.

Idee: Integriere Gleichung über  $r$ , so dass linke Seite  $c_{lm}$  liefert. Dies wird funktionieren mit  $\int dr v^{l+2}(\dots)$ .

$$\int dr v^l (\partial_r r^2 \partial_r - l(l+1)) \phi_{lm} = - \int dr v^{l+2} \rho_{lm}$$

↓ part. Integr.

$$v^{l+2} \partial_r \phi_{lm} \Big|_0^\infty - \int dr [e^l r^{l-1} v^2 \partial_r + l(l+1)] \phi_{lm} = - \dots$$

↓ hochmögliche part. Integr.

$$(r^{l+2} \partial_r - l r^{l+1}) \phi_{lm} \Big|_0^\infty - \int dr [l(l+1) - l(l+1)] \phi_{lm} = \int dr v^{l+2} g_{lm}$$

[Kein Beitrag von  $r=0$  da bei hinreichend flachen  $g$  das Potential und damit der Koeffizient  $\phi_{lm}$  bei  $r \rightarrow 0$  nicht so stark divergieren wird, um die  $(r^{l+1})$ -Unterdrückung zu überwinden.]

• Merke, dass bei  $r \rightarrow \infty$  gilt:  $\phi_{lm} = C_{lm} / r^{l+1}$

$$\Rightarrow -(2l+1) C_{lm} = - \int dr v^{l+2} g_{lm}$$

$$\Rightarrow C_{lm} = \frac{1}{2l+1} \int dr v^{l+2} \int d\Omega Y_{lm}^*(\Omega) g(r, \Omega)$$

$\uparrow$   $d\varphi d(\cos\theta)$        $\uparrow$   $\hat{=} \theta, \varphi$

$$C_{lm} = \frac{1}{2l+1} \underbrace{\int d^3r v^l g(\vec{r}) Y_{lm}^*(\Omega)}_{\hat{=} g_{lm}}$$

- Bei großem  $r$  ( $r > r_{\max}$ ) gilt also

$$\phi = \sum_{lm} \phi_{lm} Y_{lm} = \frac{q_{lm}}{(2l+1)r^{l+1}} \cdot Y_{lm}$$

- Zusammenfassend haben wir damit die "sphärische Multipolentwicklung":

$$\phi(r, \Omega) = \sum_{lm} \frac{Y_{lm}(\Omega)}{(2l+1)r^{l+1}} \cdot q_{lm}$$

$$\text{mit } q_{lm} = \int d^3r' r'^l Y_{lm}^*(\Omega') \rho(\vec{r}')$$

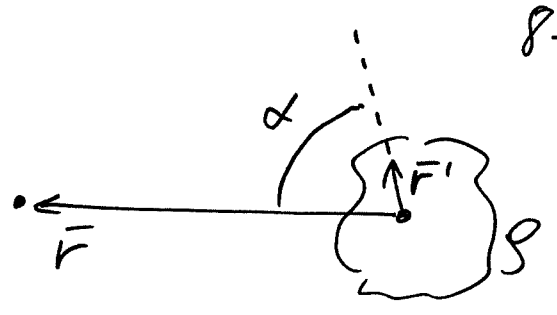
↑  
sphär. Multipolmomente

- Dies ist vollkommen analog zu unserer obigen kartesischen Formel (bei  $\vec{x}_0 = 0$ ).  
Man beachte die übereinstimmende Zahl der unabhängigen Koeffizienten in der Ordnung  $l$ :  $2l+1$ .

### 6.7 Greensche Fkt. in Kugelkoord. & sphär. Multi-

Es gibt einen eleganteren Weg zu polentw. dieser Formel, allerdings mit mehr Mathe-Input.

$$\phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}$$



↗ Legendre'sche Fkt.

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\alpha}} = \frac{1}{r\sqrt{1 + (r'/r)^2 - 2(r'/r)\cos\alpha}}$$

↖ Taylor-Entw. in (r'/r)

$$= \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\alpha) \left(\frac{r'}{r}\right)^l$$

$$= \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

Diese Gleichheit ist auch als "Additionstheorem für KFF" bekannt.

(Hier ist  $\alpha$  der Winkel zwischen den Richtungen  $(\theta', \varphi')$  &  $(\theta, \varphi)$ .)

Nach Ausführung der  $d^3r'$ -Integration erkennt man sofort unser vorheriges Resultat für die sphärr. Multipolentwicklung.  
 (Lit.: Römer / Fölgner / Bertelmann-Skr. / Nolting / Wikipedia!... aber mit Abst. am besten: Jackson !!)

## 7 Magnetostatik

### 7.1 Grundgleichungen; Poiss.-gl. für Vektor-Pot.

Erinnerung:  $\nabla \cdot \vec{E} = \rho$   $\nabla \cdot \vec{B} = 0$   
 $\nabla \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}/c$   $\nabla \times \vec{B} = \vec{J}/c + \dot{\vec{E}}/c$

- Elektrostatik folgt mit  $c \rightarrow \infty$ .
- Wir können aber auch  $c \rightarrow \infty$  &  $\vec{J} \rightarrow \infty$  betrachten, so dass  $\vec{J}/c$  endlich bleibt.

(Das ist phys. sinnvoll, da wir es bei makroskop. Strömen tatsächlich mit sehr vielen Ladungen zu tun haben.)

• Es folgt:  $\nabla \cdot \vec{E} = \rho$   $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  ||  
 $\nabla \times \vec{E} = 0$   $\nabla \times \vec{B} = \vec{J}/c$  ||  
  ||  
 El. Stat. Magnetostatik

muss ergänzt werden  
 durch die (technisch &  
 physikalisch) entscheidende  
 Konsistenzbedingung

$$\| \nabla \cdot \vec{J} = 0 \|$$

• Andere Logik: Maxwell-Gl.-en mit  
 $\dot{\vec{E}}, \dot{\vec{B}} = 0 \Rightarrow$  El. Statik + Magnetostatik

• Wie wissen noch:  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ .

Damit ist die Gl.  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  schon gelöst.

Hierzu kommt:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \vec{J} \Rightarrow \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \vec{J} \quad (c=1)$$

• Einführung:  $\vec{A}$  ist nur bis auf Eichtr. definiert, also  $\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \chi$

• Hier bequeme Eichung (= "Eichwahl"):

Coulomb-Eichung:  $\nabla \cdot \vec{A}' = 0$

(Diese Wahl ist immer möglich, da

$$0 = \nabla \cdot \vec{A}' = \nabla \cdot \vec{A} + \Delta \chi \Rightarrow \Delta \chi = -\nabla \cdot \vec{A}$$

↑  
 immer lösbar analog zu

" $\Delta \phi = -\rho$ " (in  $\mathbb{R}^3$ ).

• Nach Umbenennung  $\vec{A}' \rightarrow \vec{A}$ ,

$\Rightarrow$   $-\Delta \vec{A} = \vec{J}$  vektorielle Form d. Poiss.-Gl. ||

Die Lösung geschieht mit der aus der Elektrostatik bekannten Greenschen Fkt. Falls also  $\vec{j}$  im Unendl. schnell genug abfällt, so ist

$$\vec{A}(\vec{x}) = \int \frac{d^3y}{4\pi} \frac{\vec{j}(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{x}) = \int \frac{d^3y}{4\pi} \vec{\nabla}_x \times \frac{\vec{j}(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}$$

$$= - \int \frac{d^3y}{4\pi} \frac{(\vec{x}-\vec{y}) \times \vec{j}(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|^3}$$

|| verallgem.  
Biot-Savart-  
Gesetz

## 7.2 Helmholtz-Theorem (II)

Wir haben gesehen:

- $\vec{E}$  mit  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$  lässt sich als  $-\vec{\nabla}\phi$  schreiben
- $\vec{B}$  mit  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  lässt sich als  $\vec{\nabla} \times \vec{A}$  schreiben.
- $\vec{A}$  mit  $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$  lässt sich als  $\vec{A}' + \vec{\nabla}\chi$  schreiben, wobei  $\vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{B}$  ist und (offensichtlicherweise)  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\chi) = 0$ .

All dies sind Spezialfälle des



## Helmholtz - Theorems:

91

(vgl. Griffiths  
& Wikipedia)

Gegeben das allg. Vektorfeld  $\vec{F}$ , definiere

$$D = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \quad \text{und} \quad \vec{R} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$$

$\uparrow$  "Divergenz"       $\uparrow$  "Rotation".

Es gilt 
$$\vec{F} = \vec{\nabla} A + \vec{\nabla} \times \vec{B},$$

wobei

$$A = - \int \frac{d^3y}{4\pi} \frac{D(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad \& \quad \vec{B} = \int \frac{d^3y}{4\pi} \frac{\vec{R}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}.$$

In Worten: Jedes Vektorfeld (dass in  $\infty$  schnell genug abfällt) lässt sich eindeutig in einen divergenzfreien Teil ( $= \vec{\nabla} \times (\dots)$ ) und einen rotationsfreien Teil ( $= \vec{\nabla}(\dots)$ ) zerlegen.

Begründung: Wir wissen schon, dass bei hinreichend schnellem Abfall

$$\Delta \phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi = 0.$$

Dies überträgt sich sofort auf Vektorfelder:

$$\Delta \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = 0$$

- Wenn nun  $\bar{\nabla} \cdot (\bar{F} - \bar{F}') = 0$  &  $\bar{\nabla} \times (\bar{F} - \bar{F}') = 0$ ,  
 so folgt wegen

$$\bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} \times (\dots)) = \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot (\dots)) - \Delta (\dots)$$

("rot rot = grad div - Laplace")

und

$$\Delta (\bar{F} - \bar{F}') = \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot (\bar{F} - \bar{F}')) - \bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} \times (\bar{F} - \bar{F}')) = 0.$$

Also folgt  $\bar{F} = \bar{F}'$ . Ein Vektorfeld ist demnach eindeutig bestimmt, wenn seine Divergenz und Rotation bestimmt sind.

- Wir müssen also nur noch nachrechnen, dass  $\bar{\nabla} \cdot (\bar{\nabla} A) = \bar{\nabla} \cdot \bar{F}$  und  $\bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} \times \bar{B}) = \bar{\nabla} \times \bar{F}$ .

- Das Erste ist offensichtlich:

$$\Delta A = D = \bar{\nabla} \cdot \bar{F}, \text{ per Def.}$$

- Das Zweite folgt auch relativ mühelos:

$$\bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} \times \bar{B}) = -\Delta \bar{B} + \bar{\nabla} \int \frac{d^3y}{4\pi} \bar{\nabla}_x \frac{\bar{R}(\bar{y})}{|\bar{x} - \bar{y}|}$$

$$= \bar{R} = \bar{\nabla} \times \bar{F}$$

$$\bar{\nabla} \int \frac{d^3y}{4\pi} \left( -\bar{\nabla}_y \frac{1}{|\bar{x} - \bar{y}|} \right) \bar{R}(\bar{y})$$

part. Integr.  
 bzw. "fauß".

$$= \bar{\nabla} \int \frac{d^3y}{4\pi} \cdot \frac{1}{|\bar{x} - \bar{y}|} \bar{\nabla}_y \bar{R}(\bar{y}) = 0$$

= 0, weil  $\bar{R} = \bar{\nabla} \times \bar{F}$



## 7.3 Magn. Multipolentwicklung & Dipolmoment <sup>93</sup>

• Bisher:  $\vec{A}(\vec{x}) = \int \frac{d^3y}{4\pi} \cdot \frac{\vec{J}(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}$

$\vec{B}$  folgt mit  $\vec{\nabla} \times (\dots)$ .

- Falls nun  $\vec{J}$  in der Nähe eines Pkt.-es  $\vec{x}_0$  lokalisiert ist und  $\vec{x}$  weit entfernt, so ist es sinnvoll, in  $\vec{y}-\vec{x}_0$  zu entwickeln.  
O. B. d. A. sei  $\vec{x}_0 = \vec{0}$ . Dann folgt:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \underbrace{\frac{1}{|\vec{x}|} \cdot \int \frac{d^3y}{4\pi} \vec{J}(\vec{y})}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{|\vec{x}|^3} \int \frac{d^3y}{4\pi} (\vec{x} \cdot \vec{y}) \vec{J}(\vec{y})}_{\text{enthält Dipolmoment}} + \dots$$

(Der Strom erzeugt keinen magn. Monopol.) ①

② Quadrupol & höher...

① Begründung der Aussage "= 0":

$$j^i(\vec{y}) = \vec{\nabla} \cdot (y^i \vec{J}(\vec{y})), \text{ wegen } \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0.$$

Die Behauptung folgt dann aus dem Gaußschen Satz mit Rand im Unendl.

$$(2) \quad A^k = \frac{x^i}{4\pi|\vec{x}|^3} \int d^3y \, y^i j^k(y)$$

Behauptung: Dieser Ausdruck ist antisymm. in  $i, k$ .

Begründung:  $\int d^3y \, y^i j^k = \int d^3y \, y^i \nabla \cdot (y^k \vec{j})$

$$= \int d^3y \nabla \cdot (y^i y^k \vec{j}) - \int d^3y \nabla(y^i) \cdot \vec{j} y^k$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=0}$ 
 $= - \int d^3y \, y^k j^i$  ✓

mit Gauß

- Wir können also unter dem Integral wie folgt ersetzen:

$$y^i j^k = \frac{1}{2} (\delta^{ie} \delta^{km} - \delta^{im} \delta^{ke}) y^e j^m$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon^{ikr} \underbrace{\varepsilon^{rln}}_{(\vec{y} \times \vec{j})^r} y^e j^m$$

$$\Rightarrow A^k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi|\vec{x}|^3} \cdot x^i \varepsilon^{ikr} \int d^3y (\vec{y} \times \vec{j})^r$$

Definiere das mag. Dipolmoment

$$\| \bar{m} \equiv \frac{1}{2} \int d^3y \bar{y} \times \bar{j}(\bar{y}), \|$$

so dass

$$\| \bar{A} = \frac{\bar{m} \times \bar{x}}{4\pi |\bar{x}|^3} \|$$

mit  $j \rightarrow j/c$ ,  
falls wir nicht  $c=1$  setzen.

- Wir können daraus

notwendig auch das  $\bar{B}$ -Feld des Dipols

Berechnen:  $\bar{B} = \nabla \times \bar{A} = -\frac{1}{4\pi} \nabla \left( \frac{\bar{m} \cdot \bar{x}}{|\bar{x}|^3} \right) \|$   
 Übung!

(andere Form:  $\bar{B} = -\frac{1}{4\pi} (\bar{m} \cdot \nabla) \frac{\bar{x}}{|\bar{x}|^3}$ .)  
 Übung!

- Mikroskopisch gilt natürlich:

$$\bar{j} = \sum_A q_A \bar{v}_A \delta^3(\bar{x} - \bar{x}_A), \text{ so dass}$$

$$\begin{aligned} \bar{m} &= \frac{1}{2} \sum_A q_A \int d^3x \bar{x} \times \bar{v}_A \delta^3(\bar{x} - \bar{x}_A) \\ &= \frac{1}{2} \sum_A q_A \bar{x}_A \times \bar{v}_A = \frac{1}{2} \sum_A \left( \frac{q_A}{m_A} \right) \cdot \bar{L}_A. \end{aligned}$$

Mit c:  $m = \frac{q}{2mc} L$  für ein Teilchen.

$\Rightarrow m$  steht in engem Zus.hang mit dem Drehimpuls und dem Ladungs-Massen-Verhältnis des betreffenden Teilchens.  
(mehr dazu in QM (QFT)).

### 7.4 Dünne Leiter und Biot-Savart

Wir wollen jetzt noch den praktisch sehr wichtiger Fall dünner, stromdurchflossener Leiter betrachten. Dabei ist

$\Rightarrow \vec{J}(\vec{x}) = \int_{\Gamma} dy \left( \frac{dq}{dy} \right) \vec{J} \cdot \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0(\eta))$

Parameter  $\eta$   
mit Ladung  $dq$   
Bewirbt Leiter

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{d^3y}{|\vec{x} - \vec{y}|} \int_{\Gamma} dq \vec{J} \delta^3(\vec{y} - \vec{x}_0(\eta))$$

$$= \int_{\Gamma} dq \frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}_0|} \vec{J} \quad ; \quad \text{Nurke: } \frac{dq}{dt} = I; \quad \vec{J} dt = d\vec{x}_0$$

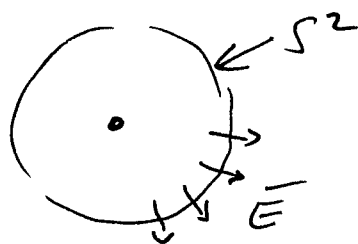
$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{x}) = \frac{I}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{d\vec{x}_0}{|\vec{x} - \vec{x}_0|}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{I}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{d\vec{x}_0 \times (\vec{x} - \vec{x}_0)}{|\vec{x} - \vec{x}_0|^3} \quad \parallel \quad \text{"Biot-Savart"}$$

## 7.5 Beispiele

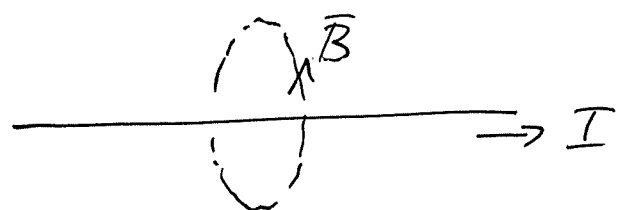
- Wie schon in der Elektrostatik ist das Integrieren des Fund.fesches (hier Biot-Savart, dort Coulomb) oft nicht der effizienteste Weg zum  $\vec{E}$  oder  $\vec{B}$ -Feld.
- Oft führen Symmetrieargumente zusammen mit den Integral-Formen der Maxwell-Gleichungen auf einfachere Art zum Ziel:

Elektrostatik,  $SO(3)$



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{f} = Q$$

Magnetostatik,  $SO(2)$

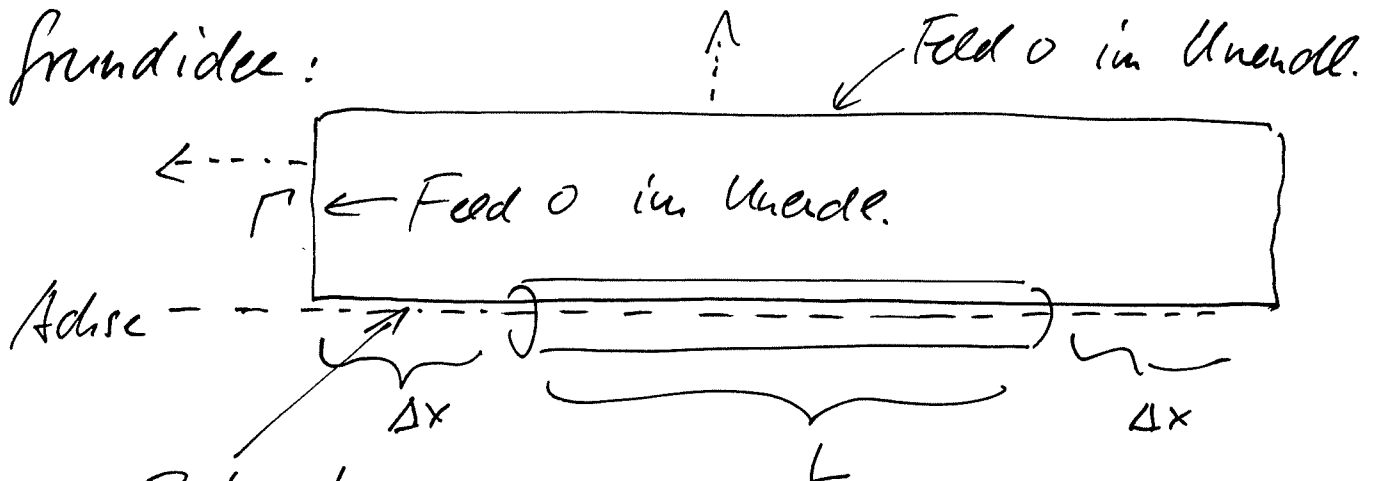


$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = I$$

→ mehr dazu in Übungen

- Hier wollen wir ein wichtiges Beispiel besprechen, das nicht ganz so einfach ist, wie es scheint: die lange Spule:

Grundidee:



Beitrag klein  
im Grenzwert  $L \rightarrow \infty$

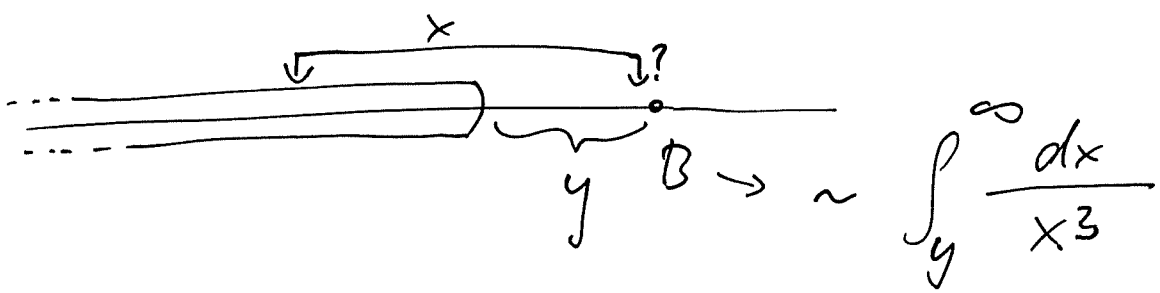
$$\Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = |\vec{B}| \cdot L = N \cdot I = n \cdot L \cdot I$$

$$\Rightarrow |\vec{B}| = n \cdot I$$

im Inneren der Spule.

↑  
Windungen pro  
Länge

Aber können wir den Beitrag aus den Bereichen  $\Delta x$  wirklich vernachlässigen?





Die " $1/x^3$ " folgt, wenn man sich die Spule als viele kleine Ringe denkt, und jeden davon als magn. Dipol. Also folgt  $B(y) \sim \frac{1}{y^2}$ . Das Integral darüber,  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{y^2}$  ist "im Unendlichen" konvergent. Also entsteht insgesamt irgendein endlicher Beitrag, der garantiert klein bleibt gegen den mit  $L$  wachsenden Beitrag aus dem Inneren der Spule (bei  $L \rightarrow \infty$ ). ✓

## 8 Elektrisch-Magnetische Dualität

### 8.1 Dualität ohne Ladungen

$$\text{Maxwell ohne Ladungen: } \begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 0 & \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\dot{\vec{B}} & \nabla \times \vec{B} &= \dot{\vec{E}} \end{aligned}$$

$$\text{Offensichtliche Symm.: } \{\vec{B}, \vec{E}\} \rightarrow \{\vec{E}, -\vec{B}\}$$

$$\text{bzw.: } \vec{B} \rightarrow \vec{E}; \vec{E} \rightarrow -\vec{B}.$$

(Wir erinnern uns: In der kovarianten Formulierung entspricht dies gerade der Ersetzung  $F^{\mu\nu} \rightarrow \tilde{F}^{\mu\nu}$  bzw.  $\tilde{F}^{\mu\nu} \rightarrow -F^{\mu\nu}$ .)

Kommentar: Die Theorie ohne Ladungen ist keineswegs "langweilig". Sie hat el.-mag. Wellen als Lösungen, die wir noch ausführlich diskutieren werden. (Siehe die entsprechende kurze Diskussion zu Wellen des Skalarfelds weiter oben.)

Resultat bisher: Ohne Ladungen sind  $\vec{E}$  &  $\vec{B}$  völlig gleichberechtigt!

Interessante Ergänzung: Wir haben sogar

Invarianz unter der kontinuierl. Symm.  $SU(2)$ :

$$\begin{pmatrix} \vec{B}' \\ \vec{E}' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \vec{B} \\ \vec{E} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

(Die obige diskrete Symm. entspricht

$$\mathbb{Z}_4 \subset SO(2) \quad \text{mit} \quad \varphi = \pm \frac{\pi}{2} : \quad \begin{array}{l} \vec{B} \rightarrow \vec{E}, \quad \vec{E} \rightarrow -\vec{B} \\ \vec{B} \rightarrow -\vec{E}, \quad \vec{E} \rightarrow \vec{B} \\ (\varphi = \pi \quad \vec{B} \rightarrow -\vec{B}, \quad \vec{E} \rightarrow -\vec{E}) \end{array}$$

- Man kann diese Symm. auch schon an der Wirkung erkennen. Die SO(2) rotiert auch  $F$  in  $\tilde{F}$ :

$$\begin{pmatrix} F \\ \tilde{F} \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} F \\ \tilde{F} \end{pmatrix}.$$

Infinitesimale Version dazu ( $\varphi \ll 1$ ):

$$\begin{aligned} F &\rightarrow F + \varphi \tilde{F} \\ \tilde{F} &\rightarrow \tilde{F} - \varphi F \end{aligned}$$

Also:  $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^2 \rightarrow \mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^2 - \frac{1}{2} F \tilde{F}$

Skalar:

$$F \tilde{F} \equiv F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} = F^{\mu\nu} \cdot \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$$

Man kann zeigen, dass dies eine totale Ableitung ist. (Das wird später, mit mächtigeren Methoden, offensichtlich werden.)

### 8.2 Dualität & Ladungen

Die obige  $\mathbb{Z}_2$  oder sogar  $SU(2)$ -Symm. ist natürlich in der realen Welt gebrochen.

- Grund ist das Fehlen mag. Ladungen (sogenannte "magnetische Monopole").  
Gäbe es solche, so würden sie eine Ladungsdichte  $\rho_m$  und Stromdichte  $\vec{j}_m$  erzeugen, so dass:

$$\partial_\mu F^{\nu\mu} = j_e^\nu \quad ; \quad \partial_\mu \tilde{F}^{\nu\mu} = -j_m^\nu$$

bzw.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \rho_e & \nabla \cdot \vec{B} &= \rho_m \\ \nabla \times \vec{B} &= \vec{j}_e + \dot{\vec{E}} & \nabla \times \vec{E} &= -\vec{j}_m - \dot{\vec{B}} \end{aligned} \quad ;$$

Von uns gewählte Konvention, damit man im mag. Coulomb-Gesetz kein Minus hat.

- Es scheint, man könnte so die Dualität als perfekte Symm. wiederherstellen, aber dem ist nicht so:

Selbst wenn es mag. Monopole gäbe, so erzwingt doch die QM, dass Teilchen ein diskretes ("quantisiertes") Ladungsspektrum

haben. Es gibt also z.B. Elektronen mit Masse und Ladung  $m, e$  sowie (vielleicht) Monopole mit Masse und Ladung  $m_m$  &  $e_m$ .  
 Eine perfekte Symm. "mag.  $\leftrightarrow$  elek." wird sich so i.A. nicht ergeben.

### Zusammenfassung:

- Ohne Ladungen haben wir eine elek.  $\leftrightarrow$  mag. Symmetrie (Das Wort Dualität ist hier ferner genommen nicht angemessen.)
- Mit Ladungen haben wir keine elek.-mag. Symm. aber immer noch eine "elek.-mag. Dualität".

Def: Eine Dualität ist die Existenz  
 von zwei verschiedenen math.  
 Formulierungen der gleichen  
 Theorie.

Im vorliegenden Fall ist das die Beschreibung mit dem fund. Feld  $F$  und

die mit dem fund. Feld  $\tilde{F}$  zusammen:

1) Die fund. Feldstärke ist  $F^{\mu\nu}$ . Sie erfüllt die Bianchi-Identität

$$\partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = -j_m^{\mu} \quad \text{mit} \quad \tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}.$$

Die Bew.-gl. ist  $\partial_\nu F^{\mu\nu} = j_e^{\mu}$ .

2) Die fund. Feldstärke ist  $\tilde{F}^{\mu\nu}$ . Sie erfüllt die Bianchi-Identität

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -j_e^{\mu} \quad \text{mit} \quad F^{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \tilde{F}_{\rho\sigma}.$$

Die Bew.-gl. ist  $\partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = j_m^{\mu}$ .

### 8.3 Dualität und Wirkung

Man könnte denken, das Obige sei reine Semantik – es gehe um eine reine Umdenkung von  $F$  oder  $\tilde{F}$  als "fund. Feldstärke".

Aber auf dem Niveau der Wirkung nicht. Man, dass die beiden Formulierungen echt verschieden sind. (Und für die QM ist die Wirkung entscheidend.)

- Um eine Wirkung hinzuschreiben, braucht man nämlich zwingend das Vektorpotential  $A_\mu$ , weil danach variiert wird. Und weil man darüber Ladungen koppelt. Aho!

### 1) El. Formulierung:

$$S = \int \left( -\frac{1}{4} F^2 \right) + \int j_e \cdot A \quad \text{mit} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Es gilt jetzt eben automatisch die

"triviale" Bianchi-Id.  $\partial \tilde{F} = 0$ , was mit mag. Ladungen unverträglich ist. Ihr Einbau in diese Formulierung ist erschwert (und unmöglich).

### 2) Mag. Formulierung:

$$S = \int \left( -\frac{1}{4} \tilde{F}^2 \right) + \int j_m \cdot \tilde{A} \quad \text{mit} \quad \tilde{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \tilde{A}_\nu - \partial_\nu \tilde{A}_\mu$$

Jetzt ist analog die Ankopplung elektr. Ladungen erschwert.

Hat man tatsächlich beide Arten von Ladungen,

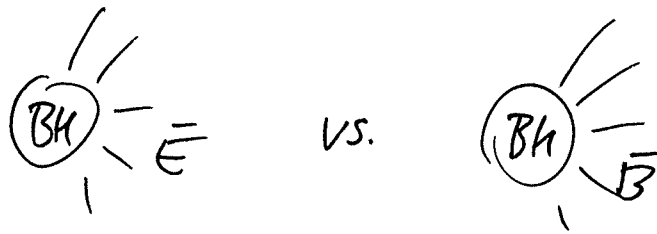
so ist es am einfachsten, jeweils in der Nähe der einen Art von Ladung die eine Formulierung zu wählen und in der Nähe der anderen Art von Ladung entsprechend die andere Formulierung. Im Bereich dazwischen hat man die Wahl.

(Noch schwieriger wird es, wenn man Teilchen hat, die sowohl elektrisch als auch mag. geladen sind - sogenannte "Dyonen".)

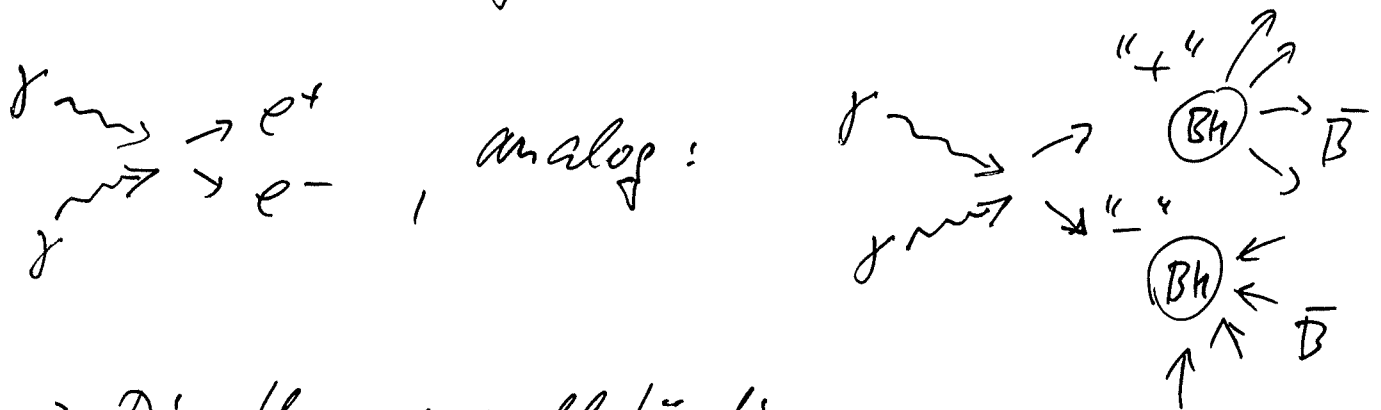
### Fortgeschrittener Kommentar:

Man könnte hoffen, dass all diese interessanten Diskussionen irrelevant sind, weil mag. Monopole nicht nur schwer sind (weswegen man sie noch nicht gefunden hat), sondern es nie überhaupt nicht gibt. Doch das ist aus theo. Sicht ausgeschlossen, denn es gibt schwarze Löcher, und diese können geladen sein: elektrisch oder magnetisch:





Wir können prinzipiell nicht hineinsehen  
 $\Rightarrow$  können also die mes. Variante also  
 auch nicht verbieten. Wir können in der  
 Quanten Theorie sogar ein Paar durch  
 Streuung erzeugen:



$\Rightarrow$  Die theoret. vollständige

Formulierung der ED schließt also  
 auf alle Fälle mag. Ladungen ein.

(Aber für alle praktischen Zwecke bleibt  
 es natürlich z. Z. bei  $\nabla \bar{B} = 0$ .)

( $\rightarrow$  lit.: Ledner)

## 9 ED in Differentialformen

### 9.1 Tangentialraum und Vektorfelder (M)

Sei  $M$  ein  $d$ -dim. Raum. Wir verstehen darunter eine Menge  $M$  von Punkten, die sich durch  $d$  reelle Koord. parametrisieren lässt, z.B.:

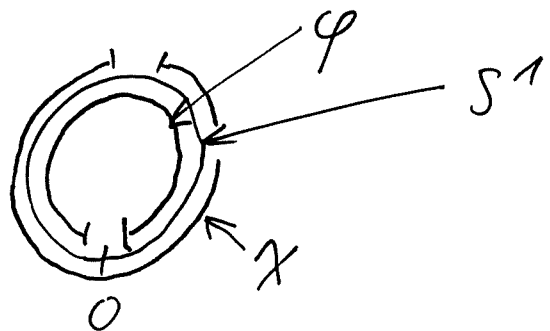
- $\mathbb{R}^d$  mit Koord.  $\{x^1, \dots, x^d\}$
- Untermengen davon, z.B. die Kugel  

$$(x^1)^2 + \dots + (x^d)^2 < R^2$$

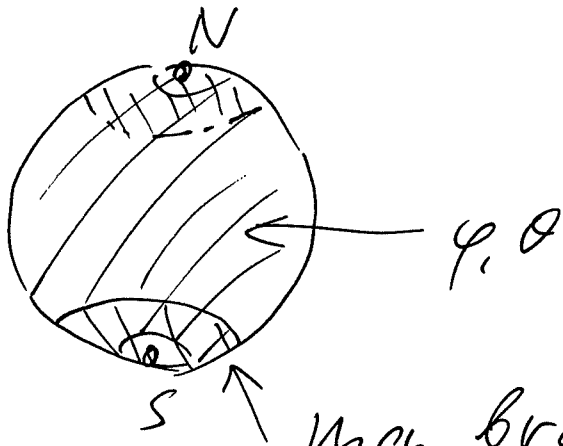
- $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  mit Kugelkoord., z.B.  
 $\{r, \vartheta, \varphi\}$  für  $\mathbb{R}^3$ .  
 (bei  $\bar{x} = 0$  ist dieses Koord. system  
 singulär.)

- $S^1$  mit Koordinaten  $\varphi \in (0, 2\pi)$  oder  
 $\chi \in (-\pi, \pi)$

(Mit einem einzigen  
 Koord. system  
 würde man hier  
 nicht auskommen!)



- $S^2 \setminus \{N, S\}$  mit den Winkeln  $(\theta, \varphi)$ . 109

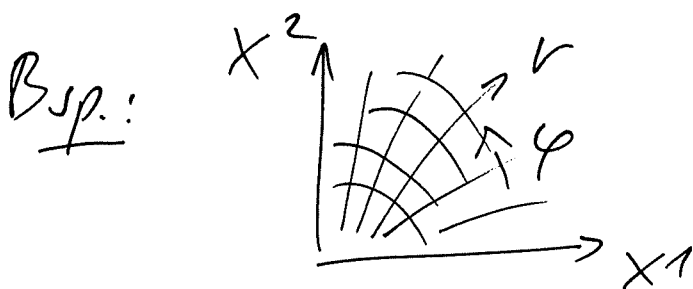


[wie bei Kugelkoordin.]

Man bräunte ein extra Koord.-system, um die Bereiche bei  $N, S$  mit einzuschließen.

Um das hier intuitiv erklärte Konzept des  $d$ -dim. Raumes zu formalisieren, braucht man den Begriff "differenzierbare Mannigfaltigkeit" ( $\rightarrow$  ART).

Wichtig: Die Koord.wahl ist nie eindeutig, es gibt verschiedene Koord.systeme zum gleichen Raum.

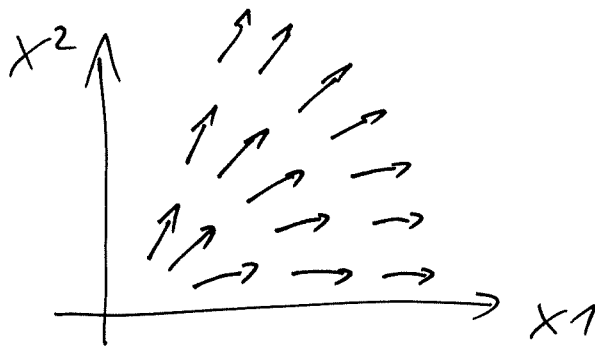


Aber:  $M$  ist "mathematische Realität", unabhängig von der Koord.wahl

Entscheidende Einsicht: Auch Vektorfelder auf  $M$  sind "real", unabh. von den Koord.

Bsp.:  $\mathbb{R}^2$  mit  $v, \varphi$ . Betrachte Feld

$$v(v, \varphi) = \{v_x = 1, v_y = 0\}$$



Äquivalente Beschreibung in  $x^1, x^2$ :

$$v(x^1, x^2) = \left\{ \frac{x^1}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}}, \frac{x^2}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}} \right\}$$

Es bleibt aber das gleiche Vektorfeld!

• Um dies klarer zu sehen, wollen wir eine koord. unabhängige Def. geben

|| Ein Vektorfeld ist ein Differentialoperator 1. Ordnung:  $D: f \mapsto Df$ .  
 ( $f$  - Funktion auf  $M$ ). ||

Explizit:  $D = v^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$

$$Df = v^i(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x^i}, \quad x \in M$$

- Die Abb.  $f \mapsto Df$  ist Koord. unabhängig definiert. (Weil der Begriff der Fkt. auf  $M$  auch keine Koord. braucht.)  $\cong \{x^1, \dots, x^d\}$

- Man kann aber  $D$ , wie oben, explizit in Koord. aufschreiben. Dabei werden die Komponenten  $v^i$  des zu  $D$  gehörigen Vektorfeldes eingeführt.

- Man kann Koord. wechseln:

$$D = v^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \& \quad D = v'^i(x) \frac{\partial}{\partial x'^i}$$

(z.B.  $x'^1 = v$ ,  $x'^2 = \varphi$ )

- Mit der Kettenregel ergibt sich die

Umrechnung:  $v^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \left( v^i \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x'^j} = v'^j \frac{\partial}{\partial x'^j}$

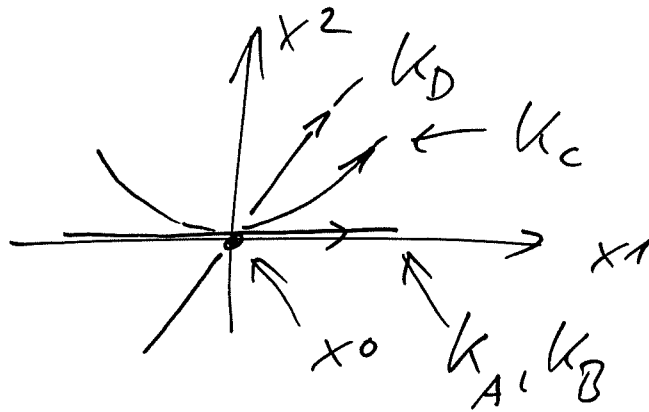
$$\Rightarrow \left\| v'^i = \left( \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \right) v^j \right\|$$

- Wir geben noch eine zweite

### Koord. unabh. Def. eines Vektorfeldes.

Dazu definieren wir zunächst Koord. unabh., was ein Vektor an einem Pkt.  $x_0 \in M$  ist:

- Betrachte alle parametrisierten Kurven durch  $x_0$ :  $\lambda \mapsto x(\lambda) \in M$  mit  $x(\lambda=0) = x_0$ .
- Betrachte als Bsp.  $\mathbb{R}^2$  und  $x_0 = \{0,0\}$ .



$$K_A = K_A(\lambda) = \{\lambda, 0\}$$

$$K_B = \{2\lambda, 0\}$$

$$K_C = \{\lambda, \lambda^2\}$$

$$K_D = \{\lambda, \lambda\}$$

// Def.: Zwei Kurven sind äquivalent, falls die Komponenten  $K'_i|_{x_0}$  in einem Koord. syst. gleich sind //

113

(Man kann zeigen, dass sie dann auch in allen anderen Koord. systemen gleich sind.)

Hier:  $k_A = \{1, 0\}$

$$k_B = \{2, 0\}$$

$$k_C = \{1, 0\}$$

$$k_D = \{1, 1\}$$

äquivalent!

Ausdrücklich:

gleiche Induziertheit  
der Kurve am Pkt.  $x_0$ .

Def.: Ein Tangentialvektor an einem Pkt.  $x_0$  ist eine Äquivalenzklasse von Kurven durch  $x_0$ .

(Der Tangentialraum  $T_p$  an einem Pkt.  $p \in M$  ist die Menge aller Tangentialvektoren.

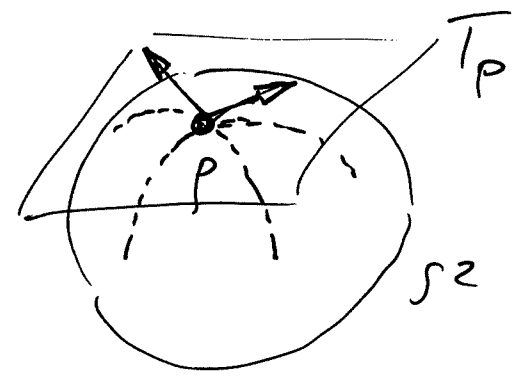
$T_p$  ist ein Vektorraum. Man muss natürlich die Axiome prüfen ...)

Vektorfeld: Abb.  $M \ni p \xrightarrow{\nu} \nu(p) \in T_p$   
 (für alle  $p$ )

Die obigen Definitionen von Vektorfeldern  $\nu$  über Diff. operatoren & Kurven sind äquivalent. Praktisch brauchen wir nur:

$\| \nu = \{ \nu^i(x) \}$  mit  $\nu^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \nu^j \|$

Bsp.:



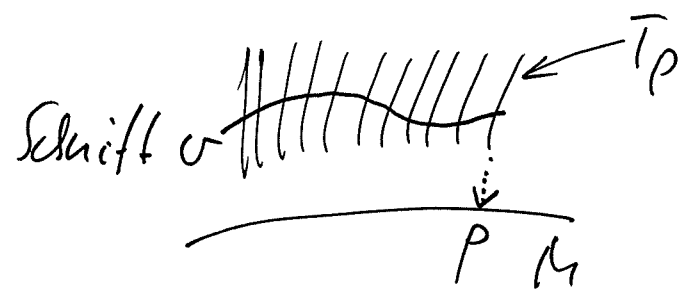
Bezugnehmend auf die Def. über Diff. operatoren kann man auch sagen:

Die Vektoren  $\partial_i|_p$  bilden eine Basis von  $T_p$  für jedes  $p$ .  
 $D_\nu = \nu = \nu^i \partial_i$  ist das Vektorfeld  $\nu$  zerlegt in diese Basis.  
 $\nu^i(x)$  sind die Komponenten in der Basis  $\partial_i$  (gleich für alle  $x \in M$ ).



Formalere Sprechweise:

Die Menge der  $T_p$  ( $p \in M$ ) ist das Tangentialbündel. Vektorfelder sind Schnitte im Tangentialbündel:



9.2 Cotangentraum und 1-Formen

Für jedes  $p \in M$  ist  $(T_p)^*$  der Cotangentraum. Elemente von  $T_p^* \equiv (T_p)^*$  sind Cotangentenvektoren oder kurz Covektoren.

1-Formen  $\equiv$  Covektorfelder sind Abb.-en

$$M \ni p \longmapsto \omega(p) \in T_p^* \quad (\text{für alle } p)$$

[Formaler: Die  $T_p^*$  bilden zusammen das Cotangentbündel. 1-Formen sind Schnitte im Cotang.bündel.]

Es ist bequem, die duale Basis  $dx^i$  zu den  $\partial_i$  zu definieren durch:

$$T_p \ni \partial_i ; T_p^* \ni dx^i ; dx^i(\partial_j) = \delta^i_j$$

$$\uparrow$$

$$\equiv \frac{\partial}{\partial x^j}$$

- Covektor:  $\omega(p) = \omega_i dx^i|_p$
- Covektorfeld  $\equiv$  1-Form:  $\omega = \omega_i(x) dx^i$

Anwendung auf Vektorfeld:

$$\omega(v) = \omega_i dx^i(v^j \partial_j) = \omega_i v^j \delta^i_j = \omega_i v^i$$

Nebenbemerkung: Falls es eine Metrik gibt, so kann man diese als Abb. von den Vektorfeldern auf die 1-Formen auffassen:

$$v \mapsto \omega = \omega_i dx^i \text{ mit } \omega_i = g_{ij} v^j$$

Zentrales Bsp.: Zu jeder Fkt.  $f$  gehört natürl.weise die 1-Form  $\omega = df$ , welche definiert ist durch

$$\| df(v) = v^i \partial_i(f) = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \|$$

Äquivalent dazu: Zu  $v$  gehört der Diff. operator  $D_v$  und  $df$  ist definiert durch  $df(v) = D_v f$ .

Behauptung:  $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$

Begründung:  $df(v) = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i(v^j \partial_j) = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$

↑  
vgl. Def. oben ✓

### 9.3 Höhere p-Formen

Höhere p-Formen  $\equiv$  Felder, die Werte in  $(T_q^*)^{\otimes p}$  annehmen  
 $\uparrow$  (für alle  $q \in M$ )  
 total antisymm. Unterraum.

$\equiv$  total antisymm. Tensor-Felder vom Rang p.

• Betrachte Bsp.  $p=2$ :

$T_q^* \otimes T_q^*$  hat Basis  $\{dx^i \otimes dx^j, i, j \in 1, \dots, d\}$

Raum der bilinearen Funktionen auf  $T_q$ :

$$(dx^i \otimes dx^j)(\partial_k, \partial_l) \equiv dx^i(\partial_k) \cdot dx^j(\partial_l) = \delta_k^i \delta_l^j$$

• Allg. Element von  $(T_q^*)^{\otimes 2}$ :  $\omega_{ij} dx^i \otimes dx^j$

- Die für  $p$ -Formen entscheidende extra Forderung ist die totale Antisymm., d.h.  $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$

- analog für  $p > 2$ :

$$\omega_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_p}$$

$$\text{mit } \omega_{i_1 \dots i_p} = (-1)^{\text{sgn}(\sigma)} \omega_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(p)}}$$

- Es ist üblich, für die antisymm. Unterräume eine spezielle Basis zu nutzen:

$$dx^i \wedge dx^j \equiv dx^i \otimes dx^j - dx^j \otimes dx^i$$

analog für  $p > 2$ :

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \equiv \sum_{\sigma} (-1)^{\text{sgn}(\sigma)} dx^{i_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes dx^{i_{\sigma(p)}}$$

"wedge"

- Allg. 2-Form:  $\omega^2(x) = \frac{1}{2} \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j$

$$p\text{-Form: } \omega^p(x) = \frac{1}{p!} \omega_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

- Oft wichtig: In jeder Dimension gibt es sogenannte "Top-Formen" mit  $d=p$ . Z.B. bei

$$d=3: \omega^3 = \frac{1}{3!} \omega_{ijk} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k = \omega_{123} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

- Anwendung auf Vektoren bzw. Vektor-  
felder:

Sei  $v = v^i \partial_i$  ;  $w = w^i \partial_i$

$$\omega(v, w) = \frac{1}{2} \omega_{ij} dx^i dx^j \quad (v^k \partial_k, w^l \partial_l)$$

$$= \omega_{ij} v^i w^j$$

- Zentrales Konzept:

Äußere Ableitung

$d: \omega^p \mapsto \omega^{p+1} = d\omega^p$

Def.:

$$d(\omega_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \dots dx^{i_p}) = \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \omega_{i_1 \dots i_p} \right) dx^j dx^{i_1} \dots dx^{i_p}$$

- Einfachstes Bsp dazu:

$$df = d(f) = \partial_i f dx^i = (df)_i dx^i$$

↑  
0-Form  $\equiv$  Funktion

- Unser zentrales Bsp:  $A = A_\mu dx^\mu$

$$dA = \partial_\mu A_\nu dx^\mu dx^\nu = \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) dx^\mu dx^\nu$$

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \Rightarrow \underline{\underline{F = dA}}$$

- Man kann  $p$ -Formen multiplizieren  
(geht zurück auf Produkt von Tensoren):

$$\omega^p, \omega^k \xrightarrow{\quad} \omega^{p+k} \equiv \omega^p \wedge \omega^k$$

↑  
"äußeres Produkt"

Def.:  $\omega_{i_1 \dots i_{p+k}}^{p+k} \equiv \frac{(p+k)!}{p!k!} \omega_{[i_1 \dots i_p} \omega_{i_{p+1} \dots i_{p+k}]}$

(Axiomatisch definiert durch Assoziativität, Distributivität und Antisymmetrie.)

(Auch: Konsistent mit "Nebeneinanderschreiben" der  $dx^i$ 's.)

• Produktregel:

$$d(\omega^p \wedge \omega^k) = d\omega^p \wedge \omega^k + (-1)^p \omega^p \wedge d\omega^k$$

• Wichtiger Fakt: All dies bedarf keiner Metrik – es geht ganz allgemein auf Räumen, die lokal wie  $\mathbb{R}^d$  aussehen. Hat man aber zusätzlich eine Metrik, so gibt es die natürliche Abb. des

Hodge-Star:  $* : \omega^p \rightarrow (*\omega^p) \equiv \omega^{d-p}$

Def.:  $(*\omega^p)_{i_1 \dots i_{d-p}} \equiv \frac{\sqrt{|\det g|}}{p!} (\omega^p)_{j_1 \dots j_p} \epsilon^{j_1 \dots j_p i_1 \dots i_{d-p}}$

Metrik:  $g_{ij}$  mit inverser Metrik gehoben

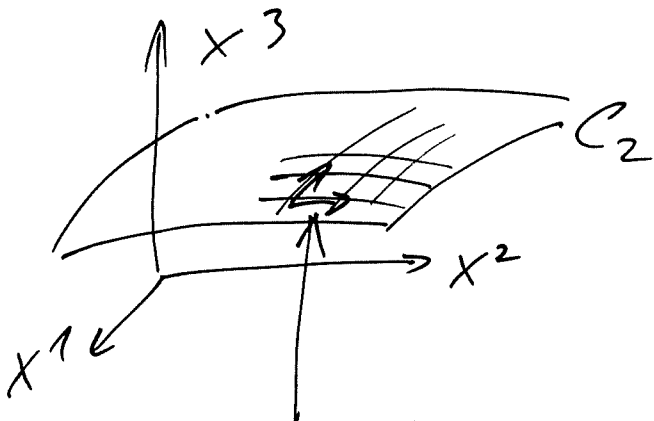
Für uns entscheidendes Bsp.:

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$(*F)_{\mu\nu} = \frac{\sqrt{|\det g|}}{2} \epsilon_{\mu\nu\sigma\delta} F^{\sigma\delta} = \tilde{F}_{\mu\nu}$$

### 9.4 Integration von p-Formen

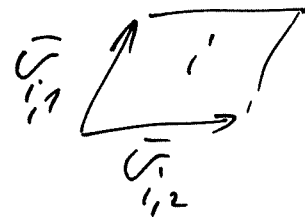
- Man kann eine p-Form natürlicherweise über eine p-dimensionale Hyperfläche integrieren. Bsp.:  $p=2, d=3$



$C_2$  zerlegt in viele kleine Parallelepiped

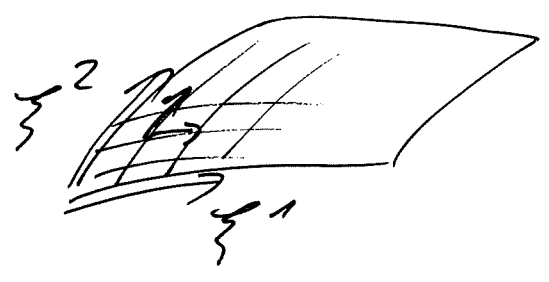
$$\int_{C_2} \omega^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \omega^2(\bar{v}_{i,1}, \bar{v}_{i,2})$$

Zwei Vektoren, die das Parallelepiped Nr. "i" aufspannen:



- Um ganz explizit zu werden, wollen wir  $C_2$  durch Koordinaten  $\zeta^1, \zeta^2$  parametrisieren. (Man denke z.B. an  $O, \varphi$ , falls  $C_2 = S^2 \subset \mathbb{R}^3$ .)

Dann ist z.B.  $v_1 = \Delta \xi^1 \frac{\partial}{\partial \xi^1}$ ;  $v_2 = \Delta \xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi^2}$



Es folgt:

$$\int_{C_2} \omega^2 = \lim \sum \omega(v_1, v_2) \quad (\text{Index "i" unterdrückt})$$

$$= \lim \sum \frac{1}{2} \left[ \omega_{12} d\xi^1 d\xi^2 \left( \Delta \xi^1 \frac{\partial}{\partial \xi^1}, \Delta \xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi^2} \right) + \omega_{21} d\xi^2 d\xi^1 \left( \Delta \xi^1 \frac{\partial}{\partial \xi^1}, \Delta \xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi^2} \right) \right]$$

$$= \lim \sum \omega_{12} \Delta \xi^1 \Delta \xi^2 = \int d\xi^1 d\xi^2 \omega_{12}$$

Analog für allg. p & d:

$$\int_{C_p} \omega^p = \int d\xi^1 \dots d\xi^p \omega_{12\dots p} (\xi^1, \dots, \xi^p)$$

Bemerkung: Aus Sicht der p-dim. Hyperfläche ist  $\omega^p$  eine Top-Form. Wir müssen also immer nur Top-Formen integrieren. Top-Formen kann man immer als  $\omega_{i_1 \dots i_p} = \varepsilon_{i_1 \dots i_p} f$  schreiben, wobei  $f$  eine Fkt. ist. Diese wird am Ende einfach "riemannsch" integriert.



Bemerkung: Koordinatenunabhängigkeit  
nicht man wie folgt:

$$\int d\xi^1 \dots d\xi^p \omega_{1\dots p} = \int d\xi'^1 \dots d\xi'^p \underbrace{\left| \det \left( \frac{\partial \xi^i}{\partial \xi'^j} \right) \right|}_{= \omega'_{1\dots p}} \omega_{1\dots p}$$

Folgt aus IV.  $\rightarrow = \omega'_{1\dots p}$   
bei Koord.wechsel:

$$\omega'_{1\dots p} = \omega_{j_1 \dots j_p} \left( \frac{\partial \xi^{j_1}}{\partial \xi'^{i_1}} \right) \dots \left( \frac{\partial \xi^{j_p}}{\partial \xi'^{i_p}} \right)$$

$$\uparrow$$

$$\sim \varepsilon_{j_1 \dots j_p}$$

$\rightarrow$  "det" ergibt sich.  $\checkmark$

Zentrales Resultat:

### Verallgemeinertes S. v. Stokes

$$\left\| \begin{array}{c} \text{Diagramm: } C_p \text{ (Bereich) mit } \partial C_p \text{ (Rand)} \\ \int_{\partial C_p} \omega_{p-1} = \int_{C_p} d\omega_{p-1} \end{array} \right\|$$

- Gauß, Stokes & Fund.satz d. Analysis sind Spezialfälle
- Herleitung: z.B. Altland / Van Delft.

## 9.5 Wirkung der ED & Maxwell-Fl.-en

- Teilchen charakterisiert durch Weltlinie  
 $\Rightarrow$  Feld, das an Teilchen koppelt, muss

$$1\text{-Form sein: } S_{\text{WW}} = e \int_{\text{WL}} A$$

- Bei Trf.  $A \rightarrow A + dX$  ( $X$  ist 0-Form)  
 ändert sich  $S_{\text{WW}}$  nur um Randterme:

$$\delta S_{\text{WW}} = e \int_i^f dX = e (X(x_f) - X(x_i))$$

irrelevant, wenn man  
 Trajektorie oder Feld  
 dazwischen variiert.

- Wir erklären jetzt  $A \rightarrow A + dX$  zur  
Eichsymmetrie.  $F \equiv dA$  ist die  
 natürliche Eichinv. Größe zu  $A$

$$(dF = d(dA) = 0).$$

- Wir erklären somit  $F$  zur Feldstärke  
 (2-Form)

- Wirkung für  $F$ :  $S = \int_{\mathbb{R}^{1,3}} \underbrace{\mathcal{L}(F)}_{4\text{-Form}}$

- 2 Optionen:  $F \wedge F$  &  $F \wedge *F$

$$(*F \wedge *F \sim F \wedge F)$$

$$\textcircled{1} F \wedge F = dA \wedge dA = d(A \wedge dA)$$

↑  
"totale Ableitung", also

$$\int F \wedge F = \oint A \wedge dA$$

↑ über 3d-Raum bei  $\infty \Rightarrow$  irrelevant

$$\textcircled{2} F \wedge *F$$

Behauptung: das entspricht  $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ .

Begründung:

$$F \wedge *F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge \frac{1}{2} (*F)_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta$$

$$= \frac{1}{4} F_{\mu\nu} \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} F^{\alpha\beta} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta$$

$$= -\frac{1}{4!} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_{\delta_1 \dots \delta_4} dx^{\delta_1} \wedge \dots \wedge dx^{\delta_4}$$

$$\text{Nütze: } -\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = 2 (\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\alpha^\nu \delta_\beta^\mu)$$

$$\Rightarrow F \wedge *F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \cdot \frac{1}{4!} \epsilon_{\delta_1 \dots \delta_4} dx^{\delta_1} \wedge \dots \wedge dx^{\delta_4}$$

$\hat{=} d^4x$

$$\| S = -\frac{1}{2} \int F_{\mu\nu} * F + e \int_{\text{WL}} A \quad ; \quad F = dA \quad \|$$

- Übergang zur kontinuierlichen Ladungsverteilung:  $S = \int \left( -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} * F + A_{\mu} j^{\mu} \right)$

↑  
3-Form

$$j^{\mu\nu\sigma} \sim \epsilon^{\mu\nu\sigma\delta} j^{\delta}$$

↑  
Unsere vertraute  
4-er Stromdichte

- Die 3-Form  $j$  ist math. natürliche Größe, um eine Stromdichte zu beschreiben. Denn  $j$  soll festlegen, wieviel Ladung in einem gegebenen Raumbolumen ist. Letzteres ist eine 3-Fläche in  $\mathbb{R}^{1,3}$ . Man sollte  $j$  also "natürlicherweise" über eine 3-Fläche  $\Sigma$  integrieren können:



$$\text{Ladung } Q = \int_{\Sigma} j \leftarrow \text{3-Form}$$

$\Sigma \leftarrow \text{3-Fläche}$

- Bewegungsgleichungen folgen wie immer durch Variation von  $S$  als Funktional von  $A$ :

$$S = \int \left( -\frac{1}{2} F_{1*} F + A_{1j} \right)$$

$$\delta S = \int \left( -\frac{1}{2} \underbrace{[\delta F_{1*} F + F_{1*} \delta F]}_{2\delta F_{1*} F} + \delta A_{1j} \right)$$

(Unsere frühere Rechnung mit  $F_{1*} F$  zeigt, dass  $F_{1*} G = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} G^{\mu\nu}$ , also symmetrisch in  $F$  &  $G$ .)

$$\delta S = \int \left( -\delta F_{1*} F + \delta A_{1j} \right)$$

$$= \int \left( -d\delta A_{1*} F + \delta A_{1j} \right)$$

$$= \int \left( -\delta A_{1*} d*F + \delta A_{1j} \right)$$

(Wir haben hier partiell integriert und den Randterm weggelassen. Das Vorzeichen hat nicht gewechselt, weil

$$d(\delta A_{1*} F) = d\delta A_{1*} F - \delta A_{1*} d*F.)$$

$$\delta S = \int \delta A_n (-d^* F + j)$$

$$\Rightarrow \boxed{d^* F = j ; dF = 0} \quad \text{Maxwell}$$

↑  
Wegen  $d^2 = 0$  &  $F = dA$

• Mit mog. Ladungen:  $d^* F = j_e ; dF = j_m$

• Dualität:  $\rightarrow d\tilde{F} = j_e ; d^* \tilde{F} = -j_m$

( $\tilde{F} = d\tilde{A}$  erzwingt jetzt  $j_e = 0$ .)

• Viele Aussagen der ED lassen sich  
gleichbringend mit Formeln darstellen,

- z.B.  $F = -dx^0 \wedge E + B$   $\rightarrow \ddot{U}$

↑  $1\text{-Form}$                       ↑  $2\text{-Form}$

mit  $E_i = (\vec{E})_i$                       mit  $B_{ij} = \epsilon_{ijk} (\vec{B})^k$

- z.B. Durch Integration <sup>von</sup>  $d^* F = j$  über Gebiet mit  
Rand  $\Sigma$  folgt:

(mittels Stokes)  $\oint_{\Sigma} d^* F = Q$   $\rightarrow \ddot{U}$

↑  
Fläche um Ladung

# 10 Dynamik geladener Teilchen und Energie-Impuls-Erhaltung

## 10.1 Bewegungsgleichungen für Teilchen im Feld

$$S = S_{\text{WW}} + S_{\text{Materie}} = e \int_{\text{WL}} A_\mu dx^\mu - m \int ds$$

$\uparrow$  ohne  $S_{\text{ED}}$ , da Feld per Annahme fest vorgegeben.

$\uparrow$  1 Teilchen

$\downarrow$  Ableitung nach  $\lambda$

$$\dots = \int d\lambda (e A_\mu \dot{x}^\mu - m \sqrt{-\dot{x}^2})$$

$\uparrow$  beliebiger Parameter für Weltlinie WL.

Variation bzgl.  $x^\mu$ :

$$0 = \int d\lambda \left( e A_\mu \delta x^\mu + e \partial_\nu A_\mu \delta x^\nu \dot{x}^\mu + m \frac{\dot{x}_\mu \delta \dot{x}^\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}} \right)$$

$\downarrow$  part. Integr. bei Vernachlässigung von Randtermen

$$0 = \int d\lambda \left( -e \frac{d}{d\lambda} (A_\mu) \delta x^\mu + e \partial_\mu A_\nu \dot{x}^\nu \delta x^\mu - m \dot{x}_\mu \delta x^\mu \right)$$

Wir heben auch benutzt, dass:  $U_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau}$ ;  $d\tau = d\lambda \sqrt{-\dot{x}^2}$

$\Rightarrow$

$$0 = \int d\lambda \left( -e (\partial_\nu A_\mu) \dot{x}^\nu \delta x^\mu + e (\partial_\mu A_\nu) \dot{x}^\nu \delta x^\mu - m \dot{x}^\mu \delta x^\mu \right)$$

$$\Rightarrow m \dot{x}^\mu = e F_{\mu\nu} \dot{x}^\nu \Rightarrow m \frac{d u^\mu}{d\tau} = e F_{\mu\nu} u^\nu \quad \parallel$$

$$\text{oder} \quad \frac{d p^\mu}{d\tau} = e F^{\mu\nu} u_\nu \quad \parallel$$

• Übergang zur nichtrelativist. Formulierung:

$$\underline{\underline{\mu=0}}: \quad \frac{d\varepsilon}{d\tau} = e F^{0i} u_i = e \vec{E} \cdot \vec{v}$$

(Zur Unterscheidung von  $E = |\vec{E}|$  steht hier  $\varepsilon$  für die Energie.)

$$\Rightarrow \frac{d\varepsilon}{dt} = e \vec{E} \cdot \vec{v} \quad \checkmark$$

$\mu=1\dots 3$ :

$$\left( \frac{d\vec{p}}{d\tau} \right)^i = e F^{i0} u_0 + e F^{ij} \gamma v_j$$

$$= (-\vec{E})^i = -\gamma \quad \quad \quad \downarrow \quad \varepsilon^{ijk} B_k$$

(Kap. 4.4/4.5)

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = e \vec{E} + e \vec{v} \times \vec{B} \equiv \vec{F}_L} \leftarrow \text{"Lorentz-Kraft"}$$

Die Formel mit  $c \neq 1$  folgt nach  $\vec{v} \rightarrow \vec{v}/c$ .

Dies muss so sein, weil  $\vec{E}$  &  $\vec{B}$  gleiche Einheit haben.



- Wichtige Beobachtung: Magn. Kraft trägt nicht zur Energieänderung d. Teilchen bei, weil  $(\vec{v} \times \vec{B}) \perp \vec{v}$ .

Kommentar: Man kann auch mit obigen  $S$  zunächst folgern, dass

$$L = -m\sqrt{1-v^2} - e\phi + e\vec{A} \cdot \vec{v}.$$

Die gewohnten Euler-Lagrange-Gl.-en

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = 0 \quad \text{geben dann direkt}$$

die Formel für  $\vec{F}_L$  wie oben. Aber wir brauchen später auch die Kovariante Form.

## 10.2 Beispiel: Homogene Felder

- a) Sei zunächst  $\vec{B} = 0$ ,  $\vec{E} = E\hat{e}_1$ ,  $\vec{v}(0) = 0$   
 $\Rightarrow$  1-dim. Problem

$$\frac{dp}{dt} = eE \Rightarrow p(t) = eEt \quad ; \quad p = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{t}{\ell} \quad \text{mit } \ell \equiv \frac{m}{eE}.$$

$\Rightarrow$  alle auftretenden Parameter gehen nun durch die natürliche Zeit/Längenskala  $l$  des Problems in die Dynamik ein. Es ist naheliegend  $\hat{t} = t/l$  und  $\hat{x} = x/l$  zu definieren, so dass

$$\frac{v}{\sqrt{1-v^2}} = \hat{t} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\hat{t}}{\sqrt{1+\hat{t}^2}}$$

$$\Rightarrow d\hat{x} = \frac{\hat{t} d\hat{t}}{\sqrt{1+\hat{t}^2}} \quad \Rightarrow \quad \hat{x} = \sqrt{1+\hat{t}^2} - 1$$

(Bei kleinen Zeiten gilt  $\hat{x} \sim \hat{t}^2$ , entsprechend der nicht relativistischen Erwartung.)

Ü: Stellen Sie die Verbindung zur Übungsaufgabe mit dem linearen Potential (Blatt 2) her.

Ü: Wie findet man die Lösung für allgemeinere Anfangsbedingungen?

b) Sei nun  $\vec{E} = 0$ ,  $B_{1,2} = 0$ ,  $B_3 = B \neq 0$ ,  $v_3(0) = 0$ .

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{v} \times \vec{B} \leftarrow \text{keine Komponente in 3-Richtung}$$

$\Rightarrow$  Bewegung nur in 1-2-Ebene

• Schreibe  $\vec{x} \rightarrow x_1 + ix_2 \in \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$

$\vec{v} \rightarrow v_1 + iv_2$  analog.

•  $(\vec{v} \times \vec{B})^i = \epsilon^{ijk} v_j B^k = \epsilon^{ij3} v_j B = B \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix}^i$

$\uparrow$   
nur 1,2 relevant

$\downarrow$   
 $\downarrow$

$$\hat{=} v_2 + i(-v_1) =$$

$$= -i(v_1 + iv_2) = -i\vec{v}$$

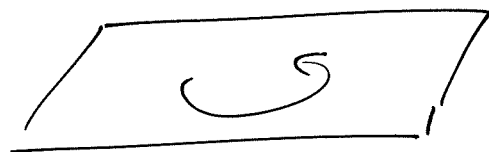
$\uparrow$   
 $\in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left( m \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}} \right) = -i\vec{v} B e$$

$|\vec{v}| = \text{const.}$ , da sich Energie nicht ändert.

$$\Rightarrow \dot{\vec{v}} = -i\omega \vec{v} \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{eB\sqrt{1-v^2}}{m} = \frac{eB}{\epsilon}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 e^{-i\omega t}, \quad \text{also:}$$



Abgelenkung:



zusätzliche  
gleichförmige  
Bewegung  $\parallel \vec{B}$ .

# 10.3 Energie-Impuls-Tensor eines Teilchenstroms

- Erinnerung:  $j^\mu = \rho v^\mu$ ;  $\rho \equiv$  Ladungsdichte
- Analog:  $j_n^\mu = n v^\mu$ ;  $n \equiv$  Teilchenzahldichte

$$\underbrace{\frac{dN}{dV_r}} = \frac{dN}{dV} \qquad \frac{dx^\mu}{dt} = \frac{dx^\mu}{d\tau} = u^\mu \cdot \frac{1}{\gamma}$$

Vol. im Ruhesystem des Stroms

(Der Strom ist hier als Strom exakt parallel fliegender Teilchen angekommen, also ohne Relativgeschwindigkeiten.)



$$\Rightarrow j_n^\mu = n_r u^\mu ; n_r = \text{Teilch.zahldichte im Ruhesystem}$$

- Analog:  $j_n^\mu \cdot p^\nu \equiv$  Stromdichte (mit Index  $\mu$ ) der Impulskomponente  $p^\nu$ , die vom Teilchenstrom

getragen wird. Dabei:  $p^{\nu} = m u^{\nu}$ .

135

(alle Massen seien gleich)  $\xrightarrow{\text{E.-I.-Tensor}}$

$$\Rightarrow \int n^{\mu} p^{\nu} = n_r u^{\mu} m u^{\nu} = \left[ \int n_r u^{\mu} u^{\nu} \equiv T^{\mu\nu} \right]$$

Massendichte = Energiedichte im Ruhesystem.

- Ladung & Teilchenzahl sind erhalten:

$$\partial_{\mu} j^{\mu} = 0, \quad \partial_{\mu} j_n^{\mu} = 0.$$

- Wegen Energie / Impulserhaltung erwarten wir  $\partial_{\mu} T^{\mu\nu} = 0$  für jedes  $\nu$ .

Doch das ändert sich, falls unser Strom einem (zur Einfachheit homogenen) Kraftfeld ausgesetzt ist:  $\partial_{\mu} T^{\mu\nu} = ?$

- Wir können dieses Vektorfeld in jedem System ausrechnen und dann "zurückboosten". Wählen wir das Ruhesystem des Stroms:

$$\partial_{\mu} T^{\mu\nu} = \partial_t T^{0\nu} = \partial_t n_r m u^0 u^{\nu}$$

$$\partial_t u^0 = \partial_t \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{v \partial_t v}{\sqrt{1-v^2}^3} = 0$$

Wegen  $v=0$ , selbst wenn  $\partial_t v \neq 0$ .

$$\Rightarrow \partial_\mu T^{\mu\nu} = n_v u^0 \partial_t p^\nu = n_v \frac{dp^\nu}{dt} \equiv f^\nu$$

$\uparrow$   
 $= 1$ 
 $\underbrace{\hspace{2em}}$   
 $\underbrace{\hspace{2em}}$

$\equiv$  Kraftdichte

$$\Rightarrow \boxed{\partial_\mu T^{\mu\nu} = n \frac{dp^\nu}{dt} \equiv f^\nu}$$

ist Vektorfeld, da  $n = dN/dV$   
&  $dV dt$  invariant.

- Alles geseigte überträgt sich auch auf inhomogene Situationen, so lange die Längenskala der Inhomogenität groß gegen den Teilchenabstand ist.
- Es überträgt sich auch auf Fälle mit Relativgeschwindigkeit  $\neq 0$ , also  $T \neq 0$  &  $p \neq 0$ .  
Dann gilt
 
$$T^{\mu\nu} = (s + p) u^\mu u^\nu + p \eta^{\mu\nu}$$
 Druck  $\uparrow$  (ohne Beweis)

• Bemerkung:  $T^{\mu\nu}$  beschreibt den

Fluss der Impulsdichte durch die Raumzeit.

Im Festkörper tragen dazu vor allem auch Spannungen bei. Deshalb heißt  $T^{\mu\nu}$  oft auch "Spannungstensor".

### 10.4 Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes

Erinnerung:  $\frac{dp^{\mu}}{dt} = e F^{\mu\nu} u_{\nu}$

$$\Rightarrow \frac{dp^{\mu}}{dt} = e F^{\mu\nu} v_{\nu}$$

Übergang zum Teilchenstrom durch Multiplikation mit  $dN/dV = n$ :

$$f^{\mu} = F^{\mu\nu} j_{\nu} = -F^{\mu\nu} \partial^{\rho} F_{\rho\nu}$$

↑  
mit Maxwell

ist gleich  $\partial_{\nu} T^{\nu\mu}_{\text{Materie}}$  (siehe oben)

- Wenn es uns gelingt, die rechte Seite in die Form  $-\partial_\nu T_{\text{Feld}}^{\nu\mu}$  zu bringen, haben wir inspanant

$$\partial_\nu \left[ T_{\text{Materie}}^{\nu\mu} + T_{\text{Feld}}^{\nu\mu} \right] = 0.$$

Dies entspricht der E.-I.-Erhaltung des Gesamtsystems.

- Versuchen wir die gewünschte Form zu erreichen:

$$F^{\mu\nu} \partial^{\rho} F_{\rho\nu} = \partial^{\rho} (F^{\mu\nu} F_{\rho\nu}) - \partial^{\rho} (F^{\mu\rho}) F_{\rho\nu}$$

$$\partial^{\rho} (F^{\mu\nu}) F_{\rho\nu} = \frac{1}{2} \left( \partial^{\rho} (F^{\mu\nu}) F_{\rho\nu} - \partial^{\nu} (F^{\mu\rho}) F_{\rho\nu} \right)$$

↑  
Antisymm. von  $F_{\rho\nu}$

$$= \frac{1}{2} \left( \partial^{\mu} (F^{\rho\nu}) F_{\rho\nu} \right) = \frac{1}{4} \partial^{\mu} (F^{\rho\nu} F_{\rho\nu})$$

↑  
Homog. Maxwell-Gl.

$$= \frac{1}{4} \partial^{\rho} \int_{\mathcal{S}} F^{\mu\rho} F_{\rho\nu}$$

$$\Rightarrow f^{\mu} = -\partial_{\rho} T_{\text{Feld}}^{\rho\mu}$$

mit  $T_{\text{Feld}}^{\rho\mu} \equiv F^{\mu}_{\nu} F^{\rho\nu} - \frac{1}{4} \eta^{\rho\mu} F^{\rho\nu} F_{\rho\nu}$



Äquivalent dazu:  $\partial_3 (T_{\text{Feld}}^{\beta\mu} + T_{\text{Materie}}^{\beta\mu}) = 0$

Kommentar: Nach unserer Herleitung ist

$T_{\text{Feld}}^{\beta\mu}$  nicht eindeutig. Man könnte Terme  $\delta T^{\beta\mu}$  mit  $\partial_3 \delta T^{\beta\mu} = 0$  addieren. Eindeutigkeit wird erreicht, wenn man Symmetrie in  $\beta\mu$  verlangt. (mehr dazu in ART).

Kommentar: Man kann das Noether-Th.

der Mechanik auf Feldtheorien erweitern.

Dann folgt  $T_{\text{Feld}}^{\beta\mu}$  &  $T_{\text{Materie}}^{\beta\mu}$  sowie deren

gemeinsame Erhaltung ("Divergenzfreiheit des 4-er Stroms  $T_{\text{gesamt}}^{\beta\mu}$ ") aus

der Translationsinvarianz der Wirkung in  $x^\mu$ .

Energiedichte & Strom

$T_{\text{Feld}}^{\mu 0} = (jE)^\mu$  ist also der 4-er-Strom

der Energiedichte. Damit ist, analog zum

4-er Strom der elektr. Ladung, die

0-te Komponente die eigentliche Energiedichte:

$$T_{\text{Feed}}^{00} = (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E})^0 = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{E}}^2 + \bar{\mathbf{B}}^2). \quad \parallel$$

↑  
ü!

Die räuml. Komponenten der Energiestromdichte bilden den

Poynting-Vektor

$$T_{\text{Feed}}^{i0} = (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E})^i = \underbrace{(\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{B}})^i}_{\equiv \bar{\mathbf{S}}^i} \quad \parallel$$

↑  
ü!

11 Elektromagnetische Wellen

m. relativistische Herleitung

- inhomog. Maxwell-gl.:  $\partial_\mu F^{\nu\mu} = j^\nu$
- Setze  $j^\nu = 0$  & nutze  $F^{\nu\mu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu$

$$\Rightarrow \partial^\nu (\partial A) - \partial^2 A^\nu = 0$$

Wähle zur  $\nearrow$   $\equiv \partial^\mu \partial_\mu \equiv \square$

Vereinfachung Lorenz-Eichung:  $\partial_\mu A^\mu = 0$

## Einschub:

Um die Coulomb-Gleichung  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$  zu implementieren, mussten wir  $\Delta X = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$  lösen. Ganz analog müssen wir jetzt  $\square X = -\partial A$  lösen. Bei passenden Randbedingungen ist dies, ebenso wie im Coulomb-Fall, immer möglich. Die entscheidende Idee ist die Greens-Fkt. zum Operator  $\square$ . Siehe später...

- Wir müssen also  $\square A^\mu = 0$  lösen, was völlig analog zum schon diskutierten skalaren Fall,  $\square \varphi = 0$ , ist.
- Wir wollen dies jetzt etwas allgemeiner diskutieren, mit der neuen Methode der Fourier-Trf.:

$$\varphi(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{\varphi}(k) e^{ikx}$$

[Hier ist  $kx = k_\mu x^\mu$ . Wir vertauschen

also, um der Kovarianz willen, in der  
 $x^0$ -Richtung die Rollen von Fourier- und  
 Inverser-Fourier-Transf.]

$$\square \varphi = 0 \Rightarrow \partial_\mu \partial^{\mu} \varphi = 0 \Rightarrow \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} k^2 \tilde{\varphi}(k) e^{ikx} = 0$$

Wegen der Umkehrbarkeit der Fourier-Transf.

$$\text{folgt } k^2 \tilde{\varphi}(k) = 0 \quad \forall k$$

$\Rightarrow$  Nur "Wellenzahlen"  $k$  mit  $k^2 = 0$

tragen zur Fourier-Zerlegung von  $\varphi(x)$  bei:

$$\square A^{\mu} = 0 \Rightarrow \dots \text{ analog } \dots$$

$$\Rightarrow A^{\mu}(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{A}^{\mu}(k) e^{ikx}$$

[Phys.  $A^{\mu}$  ist reell

$\Rightarrow$  betrachte Im od. Re von  $A^{\mu}$ ]

$\uparrow$   $\sim \delta(k^2)$ ,  
wie oben

$\Rightarrow A^{\mu}$  ist Superposition von  
 ebenen Wellen der Form

$$A^{\mu}(x) = \varepsilon^{\mu}(k) e^{ikx}$$

$\uparrow$   
 Polarisationsvektor

- Entscheidender Fakt: Völlig analog zum skalaren Fall impliziert  $k^2 = 0$ , dass  $\omega \equiv k^0 = |\vec{k}| \Rightarrow$  Gruppengeschw. = Phasengeschw. =  $1$  ( $= c$ ).  
 $\Rightarrow$  Keine Dispersion  $\Rightarrow$  beliebige Wellenpakete erhalten ihre Form.

## 11.2 Polarisation & Feldstärken

- Im Gegensatz zum sonst sehr ähnlichen Fall wo 4 masselose skalare  $\varphi^i(x)$ , sind die 4  $A^\mu(x)$  nicht unabhängig:

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad k_\mu \varepsilon^\mu(k) = 0$$

( $\Rightarrow$  nur noch 3 statt 4 Polarisationen)

- Berechnen wir nun die Feldstärken einer Welle  $\varepsilon^\mu(k) e^{ikx} = A^\mu(x)$ :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} A^0 - \partial_t \vec{A} = [-i\vec{k} \varepsilon^0(k) + ik^0 \vec{\varepsilon}(k)] e^{ikx}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = i\vec{k} \times \vec{\varepsilon}(k) e^{ikx}$$

- Zentrale Behauptung:

Für ebene Welle sind  $\bar{E}(x)$ ,  $\bar{B}(x)$  stets orthogonal zum (räuml. Teil des) Wellenvektor:  $\bar{E}, \bar{B} \perp \bar{k}$ .

- Für  $\bar{B}$  ist dies wegen  $\bar{B} \sim \bar{k} \times \bar{E}$  offensichtlich.

- Für  $\bar{E}$  berechnen wir:

$$\bar{k} \cdot \bar{E} = (-i|\bar{k}|^2 \varepsilon^0 + \underbrace{ik^0(\bar{E} \cdot \bar{k})}_{= \varepsilon^0 k^0}) e^{i\bar{k}x}$$

$$[\text{wegen } \varepsilon k = -\varepsilon^0 k^0 + \bar{\varepsilon} \bar{k} = 0]$$

$$= (-i|\bar{k}|^2 \varepsilon^0 + i(k^0)^2 \varepsilon^0) e^{i\bar{k}x} = 0 \quad \checkmark$$

$$[\text{wegen } k^2 = -(k^0)^2 + \bar{k}^2 = 0]$$

- Zerlege nun  $\bar{E}$  bzgl.  $\bar{k}$  in Parallel- & Orthogonal-Teil:  $\bar{E} = \bar{E}_\perp + \bar{E}_\parallel$

$$(\bar{E}_\perp \cdot \bar{k} = 0 ; \bar{E}_\parallel \parallel \bar{k}).$$

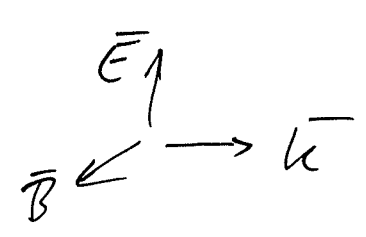
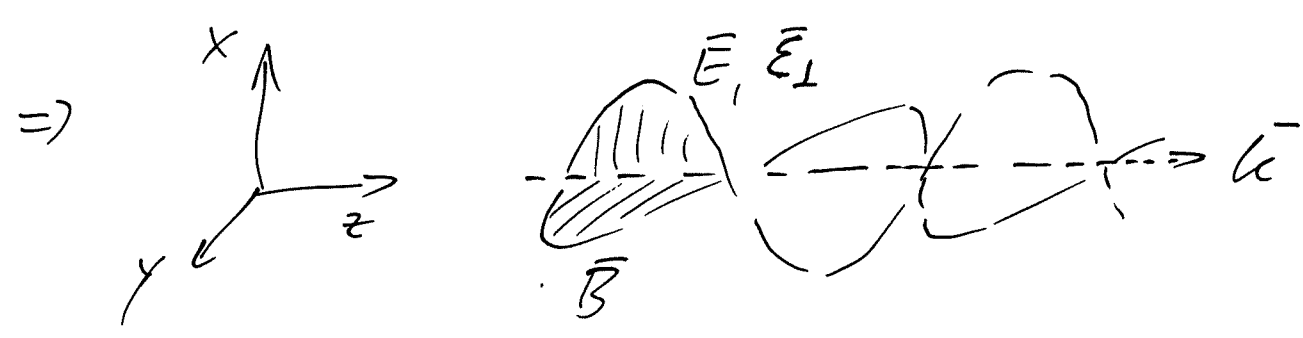
- Wie oben gezeigt, trägt  $\bar{E}_\parallel$  nicht zu  $\bar{E}, \bar{B}$  bei:

und kann o.B.d.A. zu Null gesetzt werden. [Besser: Man hat nach Fixierung der Eichung  $\partial A = 0$  immer noch Eichfreiheit übrig ("residual gauge freedom"). Diese kann man nutzen, um  $\bar{\epsilon}_{||} = 0$  zu wählen.]

• Ansatz: 
$$\vec{E} = ik^0 \bar{\epsilon}_{\perp} e^{ikx}$$

$$\vec{B} = i\vec{k} \times \bar{\epsilon}_{\perp} e^{ikx}$$

• ganz explizit: Fokussiere auf  $\mathcal{I}_u \vec{E} / \vec{B}$ .  
 Wähle  $\bar{\epsilon}_{\perp}$  reell.  
 o.B.d.A:  $\vec{k} \parallel \hat{e}_z$ ;  $\bar{\epsilon}_{\perp} \parallel \hat{e}_x$



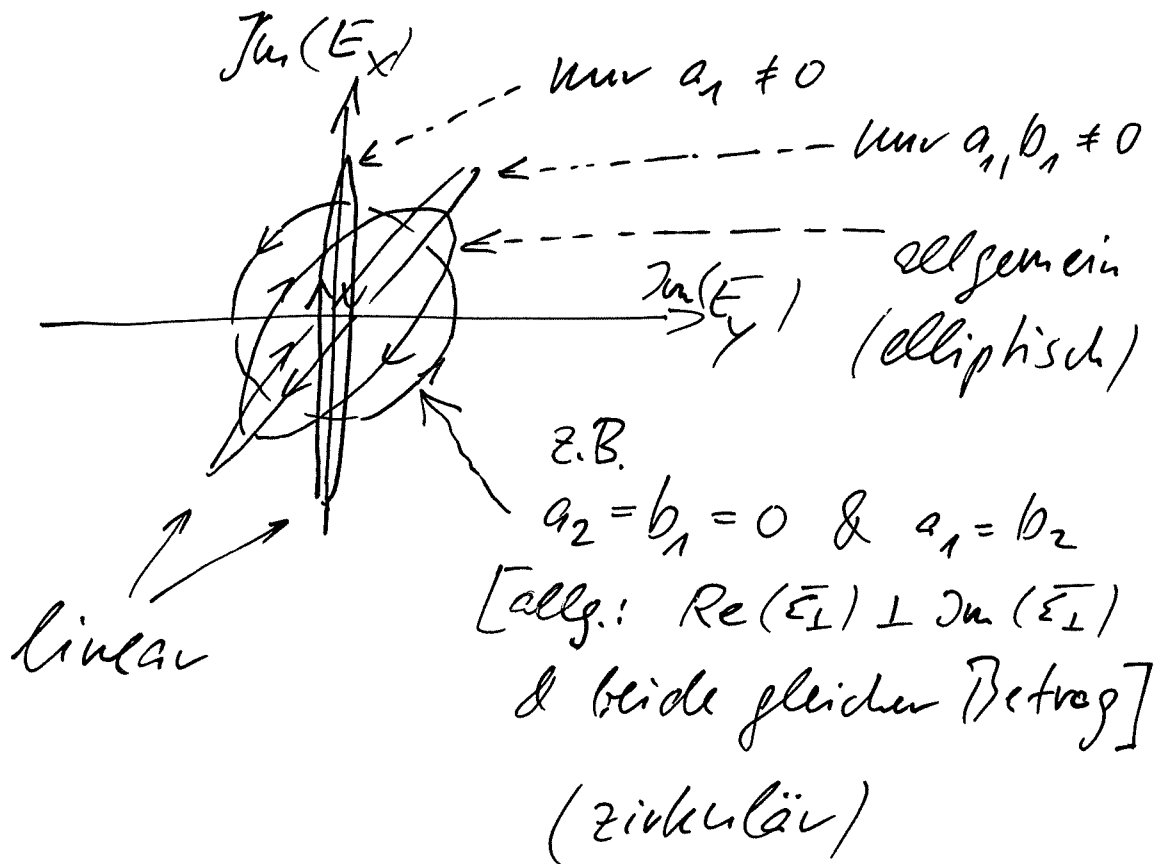
$$\mathcal{I}_u(\vec{E}) = \hat{e}_x k^0 |\bar{\epsilon}_{\perp}| \cos(-\omega t + |\vec{k}|z)$$

$$\mathcal{I}_u(\vec{B}) = \hat{e}_y k^0 |\bar{\epsilon}_{\perp}| \cos(-\omega t + |\vec{k}|z)$$

Allgemeiner:  $\vec{k}_\perp = \begin{pmatrix} a_1 + ia_2 \\ b_1 + ib_2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \text{Im}(\vec{E}) = k^0 \begin{pmatrix} a_1 \cos \alpha - a_2 \sin \alpha \\ b_1 \cos \alpha - b_2 \sin \alpha \end{pmatrix}; \quad \alpha = -\omega t + \vec{k}_\perp \cdot \vec{z}$$

Wir können nun  $\vec{E}$  in der  $\vec{k}_\perp$ -Ebene  
als Fkt. des Parameters  $\alpha$  betrachten



- Man spricht in naheliegender Weise von linearer, zirkulärer od. (allg.) elliptischer Polarisation.
- Man kann auch ganz ohne komplexe  $\vec{E}_\perp$  auskommen und ellipt. polarisierte Wellen



als Linearkombination phasenverschobener  
linear polarisierter Wellen auffassen.

- Energiefluss in der Welle: Mit Poynting-Vektor leicht zu analysieren:

$$\vec{E} \sim \vec{E}_\perp; \quad \vec{B} = (\vec{k}/|\vec{k}|) \times \vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{S} = \vec{E} \times \vec{B} = \vec{E} \times \left( \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \times \vec{E} \right) = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \cdot |\vec{E}|^2$$

Die wichtige Beziehung  $\vec{B} = \hat{e}_k \times \vec{E}$   
überträgt sich auch auf lin.  
Superpositionen von Wellen  
mit gleichem  $\hat{e}_k$ . Sie gilt  
damit für jede ebene Welle.

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

&  $\vec{E} \perp \vec{k}$

### 11.3 Nichtkovariante Verleitung der Wellgl.

(Nur zur Vollständigkeit)

Im Vakuum gilt:  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \dot{\vec{E}}$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \times \dot{\vec{E}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})}_{=0} - \Delta \vec{B} = \underbrace{\partial_t(\vec{\nabla} \times \vec{E})}_{=-\dot{\vec{B}}}$$

$$\Rightarrow -\Delta \vec{B} = -\partial_t^2 \vec{B} \Rightarrow \square \vec{B} = 0$$

Analoge Herleitung führt zu  $\square \bar{E} = 0$ .

Jetzt muss man zusätzlich die Beziehungen  $\bar{\nabla} \times \bar{B} = \dot{\bar{E}}$  &  $\bar{\nabla} \times \bar{E} = -\dot{\bar{B}}$  benutzen, um zu sehen, dass die Wellen von  $\bar{E}, \bar{B}$  nicht unabhängig sind. Man findet schnell genau die gleichen Lösungen, die wir direkt aus  $\square A^\mu = 0$  & den Definitionen von  $\bar{E}, \bar{B}$  abgeleitet hatten.

(Persönl. Meinung: Dies ist eine unnötig komplexe Analyse, die der zuhelft relativistischen Problemstellung nicht gerecht wird.)

## 12 Felder bewegter Ladungen

### 12.1 Relativistische Greensche Funktion

Inhom. Maxwell-gl.:  $\partial_\mu F^{\nu\mu} = j^{\nu}$

[mit  $F^{\nu\mu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu$  & Lorenz-Eichung  $\partial A = 0$ ]

$$\square A^\mu = -j^\mu$$

Analog zu  $\Delta \phi = -\rho$  ist dies ein Fall für die

Methode der Greenschen Fkt.-eq.:

$$\text{Finde } G(x, y) \text{ mit } \square_x G(x, y) = -\delta^4(x-y)$$

$$\Rightarrow A^\mu(x) = \int d^4y G(x, y) j^\mu(y).$$

• Wegen Translationsinvarianz haben wir

$$G(x, y) \equiv G(x-y).$$

• Wir wollen also lösen:  $\square_x G(x) = -\delta^4(x)$

• Gehe in den Fourier-Raum:

$$\tilde{G}(k) = \int d^4x e^{-ikx} G(x)$$

$$\Rightarrow -k^2 \tilde{G}(k) = -1 \Rightarrow \tilde{G}(k) = 1/k^2$$

$$\Rightarrow G(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ikx}}{k^2}$$

Kommentar:

• Soweit ist dies sehr ähnlich zum (euklidischen) 3d-Fall, wo wir

$$G(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{ik\vec{x}}}{k^2} = \frac{1}{4\pi|\vec{x}|}$$

gefunden hatten. Doch jetzt ist alles anders:

Grund: Unser Differentialoperator war

$$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 \rightarrow \text{alle Vorzeichen der}$$

Ableitungsterme positiv  $\rightarrow$  "elliptisch"

$\rightarrow$  Vorgabe der Fkt. am Rand des Gebiets

(hier bei  $|x| \rightarrow \infty$ ) bestimmt (s.g. eindeutig).

Jetzt hingegen: Unser Diff. operator

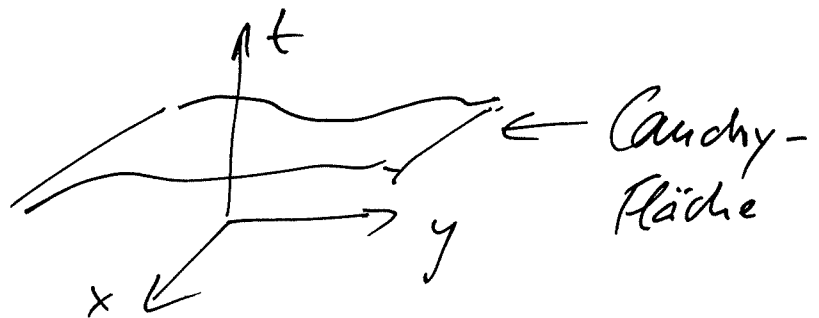
$$\text{ist } \square = -\partial_t^2 + \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 \rightarrow \text{eines der}$$

Vorzeichen negativ  $\rightarrow$  "hyperbolisch"

$\rightarrow$  Vorgabe der Fkt. & 1. Ableitung auf

einer sogenannten "Cauchy-Fläche" bestimmt

Lsg. eindeutig:



Wir können die Fkt. aber nicht überall bei  $x^i \rightarrow \infty$  Null setzen. Somit verlieren wir

die Eindeutigkeit der Lsg. zu  $\square G = -\delta$ .

Wir können  $G = 0$  bei  $t \rightarrow +\infty$  od.  $-\infty$  fordern,  
aber nicht beides

- zur expliziten Berechnung führen wir zunächst die  $d^3\bar{k}$ -Integration durch:

$$G(x) = \int \frac{dk^0}{(2\pi)^4} \underbrace{\int |\bar{k}|^2 d|\bar{k}| d(\cos\theta) d\varphi}_{\substack{\text{Kugelkoordinaten} \\ \text{in } \mathbb{R}^3 \ni \bar{k}.}} \cdot \frac{e^{-ik^0t + i\bar{k}\bar{x}}}{-k_0^2 + |\bar{k}|^2}$$

↓  $\cos\theta \in [-1, 1]$  ;  $\bar{k}\bar{x} = |\bar{k}||\bar{x}|\cos\theta$

$$G(x) = \int \frac{dk^0}{(2\pi)^3} \int \frac{|\bar{k}|^2 d|\bar{k}|}{-k_0^2 + |\bar{k}|^2} \cdot \frac{e^{-ik^0t}}{i|\bar{k}||\bar{x}|} \left( e^{i|\bar{k}||\bar{x}|} - e^{-i|\bar{k}||\bar{x}|} \right)$$

- Um die Notation zu vereinfachen, setzen wir jetzt  $|\bar{k}| = k$  &  $|\bar{x}| = r$  &  $k^0 = E$ :

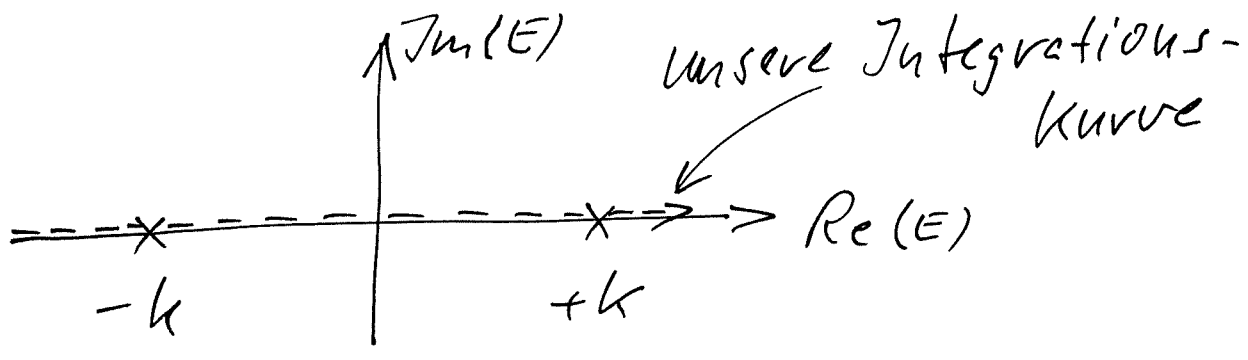
$$G(x) = i \int_0^\infty \frac{k dk}{(2\pi)^3 r} (e^{-ikr} - e^{ikr}) \int \frac{dE e^{-iEt}}{-E^2 + k^2}$$

$$\frac{1}{-E^2 + k^2} = \frac{-1}{(E-k)(E+k)} = \frac{1}{2k} \left( \frac{1}{E+k} - \frac{1}{E-k} \right)$$

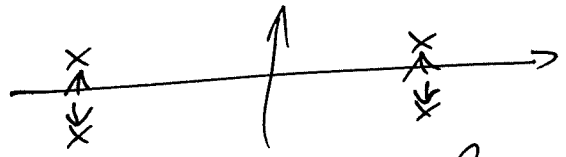
- Problem:  $E$ -Integration divergent wegen der Pole bei  $E = \pm k$ . Dies hängt mit der oben erwähnten Uneindeutigkeit von  $G$  zusammen.

• Lösung: Betrachte  $\int_{-\infty}^{+\infty} dE \left( \frac{1}{E+k} - \frac{1}{E-k} \right) e^{-iEt}$

als Integration entlang der  $\text{Re}(E)$ -Achse in der "komplexen  $E$ -Ebene":



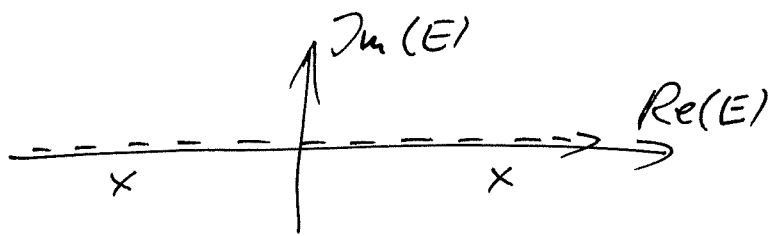
• Wir können die Integration wohldefiniert machen, indem wir die Pole um  $\pm i\varepsilon$  verschieben (mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  am Ende):



$\Rightarrow$  4 Möglichkeiten. Welche ist die Richtige?

• Phys. Input:  $G(x) = 0$  für  $x^0 = t < 0$   
(Kausalität)

Dies gelingt durch Verschieben beider Pole nach unten:



$$\Rightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int dE \left( \frac{1}{E+k+i\epsilon} - \frac{1}{E-k+i\epsilon} \right) e^{-iEt}$$

Intuitive Begründung: Kleine Verschiebung der Pole nach unten ist äquivalent zu kleiner Verschiebung der Kurve nach oben, also  $E \rightarrow E+i\delta$  im Integranden. Dann wird  $e^{-iEt} \rightarrow e^{-i(E+i\delta)t} = e^{-iEt} \underbrace{e^{-\delta t}}_{\rightarrow 0}$  bei  $t \rightarrow -\infty$ .

- Zur math. sauberen Begründung und expliziten Berechnung brauchen wir den

12.2 Residuensatz (M)

- Betrachte kompl. Fkt.-en  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; z \mapsto f(z)$ .
- Man kann diese auch als Abb.  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  auffassen, mit  $z = x^1 + ix^2, (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2$ .
- Schreiben wir also  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  als Taylor-Reihe:
 
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^1 \dots x^1 \dots x^1 \dots x^2 \dots x^2 \dots x^2 \dots \partial_1 \dots \partial_1 \dots \partial_2 \dots \partial_2 \dots f(\bar{0})$$
- Mit  $x^1 = (z + \bar{z})/2$  &  $x^2 = (z - \bar{z})/2i$

Kann man dies als Reihe in  $z, \bar{z}$

auffassen:

$$f(z) = \sum_{k, l} c_{k, l} z^k \bar{z}^l$$

- Falls nun in dieser Reihe nur  $z$  vorkommt ( $c_{k, l} = 0$  für  $l \neq 0$ ) nennt man  $f$  holomorph (in Konvergenzradius der Reihe).
- Man schreibt dann  $f = f(z)$  (im Gegensatz zu  $f = f(z, \bar{z})$  für eine allgemeine Funktion  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ).
- Ab sofort ist unser Fokus auf solchen Funktionen  $f = f(z)$ .
- Wir können natürlich auch um andere Pt.  $z_0 \in \mathbb{C}$  entwickeln:  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ .

Zentraler Nullpunkt:

Wir können auch um Punkte entwickeln, an denen  $f$  singularär ist:

$$\left\| f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \right\| \text{ "Laurent-Reihe"}$$



(Wenn es nur endlich viele  $c_n$  mit  $n < 0$  gibt spricht man von einer Polstelle. Wenn alle Singularitäten Polstellen sind heißt die Fkt. "meromorph".)

- Betrachte nun Linienintegrale:

$$\gamma \rightarrow I = \int_{\gamma} f(z) dz \equiv \lim \sum_i f(z_i) \Delta z_i$$

- Man kann  $I$  als Linienintegral des komplexen Vektorfeldes  $\bar{v}_f = \begin{pmatrix} f \\ if \end{pmatrix}$  auf  $\mathbb{R}^2 \ni \bar{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$  auffassen:

$$f \cdot dz = f \cdot (dx^1 + i dx^2) = \begin{pmatrix} f \\ if \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \end{pmatrix} = \bar{v}_f \cdot d\bar{x}.$$

- entscheidende Beobachtung:

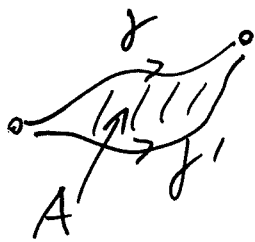
Wenn  $f$  holomorph ist, dann ist  $\bar{v}_f$  rotationsfrei:

$$\rightarrow (\nabla \times \bar{v}_f)_{1,2} = 0 \text{ weil } \bar{v}_f \text{ nur in 1-2-Ebene lebt.}$$

$$\rightarrow (\nabla \times \bar{v}_f)_3 = \partial_1(if) - \partial_2(f)$$

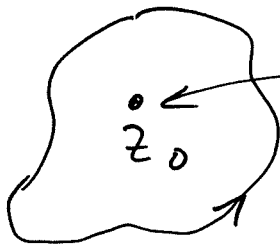
$$= if'(z) \frac{\partial z}{\partial x^1} - f'(z) \frac{\partial z}{\partial x^2} = if'(z) \cdot 1 - f'(z) \cdot i = 0 \checkmark$$

- Mit dem Satz v. Stokes können wir nun  $\gamma$  beliebig deformieren, ohne  $I$  zu ändern.  
(Natürlich dürfen wir  $\gamma$  dabei nicht über eine Singularität schieben.)



$$I(\gamma) - I(\gamma') = \int_A (\text{rot } \vec{f}) \cdot d\vec{a} = 0$$

- Behandle jetzt geschlossene Ind.-kurve um Singularität mit Beschreibung durch Laurent-Reihe.



$$I = \oint_{\gamma} f(z) dz = \oint_{\gamma(\epsilon)} f(z) dz$$

Kreis um  $z_0$  mit Radius  $\epsilon \rightarrow 0$ .

- O.B.d.A. sei  $z_0 = 0$ , so dass

$$f(z) = \sum_n c_n (z - z_0)^n = \sum_n c_n z^n$$

und 
$$I = \sum_n I_n \quad \text{mit} \quad I_n = c_n \oint_{\gamma(\epsilon)} z^n dz$$

- Parametrisiere  $\gamma(\epsilon)$  durch  $z(\varphi) = \epsilon e^{i\varphi}$   
( $\varphi \in (0, 2\pi]$ )

$$I_n = c_n \int_0^{2\pi} d(e^{i\varphi}) (e^{i\varphi})^{n-1} = c_n i e^{n+1} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i\varphi(n+1)}$$

$$\Rightarrow I_n = \begin{cases} 2\pi i c_n & \text{für } n = -1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Eine analoge Rechnung kann für mehrere Singularitäten innerhalb von  $\gamma$  gemacht werden:



- damit folgt der Residuensatz:

$$\left\| \int_{\gamma} dz f(z) = \sum_{k=1}^N 2\pi i \text{Res}(f, z_k) \right\|$$

$\uparrow$  pos. Drehung       $\nwarrow$  holomorph außer bei  $z_k$

mit  $\text{Res}(f, z_k) = c_{-1} \leftarrow$  Koeff. aus Laurent-Reihe bei  $z_k$ .

### 12.3 Relativistische freiesche Fkt.

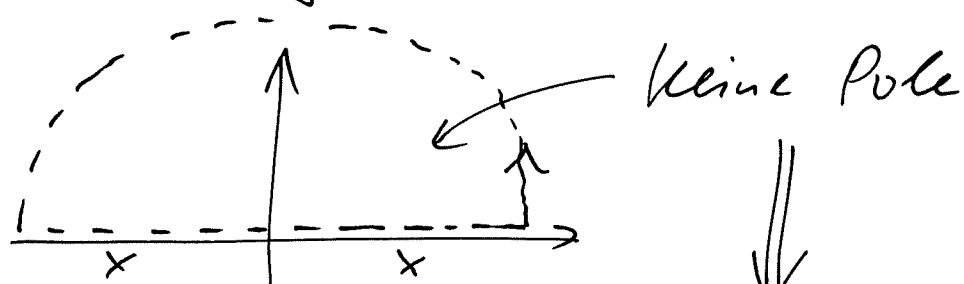
- Fortsetzung

The diagram shows a horizontal real axis with a vertical imaginary axis. A dashed line segment on the real axis between  $-x$  and  $x$  represents a branch cut. Arrows on the dashed line indicate the direction of the cut.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dE \left( \frac{1}{E+k+i\epsilon} - \frac{1}{E-k+i\epsilon} \right) e^{-iEt}$$

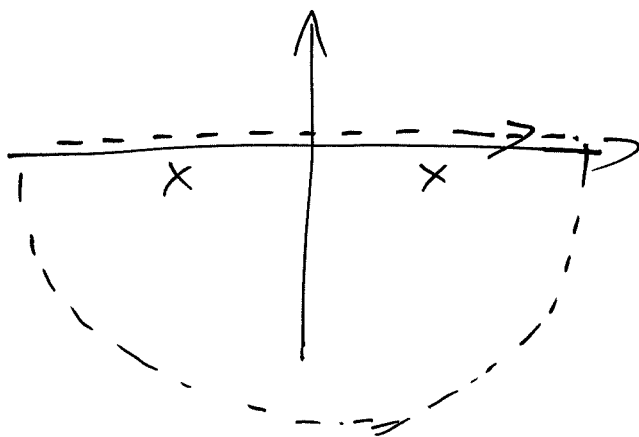
$E \in \mathbb{R}$

- Falls  $t < 0$  wirkt  $e^{-iEt}$  bei  $\text{Im } E > 0$  als exponentieller Unterdrückungsfaktor.  
 $\Rightarrow$  können Int.-kurve "oben" schließen,  
 ohne Betrag des Integrals zu ändern:



Integral gibt Null!

- Falls  $t > 0$  können wir analog "unten" schließen:



$$\lim_{t \rightarrow 0} \int dE e^{-iEt} \left( \frac{1}{E+k+i\epsilon} - \frac{1}{E-k+i\epsilon} \right)$$

$$= -2\pi i \left[ \text{Res} \left( \frac{e^{-iEt}}{E+k}, -k \right) - \text{Res} \left( \frac{e^{-iEt}}{E-k}, k \right) \right]$$

negative Orientierung der Kurve

$$= -2\pi i (e^{ikt} - e^{-ikt}) \quad *)$$

\*1) Einschub:

Für einen einfachen Pol kann man

$f(z)$  als  $\frac{1}{z-z_0} g(z)$  mit  $g(z)$  holomorph

schreiben. Also:

$$f(z) = \frac{1}{z-z_0} g(z) = \frac{1}{z-z_0} [g(z_0) + (z-z_0)g'(z_0) + \dots]$$

$$\Rightarrow c_{-1} = g(z_0)$$

$$\Rightarrow \text{Res}(f, z_0) = g(z_0)$$

In unserem Fall ist  $z = E$  &  $z_0 = \pm k$ ,

also z.B.  $\text{Res}\left(\frac{e^{-iEt}}{E+k}, -k\right) = e^{+ikt}$ .

$$\begin{aligned}
G(x) &= i \int_0^{\infty} \frac{dk}{(2\pi)^3 2v} (e^{-ikr} - e^{ikr}) (-2\pi i) (e^{ikt} - e^{-ikt}) \\
(t > 0) & \\
&= \frac{1}{2(2\pi)^2 v} \int_0^{\infty} dk \left[ e^{-ik(r-t)} + e^{ik(r-t)} - e^{-ik(r+t)} - e^{ik(r+t)} \right] \\
&= \frac{1}{2(2\pi)^2 v} \int_{-\infty}^{\infty} dk \left[ e^{ik(r-t)} - e^{ik(r+t)} \right] \\
&= \frac{1}{4\pi v} [\delta(r-t) - \delta(r+t)] \\
&\quad \uparrow \text{immer Null}
\end{aligned}$$

⇒ Resultat für alle t :

$G(x) = \frac{1}{4\pi v} \delta(t-r) \Theta(t)$	$t = x^0$ $r =  \vec{x} $
---	------------------------------

• Kovariante Umschreibung

Allg. gilt: Falls  $f(x)$  einzige Nullstelle bei  $x_0$  hat, so ist  $\delta(f(x)) = \frac{\delta(x-x_0)}{|f'(x_0)|}$

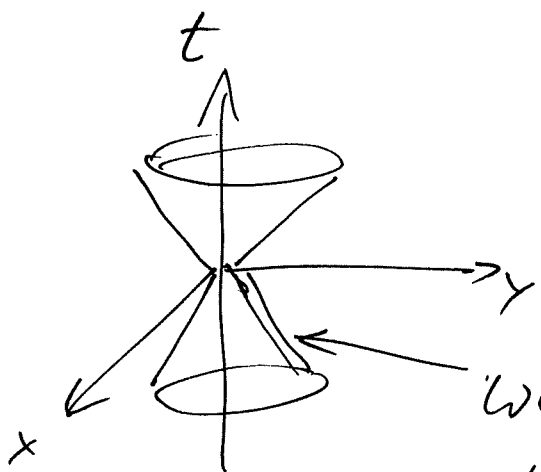
$$\Rightarrow \delta(\underbrace{(t+r)(t-r)}_{f(t)}) = \frac{\delta(t-r)}{2v}$$

Da  $t > 0$ , Nullst. nur bei  $t=r$ .

Ableitung dort:  $2v$

$$\Rightarrow G(x) = \frac{1}{2\pi} \delta(t+r)(t-r) \Theta(t)$$

bew.  $G(x) = \frac{1}{2\pi} \delta(x^2) \Theta(x_0)$



bricht nicht die Kovarianz bzgl. eigentl. Lorentz-Gruppe, weil  $G$  nur auf Lichtkegel  $\neq 0$ .

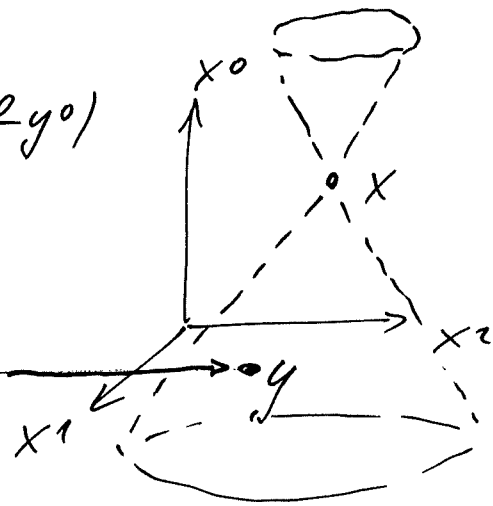
Wichtigste qualitative Resultate

- Wir brauchen physikalisch die "retardierte" freie Fkt. (wegen der "Retardierung" des Effekts der Quelle durch die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts).

[ "Avancierte" und "Feynman"-freie Fkt.-en  $\rightarrow$  QFT ]

- $G(x-y)$  ist nur sensitiv auf Punkte  $y$  auf rückwärtigem Lichtkegel von  $x$ :

$$G(x-y) = \frac{1}{2\pi} \delta((x-y)^2) \Theta(x_0 - y_0)$$



Pkt.  $y$  auf Oberfläche des rückwärtigen Lichtkegels von  $x$ .

# 12.4 Feld einer bewegten Punktladung

Einkerbung (aus Sect. 4.3):

Pkt.-ladung mit 4-er Stromdichte

$$j^\mu(x) = q \int d\lambda \delta^4(x - y(\lambda)) \dot{y}^\mu$$

$d/d\lambda$

↑ Trajektorie  $y(\lambda)$

Einsetzen in

$$A^\mu(x) = \int d^4x' G(x-x') j^\mu(x')$$

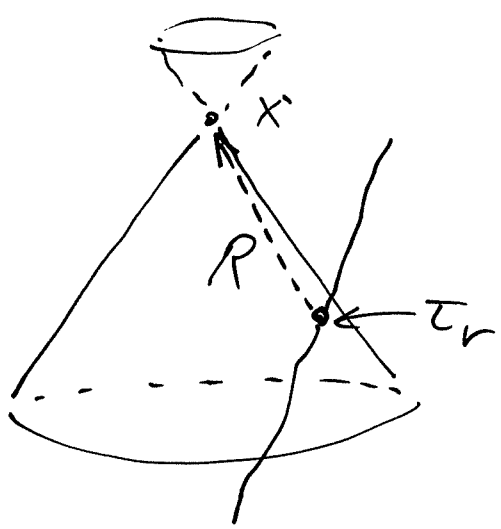
und spezielle Wahl  $\lambda = \tau$  (Eigenzeit)

liefern:

$$A^\mu(x) = \int d^4x' \int d\tau \frac{q}{2\pi} \delta((x-x')^2) \Theta(x^0-x'^0) \delta^4(x'-y(\tau)) u^\mu(\tau)$$

$$= \frac{q}{2\pi} \int d\tau \delta((x-y(\tau))^2) \Theta(x^0-y^0(\tau)) u^\mu(\tau)$$

$\Downarrow$   
 $\tau = \tau_r$ ,  $\tau_r \equiv$  Eigenzeit bei der die Trajektorie den rückwärtigen Lichtkegel von  $x$  schneidet.



$$R \equiv x^\mu - y^\mu(\tau_r) \in \mathbb{R}^4$$



Erinnerung:  $\delta(f(x)) = \delta(x-x_0) \frac{1}{|f'(x_0)|}$

↑  
Nullstelle

Müssen also berechnen:

$$\frac{d(x-y(\tau))^2}{d\tau} = -2(x-y(\tau)) \cdot u(\tau) = -2Ru$$

(=  $-2R^4 u_{,4}$ )

$$\Rightarrow A^M(x) = \frac{q}{4\pi} \cdot \frac{u^M(\tau_r)}{|Ru(\tau_r)|} = \frac{q}{4\pi} \cdot \frac{v_r^M}{|Rv_r|}$$

$$(v_r^M \equiv v^M(\tau_r) = \frac{u^M(\tau_r)}{\gamma})$$

Unter Ausnutzung der Tatsache, dass  
R Lichtartig ist, also  $R^0 = |R|$ :

$$A^M(x) = \frac{q}{4\pi} \cdot \frac{v_r^M}{|R| - R \cdot \bar{v}_r} \leftarrow \frac{\text{"Lienard-Wiechert Potential"}}{\underline{\hspace{2cm}}}$$

(cf. Landau / Lifshitz; Lect. Notes

Bartelmann & Anastasiou, ... viele Quellen...)

↓  
viele Beispiele & Anwendungen

## 12.5 Felder einer geradlinig bewegten Ladung

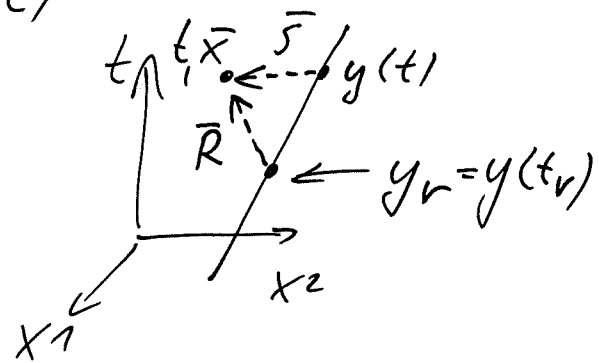
Sei also  $y(t) = \begin{pmatrix} t \\ \bar{y}_0 + \bar{v} \cdot t \end{pmatrix}$  Ladung

Suchen Feld bei  $x = \begin{pmatrix} t \\ \bar{x} \end{pmatrix}$ .

Abstand zur Ladung zum Beobachtungszeitpunkt:  $\bar{s} = \bar{x} - \bar{y}(t)$

Ziel: Finde  $|\bar{R}|$  &  $\bar{R} \cdot \bar{v}$

$$\bar{R} = \bar{v} \cdot (t - t_r) + \bar{s}$$



Da  $t - t_r = R^0$  und  $R$  lichtartig, folgt

$$\bar{R} = \bar{v} |\bar{R}| + \bar{s} \quad (*) \quad t - t_r = |\bar{R}|$$

$$\Rightarrow |\bar{R}|^2 = \bar{v}^2 |\bar{R}|^2 + 2 |\bar{R}| \bar{v} \cdot \bar{s} + \bar{s}^2$$

$$\Rightarrow |\bar{R}| (1 - v^2) - 2 |\bar{R}| \bar{v} \cdot \bar{s} - \bar{s}^2 = 0$$

$$|\bar{R}| = \frac{\bar{v} \cdot \bar{s}}{1 - v^2} \pm \sqrt{\frac{(\bar{v} \cdot \bar{s})^2}{(1 - v^2)^2} + \frac{\bar{s}^2}{1 - v^2}}$$

("-" irrelevant)

$$|\bar{R}| = \frac{1}{1 - v^2} \left( \bar{v} \cdot \bar{s} + \sqrt{(\bar{v} \cdot \bar{s})^2 + \bar{s}^2 (1 - v^2)} \right)$$

Multipliziere (\*) mit  $\bar{v}$

$$\Rightarrow \bar{R}\bar{v} = |\bar{R}|v^2 + \bar{v}\bar{S}$$

$$\Rightarrow A^{\mu}(x) = \frac{q v^{\mu}}{4\pi} \cdot \frac{1}{|\bar{R}| - (|\bar{R}|v^2 + \bar{v}\bar{S})}$$

$$= \frac{q v^{\mu}}{4\pi} \cdot \frac{1}{|\bar{R}|(1-v^2) - \bar{v}\bar{S}}$$

$$= \frac{q v^{\mu}}{4\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\bar{v}\bar{S})^2 + \bar{S}^2(1-v^2)}}$$

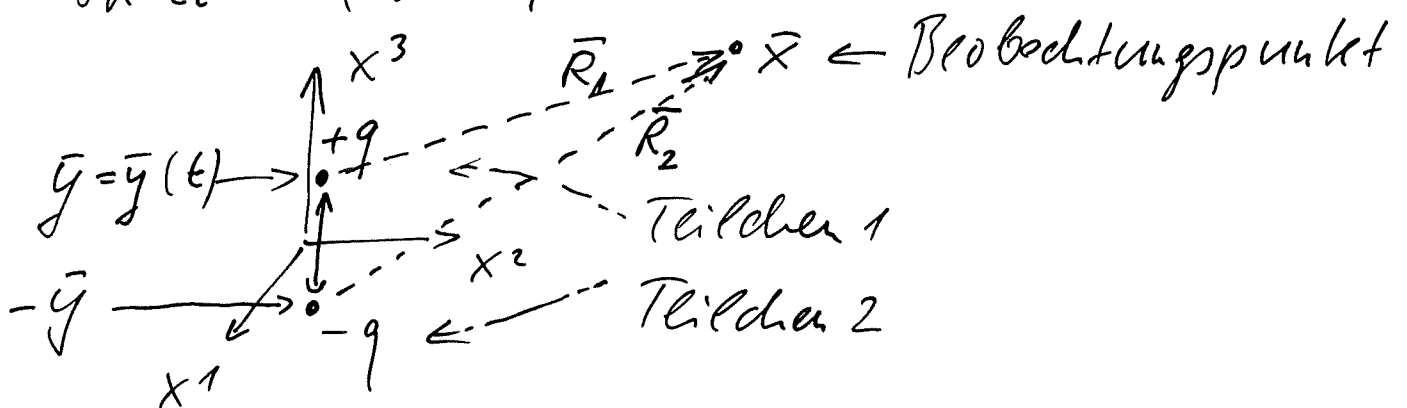
Beachte:  $A^{\mu}$  hängt von  $t, \bar{x}$  nur über  $\bar{S}$  ab. Es gilt  $\bar{S} = \bar{x} - \bar{y}_0 - \bar{v}t$ .

$\Rightarrow (t, \bar{x})$ -Abhängigkeit von  $A^{\mu}$

explizit bekannt  $\Rightarrow \bar{E}, \bar{B}$  folgen leicht.

## 12.6 Dipol-Strahlung

Skizze: (nur  $\bar{x}$ , ohne  $t$ )



- Benutze bekannte Formel für  $A^\mu$ ;  
Fokussiere zunächst auf  $\bar{A}$ .

$$\bar{A} = \frac{q}{4\pi} \cdot \frac{\bar{v}_r}{|\bar{R}_1| - \bar{R}_1 \cdot \bar{v}_r} - \frac{q}{4\pi} \cdot \frac{-\bar{v}_r}{|\bar{R}_2| + \bar{R}_2 \cdot \bar{v}_r}$$

- Sei  $|\bar{v}| \ll 1$  &  $|\bar{y}| \ll |\bar{x}| \approx |\bar{R}_1| \approx |\bar{R}_2|$

⏟  
nichtrelativist.  
Bewegung

⏟  
Fernfeld

$$\Rightarrow \bar{A} \approx \frac{q}{4\pi} \cdot \frac{2\bar{v}_r}{|\bar{x}|} \quad ; \quad |\bar{x}| \approx r$$

$$\bar{v}_r = \dot{y}(t_r) = \dot{y}(t-r)$$

$$\text{Dipol: } \bar{p} \approx 2q\bar{y} \Rightarrow \dot{\bar{y}} = \frac{\dot{\bar{p}}}{2q}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{A} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\dot{\bar{p}}(t-r)}{r}}$$

- leicht zu zeigen: Dies gilt auch dann, wenn andere Ladungskonfigurationen den Dipol erzeugen.

$$\cdot (\bar{B})^i = (\bar{\nabla} \times \bar{A})^i = \frac{1}{4\pi} \varepsilon^{ijk} \partial_j \frac{\dot{p}_k(t-r)}{r}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \varepsilon^{ijk} \left[ \frac{\dot{p}_k(t-r)}{r} (-\partial_j r) + \dot{p}_k(t-r) \partial_j \left( \frac{1}{r} \right) \right]$$

$$r = \sqrt{x_i x_i}$$

166

$$\Rightarrow (\bar{B})^i = \frac{1}{4\pi} \epsilon^{ijk} \left[ \frac{\dot{p}_k(t-r)}{r} \left(-\frac{x_j}{r}\right) + \dot{p}_k(t-r) \left(-\frac{x_j}{r^3}\right) \right]$$

$$\bar{B} = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{\ddot{\vec{p}} \times \vec{r}}{r^2} + \frac{\dot{\vec{p}} \times \vec{r}}{r^3} \right]$$

für Fernfeld irrelevant

$$\Rightarrow \bar{B} \approx \frac{\ddot{\vec{p}} \times \vec{r}}{4\pi r^2}$$

Zickel zu  $A^0$ :

$$A^0 = \frac{q}{4\pi} \cdot \frac{1}{|\bar{R}_1| - \bar{R}_1 \cdot \bar{v}} - \frac{q}{4\pi} \cdot \frac{1}{|\bar{R}_2| + \bar{R}_2 \cdot \bar{v}}$$

- Analyse analog zu  $\bar{A}$  möglich, aber mühsam
- fund.: - höherer Term bei kleinen  $\bar{v}, \bar{y}$   
Null.  
- aber: linearer Term erhält Beiträge von Entwicklung von  $\bar{R}_i$  im Nenner
- Einfachere Weg zu  $A^0$ : Nutze  $\partial A = 0$ .

$$\partial_t A^0 + \bar{v} \bar{A} = 0 \Rightarrow A^0 = - \int dt \bar{v} \left( \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\dot{\vec{p}}(t-r)}{r} \right)$$

$$A^0 = -\frac{1}{4\pi} \nabla \frac{\bar{p}(t-r)}{r} + \underbrace{f(\bar{x})}_{\text{---}}$$

$\bar{x}$ -abhängige Integrationskonstante  
die wir zur Vereinfachung weglassen,  
weil wir uns nur für die Dipol-Strahlung interessieren.

$$A^0 = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\dot{\bar{p}}(t-r)}{r} (-\nabla r) + \dots$$

$$\Rightarrow \boxed{A^0 = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\bar{x} \cdot \dot{\bar{p}}}{r^2}}$$

↑  
Terme von Wirkung  
von  $\bar{v}$  auf  $1/r$  gehen  
(wie oben bei  $\bar{B}$ ) nur  
Beiträge, die im Fern-  
feld irrelevant sind.

$$\bar{E} = -\nabla A^0 - \partial_t \bar{A}$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \left( \nabla \frac{\bar{x} \cdot \dot{\bar{p}}(t-r)}{r} + \partial_t \frac{\dot{\bar{p}}(t-r)}{r} \right)$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{\bar{x} \cdot \ddot{\bar{p}}}{r^2} (-\nabla r) + \frac{\ddot{\bar{p}}}{r} \right) + \text{Terme, die im Fernfeld kleiner sind}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left( \frac{(\bar{x} \cdot \ddot{\bar{p}}) \bar{x}}{r^3} - \frac{\ddot{\bar{p}}}{r} \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left( -\frac{\bar{x} \times (\ddot{\bar{p}} \times \bar{x})}{r^3} \right)$$

Mutec:

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a} \cdot \bar{c}) \bar{b} - (\bar{a} \cdot \bar{b}) \bar{c}$$

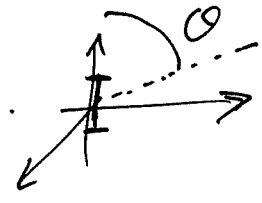
$$\bar{x} \times (\ddot{\bar{p}} \times \bar{x}) = r^2 \ddot{\bar{p}} - (\bar{x} \cdot \ddot{\bar{p}}) \bar{x}$$

$\Rightarrow \vec{E} = \vec{B} \times \left( \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \right)$ , wie es in einer ebenen Welle sein sollte.  
 (im Fernfeld)

Wähle jetzt, wie im Bild am Anfang,  $\vec{p} \parallel \vec{e}_z$

$$\vec{B} = \frac{\ddot{\vec{p}} \times \vec{x}}{4\pi r^2} \Rightarrow |\vec{B}|^2 = \frac{1}{(4\pi)^2} \cdot \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{r^2} \cdot \sin^2 \theta$$

Projektion von  $\vec{x}$  auf 1,2-Ebene gibt  $\sin \theta$

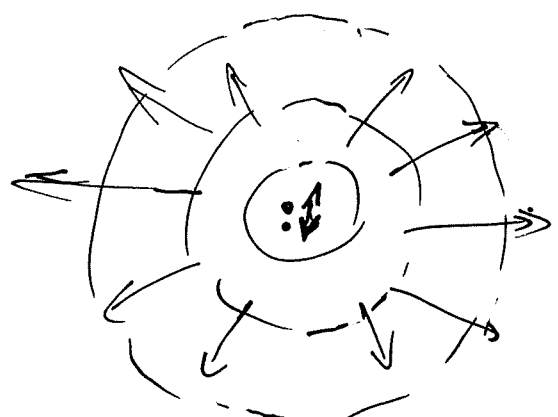


keine Abstrahlung in Dipol-Achse

Intensität fällt mit  $1/\text{Oberfläche}$  der Sphären um Ursprung ab (Energieerhaltung).

Zur Vollständigkeit:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B} = |\vec{B}|^2 \cdot \left( \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \right) \quad (\vec{E} \perp \vec{B})$$



$\rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$  (maximale Intensität)

## 13 Felder in Materie

### 13.1 Dielektrische Verschiebung und magnetische Erregung

• Erinnerung:  $\nabla \cdot \vec{E} = \rho$      $\nabla \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$   
 $\nabla \times \vec{B} = \vec{j} + \dot{\vec{E}}$      $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

$$\vec{F}_L = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

• Betrachte zunächst  $\vec{E}$ :

(1)  $\vec{E}$  wird durch  $Q$  erzeugt:  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{f} = Q$

(2)  $\vec{E}$  wirkt auf Ladungen  $q$ :  $\vec{F}_L = q\vec{E}$

• Für uns folgen (1) & (2) aus ein und der selben fund. Wirkung.

Alternative (z.T. historische) Sichtweise:

(2) liefert eine lokale Messvorschrift durch Probeladung

$\Rightarrow$  Def. der Feldstärke  $\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}}{q}$

$\Rightarrow [\vec{E}] = \frac{N}{C} = \frac{N}{As}$

[Äquivalent dazu: Bewege Teilchen durch Feld, so dass es Energie gewinnt.]

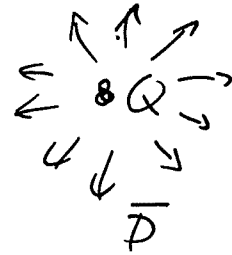


$$q \cdot \bar{E} \cdot \bar{e} = \bar{F} \cdot \bar{e}$$

$$\underbrace{q}_{C} \cdot \underbrace{V}_{V} = Nm \Rightarrow V = \frac{Nm}{C}, \quad [E] = \frac{V}{m.}$$

(1) Sept, dass eine Ladung ein Feld erzeugt (a priori nicht  $\bar{E}$ ):

$$\oint \bar{D} \cdot d\bar{f} = Q$$



$$\Rightarrow [D] = \frac{C}{m^2}$$

(Man nennt  $\bar{D}$  die dielektrische Verschiebung; elektrische Flussdichte; elektr. Erregung.)

Beobachtung:  $\bar{D}$  führt zu  $\bar{E}$

(bzw.  $\bar{D}$  ist durch Probekörper messbar)

Der Zusammenhang ist in vielen Fällen linear:

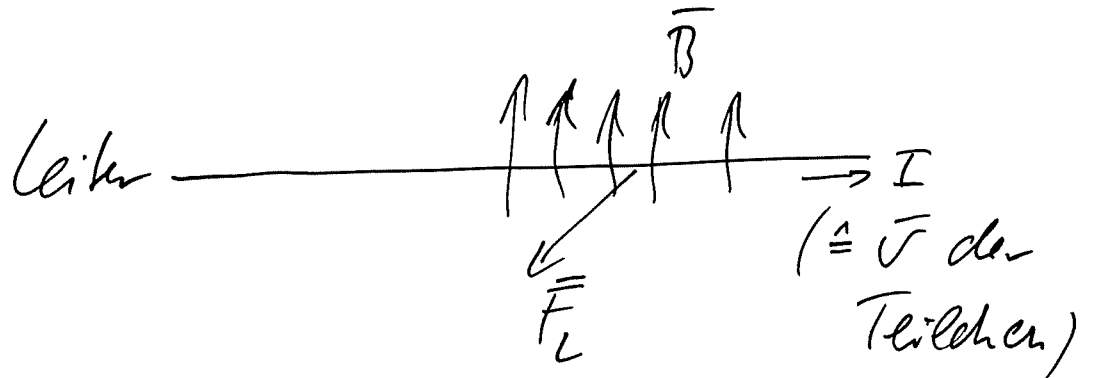
$$\bar{D} = \epsilon \bar{E}, \quad [\epsilon] = \frac{C/m^2}{V/m} = \frac{C}{Vm} = \frac{As}{Vm}$$

(im Vakuum:  $\epsilon = \epsilon_0 = 8.86 \cdot 10^{-12} \frac{C}{Vm.}$ )

Jetzt analog zum mag. Feld:

(1)  $\vec{B}$  wird durch  $I$  erzeugt:  $\oint \vec{B} d\vec{s} = I$

(2)  $\vec{B}$  wirkt auf bewegte Ladungen:  $\vec{F}_L = q \vec{v} \times \vec{B}$



$$I = \frac{q \cdot v}{L} \Rightarrow \frac{F}{L} = IB \Rightarrow [B] = \frac{N}{Am}$$

$\uparrow$   
 Länge

Das laut (1) erzeugte Feld ist  $\propto$  primär eine andere Größe:

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = I \Rightarrow [H] = \frac{A}{m}$$

$\vec{H}$  wird "magnetische Erregung" genannt

(im Englischen heißt es wie  $\vec{B}$  auch "mag. field.")

Beobachtung:  $\vec{H}$  führt zu  $\vec{B}$ ;

Zusammenhang linear:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (\text{beachte: aus hist. Gründen ist } \mu \text{ invers zu } \epsilon \text{ definiert})$$

$$[\mu] = \frac{N}{Am} \cdot \frac{m}{A} = \frac{Vc \cdot s}{Am \cdot As} = \frac{Vs}{Am}$$

im Vakuum:  $\mu = \mu_0 \approx 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$

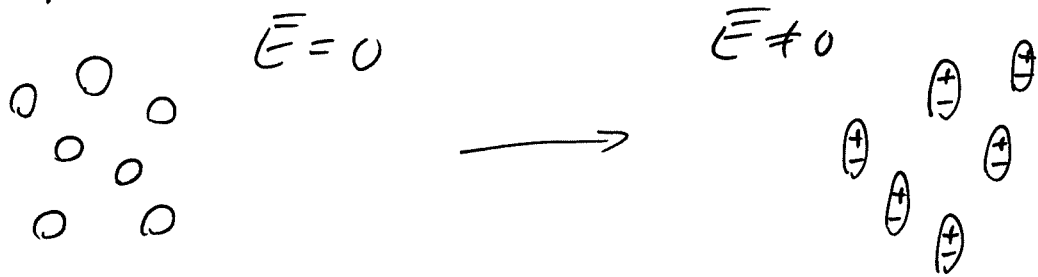
←  
 ehemals exakt durch Def. des  
 Ampere; heute nur Messwert.

Einschub: Dies sind SI-Einheiten:

- Sekunde: Def. über Atomphysik
  - Meter: Aus Sekunde und Lichtgeschw.  $c$ .
  - kg: Aus  $t$  ( $[t] = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$ )
  - V: Aus Nm &  $C = As$
  - A: Aus Elementarladung  $e$  und Sekunde, mit "Krummer" Zahl als Koeff., die obigen historischen Wert von  $\mu_0$  annähernd respektiert.
- 
- Im Gaußschen System (bzw. Heaviside) setzt man das theoretische Verständnis voraus, dass  $\vec{E}$  &  $\vec{D}$  sowie  $\vec{B}$  &  $\vec{H}$  fundamental das selbe sind.  $\Rightarrow \epsilon_0 = \mu_0 = 1$ .
  - Trotzdem sind, in Materie,  $\vec{D}$  &  $\vec{H}$  weiterhin nützlich.



② Feld kann Moleküle/Atome polarisieren  
(Dipole erzeugen)



Sanamer zu ①:  $\bar{p} = q \bar{l}$   $\begin{matrix} \bar{l} \nearrow +q \\ \searrow -q \end{matrix}$

$$\bar{F}_L = q \bar{E} \Rightarrow W = -\bar{p} \cdot \bar{E} \quad (\text{Energie von Dipol im Feld})$$

$$\Rightarrow \bar{M}_D = \bar{p} \times \bar{E}$$

( $\bar{M}_D = \text{Drehmoment}$ )



Dipole werden parallel zu  $\bar{E}$  ausgerichtet.

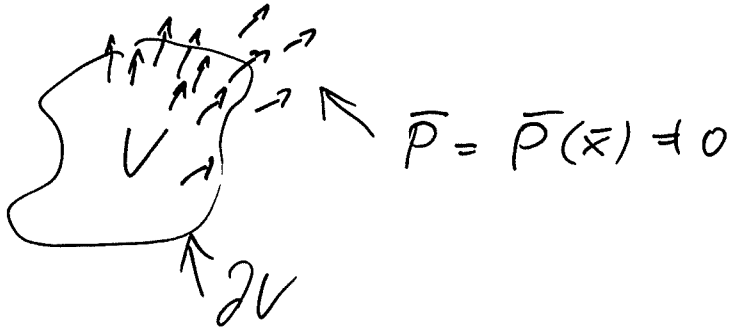
Zu ②: offensichtlich (da pos. Ladungen in  $\bar{E}$ -Richtung verschoben werden) erfolgt auch hier eine Ausrichtung der Dipole in  $\bar{E}$ -Richtung.

Def.: Polarisation =  $\bar{p} = \frac{\sum_i \bar{p}_i}{\Delta V}$

groß genug, um viele  $\vec{\Delta V}$  Dipole zu enthalten.

$\bar{P}$  ist per Def. ein gemittelte Größe.

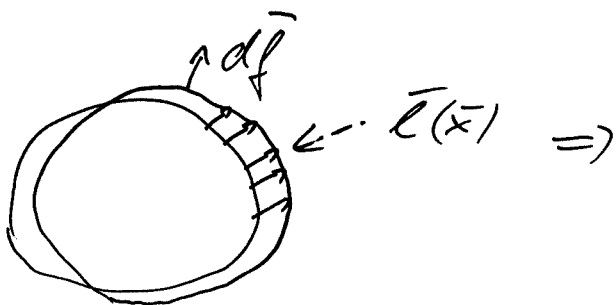
Betrachte Teilvolumen  $V$  mit Rand  $\partial V$ :



Behauptung:  $Q(V) = - \oint \bar{P} \cdot d\vec{f}$

Begründung:

- Man denke sich alle Ladungen zunächst paarweise exakt "aufeinander". ( $\bar{P} = 0$ )
- Dann sollen sie gemäß einem gemittelten "Verschiebungsfeld"  $\vec{e} = \vec{e}(\vec{x})$  getrennt werden, wobei kleine Dipole  $q\vec{e} = \vec{p}$  entstehen.
- Nehmen wir an, die neg. Ladungen bleiben dabei am Platz und die pos. Ladungen werden jeweils um  $\vec{e}(\vec{x})$  verschoben.



Die Gesamtmenge pos. Ladung, die  $V$  verlässt, ist

offensichtlich  $\oint_{\partial V} \langle \frac{q}{\Delta V} \rangle \cdot \vec{e} \cdot d\vec{f}$

$$\approx \oint S \bar{e} d\bar{f} = \oint \bar{P} d\bar{f} = -Q(V) \quad \checkmark$$

⇓ fauß

$$\nabla \bar{P} = -S_a$$

↑  
"effektive Ladungsdichte"

• Ladungsdichte insgesamt:  $S = S_f + S_a$

• Maxwell:  $\nabla \bar{E} = S_f + S_a$  "frei"  
(der fund. Vakuum-Theorie)

$$\uparrow = -\nabla \bar{P}$$

$$\nabla (\bar{E} + \bar{P}) = S_f \equiv \bar{D}$$

alle fäpfa gemittelt!

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \nabla \bar{D} = S_f \\ \nabla \times \bar{E} = -\dot{\bar{B}} \end{array} \right]$$

mit  $\bar{P} = \chi_e \bar{E}$  (phänomenologische Annahme, oft beweisbar)  
bzw.  $\bar{D} = \epsilon \bar{E}$

↑  
unbeeinflusst von Materie

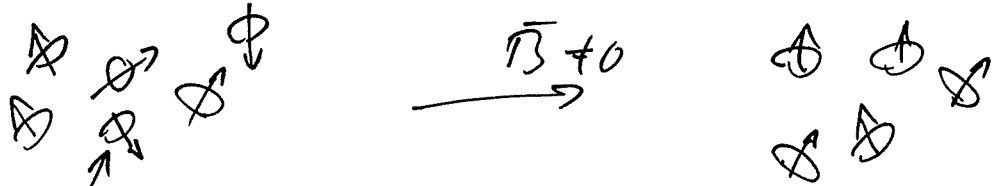
$$\epsilon \equiv 1 + \chi_e$$

↑  
"Permittivität" oder "Dielektrizitätskonstante"

↑  
"elektrische Suszeptibilität"

6) Magnetostatik

① ganz analog zu a) wird  $\vec{B}$ -Feld schon vorhandene Dipole ausrichten:



mikrosk. Kreisströme  
(in Atomen, Molekülen)

Technisch gesehen:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} q \vec{r} \times \vec{v} = \frac{1}{2} q r v \cdot \hat{e}_L \cdot \frac{2\pi v}{2\pi v}$$

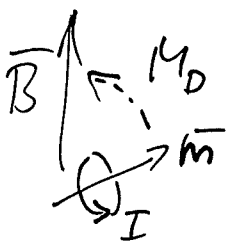
Kreisstrom  
(gilt aber auch  
allgemeiner)

$$\vec{m} = \frac{1}{2} I 2\pi r^2 \hat{e}_L = \underline{\underline{I \Delta f}}$$

Mit bekannter Formel ↑ Flächenvektor  
zur umflossenen Fläche

für  $\vec{F}_L$  zeigt man außerdem

richtig:  $\vec{M}_D = \vec{m} \times \vec{B}$



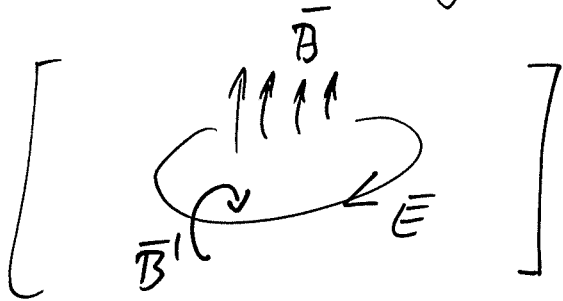
(Formel völlig analog zur  
Elektrostatik - wie man wegen  
Dualität erwartet hätte.)



(2) Auch analog zu a) werden beim Einschalten von  $\vec{B}$  Kreisströme (und damit mag. Dipole) auf atomarer/molekularer Ebene induziert. Aber: Der Effekt ist jetzt induziert. Aber: Der Effekt ist jetzt Wegen der Lenzschen Regel entgegengesetzt.

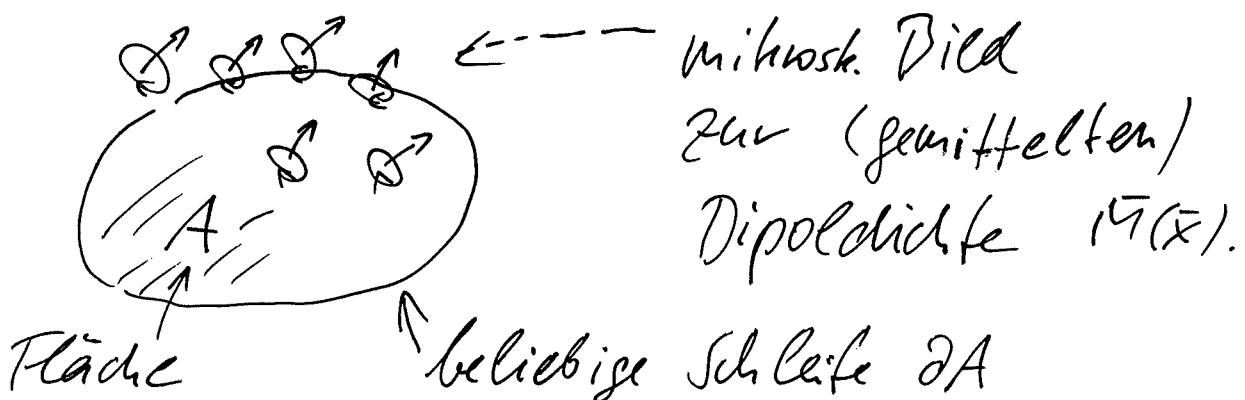
" $\vec{B} \Rightarrow \text{Strom} \Rightarrow \vec{B}'$ ;  $\vec{B}' \uparrow \downarrow \vec{B}$ "  
 folgt aus

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int (\partial_t \vec{B}) \cdot d\vec{f} \quad (\text{Induktionsgesetz})$$



Beiden Fällen gemeinsam:  $\vec{B}$  erzeugt magnet.

Dipoldichte (Magnetisierung):  $\vec{M} = \frac{\sum_i \vec{m}_i}{\Delta V}$



Man kann sich rein geometrisch leicht

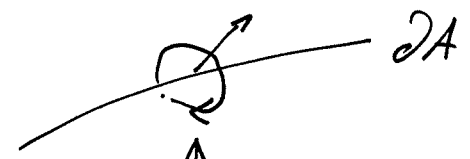
überlegen:

$$\int_A \vec{J}_M \cdot d\vec{f} = \oint_{\partial A} \vec{M} \cdot d\vec{s}$$

Stokes

$$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}$$

Maxwell: "Magnetisierung"



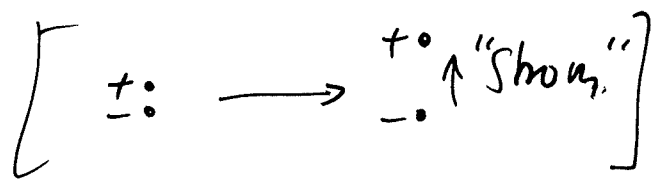
Kreishrom trägt zu  $\int \vec{J} \cdot d\vec{f}$  bei, wenn  $\partial A$  Kreis durchdringt.

$$\nabla \times \vec{B} = \vec{J}_f + \vec{J}_a + \dot{\vec{E}}$$

$$\vec{J}_M + \vec{J}_p$$

Polarisations-Strom.

(offensichtlich:  $\dot{\vec{p}} \Rightarrow \vec{J}_p = \dot{\vec{p}}$ )



$$\nabla \times \vec{B} = \vec{J}_f + \vec{J}_M + \underbrace{\dot{\vec{p}}}_{\vec{D}} + \dot{\vec{E}}$$

$\uparrow$   
 $\nabla \times \vec{M}$

$$\nabla \times (\vec{B} - \vec{M}) = \vec{J}_f + \dot{\vec{D}}$$

$\hookrightarrow$

$$\equiv \vec{H}$$

lineare Zshg. zwischen  $\vec{M}$  &  $\vec{B}$

$\Leftrightarrow$  lin. Zshg. zwischen  $\vec{M}$  &  $\vec{H}$

Def.:  $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$   $\Leftrightarrow \vec{B} = \mu \vec{H}$

↑  
mag. Suszeptibilität

( $\mu = 1 + \chi = \text{mag. Permeabilität}$ )

Zusammenfassung:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{J}_f + \dot{\vec{D}} & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho_f & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\dot{\vec{B}} \end{aligned}$$

alle  
Größen  
gemittelt!

mit  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ ;  $\vec{B} = \mu \vec{H}$

↑  $1 + \chi_e$   $> 0$  ↑  $1 + \chi_m$   $> 0$  Paramagnetismus

$< 0$  ( $\Rightarrow 1$  möglich!) Ferromag.

$< 0$  Diamagnetismus

### 13.3 Wellen in Materie

Äquivalenterweise kann man  $H, D$  auch eliminieren:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu \vec{J}_f + \mu \epsilon \dot{\vec{D}} & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\epsilon} \rho_f & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\dot{\vec{B}} \end{aligned}$$

Wir können jetzt nicht mehr einfach  $\vec{J}_f = 0$ ,  $\rho_f = 0$  setzen da Wellen in Leitern Ströme &

Ladungen erzeugen können:

$$\vec{J}_f = \sigma \vec{E} \quad (\text{Ohmsches Gesetz})$$

↑  
Leitfähigkeit

• Kontinuitätsgleichung:  $\nabla \cdot \vec{J}_f + \dot{\rho}_f = 0$

⇓

$$\dot{\rho}_f = -\nabla \cdot \vec{J}_f = -\sigma \nabla \cdot \vec{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon} \rho_f$$

⇒ exponentielle Dämpfung von  $\rho_f$  in Leitern (freie Ladungen nur an Oberfläche).

⇒ sinnvolle Annahme:  $\rho_f = 0$

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{B} = \mu \sigma \vec{E} + \mu \epsilon \dot{\vec{E}} \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad \nabla \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$$

• Wiederhole jetzt unsere nicht kovariante Herleitung der Wellengleichungen:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \mu \sigma \nabla \times \vec{E} + \mu \epsilon \nabla \times \dot{\vec{E}}$$

$$\nabla (\nabla \cdot \vec{B}) - \Delta \vec{B} = \mu \sigma (-\dot{\vec{B}}) + \mu \epsilon (-\ddot{\vec{B}})$$

$$\mu \epsilon \partial_t^2 \vec{B} + \mu \sigma \partial_t \vec{B} - \Delta \vec{B} = 0$$

Analogy:  $\mu \epsilon \partial_t^2 \vec{E} + \mu \sigma \partial_t \vec{E} - \Delta \vec{E} = 0$

- Fokus auf ebene Wellen;

Annahme (O.D.d.A.): Wellenfront in  $x$ - $y$ -Ebene

$$\Rightarrow \vec{E} = \vec{E} e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\Rightarrow -\mu\epsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega + k^2 = 0 \quad (k = k_x = |k|)$$

- Bei gegebenem reellen  $\omega$  wird  $k$  komplex

$$k = \text{Re } k + i \text{Im } k$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{=0 \text{ falls } \sigma = 0}$$

Result: exp. Dämpfung in  $z$ -Richtung; also unendliche Eindringtiefe

- Ab jetzt Annahme:  $\sigma = 0$

$$\Rightarrow \omega = k / \sqrt{\mu\epsilon} \quad ; \quad \sqrt{\mu\epsilon} \equiv n = c/v_p$$

↑  
Brech.-Index

$$(bzw. \omega c = k / \sqrt{\mu\epsilon} \quad ; \quad c\sqrt{\mu\epsilon} \equiv n = c/v_p)$$

- i.A. hängt  $\mu, \epsilon$  von Frequenz ab

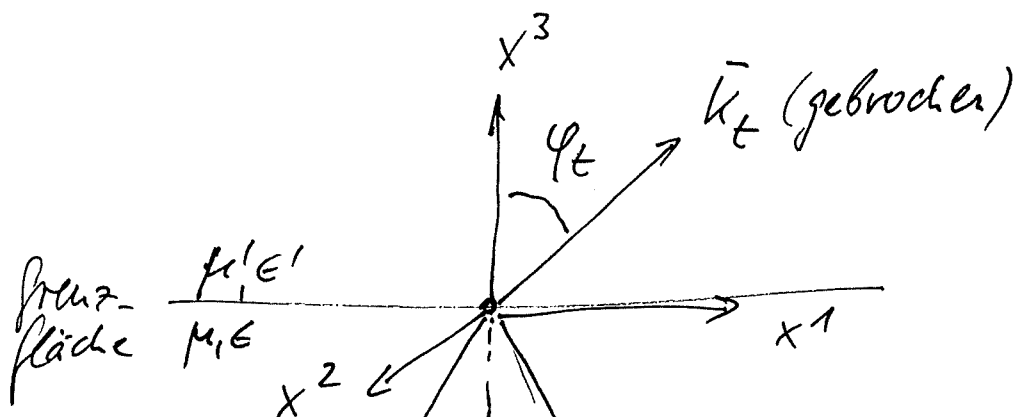
$$\Rightarrow v_g \neq v_p \quad (\text{nichttriviale Dispersion})$$

- Es gäbe hier noch viel mehr zu sagen (z.B. können  $\mu, \epsilon$  i.A. Tensoren sein), aber wir

wollen uns auf den einfachsten Fall linearer Dispersion beschränken und die Brechung / Reflexion ebener Wellen an der Grenzfläche zweier Medien besprechen:

### 13.4 Brechung & Reflexion

(siehe z.B. Jackson)



(einfallend)  $\vec{k}_e$   $\varphi_e$   $\varphi_r$   $\vec{k}_r$  (reflektiert)

$$\vec{E}_e = \vec{E}_e e^{i(\vec{k}_e \vec{x} - \omega t)} ; \vec{B}_e = n \hat{k}_e \times \vec{E}_e ; \hat{k} \equiv \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$$

$\uparrow$   $\uparrow$   
 $= \sqrt{\mu \epsilon}$

Polarisationsvektor (nicht mit Dielektr. konst. verwechseln)

folgt unmittelbar aus Maxwell-Gl.-en in Materie

Völlig analoge Ausdrücke gelten für  $\vec{E}_r, \vec{B}_r$  und  $\vec{E}_t, \vec{B}_t$  (letzterer mit  $n' = \sqrt{\mu' \epsilon'}$ )

1) Kinematik (nur Richtung der Wellen)

• Um überhaupt eine Chance zu haben, an der Grenzfläche stetige Anschlussbedingungen zu erfüllen, müssen alle 3 Wellen mit gleicher Frequenz oszillieren.

=>  $\omega_e = \omega_r = \omega_t \equiv \omega$ .

• damit dies entlang der gesamten Grenzfläche gelten kann, muss die Phase jeder der Wellen als Fkt. von  $x^1, x^2$  gleich sein:

=>  $\bar{k}_e \cdot \bar{x}_{||} = \bar{k}_r \cdot \bar{x}_{||} = \bar{k}_t \cdot \bar{x}_{||}, \quad \forall \bar{x}_{||} \equiv \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$

=> Projektionen jedes der 3 Vektoren  $\bar{k}_*$  auf horiz. Ebene ist gleich

=> alle 3  $\bar{k}_*$  liegen in gleicher (vertikaler) Ebene

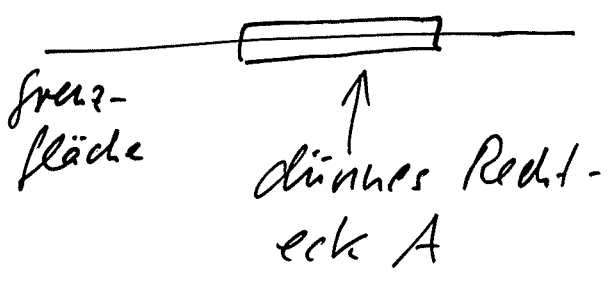
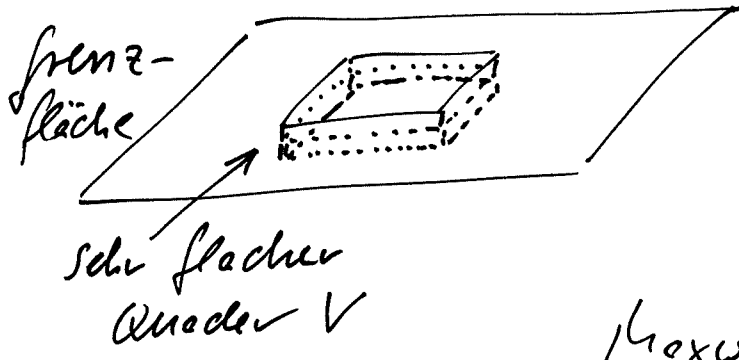
quantitativ:  $|\bar{k}_e| \sin \varphi_e = |\bar{k}_r| \sin \varphi_r = |\bar{k}_t| \sin \varphi$   
mit  $|\bar{k}_e| = |\bar{k}_r| = n\omega$  und  $|\bar{k}_t| = n'\omega$  folgt

A)  $\sin \varphi_e = \sin \varphi_r$

B)  $n \sin \varphi_e = n' \sin \varphi_t$  (Snell bzw. Snellius)

# 2 Dynamik (Intensität der Wellen, Polarisation & Phase)

- Jetzt brauchen wir detaillierte Anschlussbedingungen an der Grenzfläche.
- Betrachte



Maxwell:

$$\oint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{f} = Q_f = 0$$

↑  
freie Ladung  
an Grenzfläche

⇓  
 $\vec{D}_\perp$  stetig

$$\oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

⇓  
 $\vec{E}_\parallel$  stetig

$$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{f} = 0$$

⇓  
 $\vec{B}_\perp$  stetig

$$\oint_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} = I_f + \underbrace{\int_A \vec{D} \cdot d\vec{f}}_{=0}$$

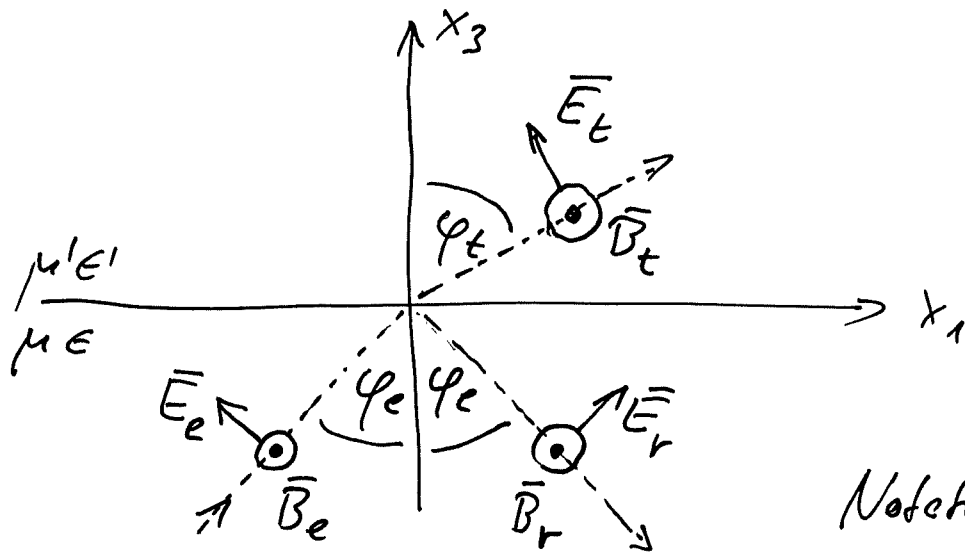
↑  
freier Strom an Grenzfläche = 0  
(in Lines)

⇓  
 $\vec{H}_\parallel$  stetig



• Betrachte lineare Polarisation

A) E-Feld parallel zur Einfallsebene



Notation:  $S = |\vec{E}|$

$$\vec{E}_{\parallel} \text{ stetig} \Rightarrow (\epsilon_e - \epsilon_r) \cos \varphi_e = \epsilon_t \cos \varphi_t \quad (*)$$

$$\vec{H}_{\parallel} \text{ stetig} \Rightarrow (\epsilon_e + \epsilon_r) \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} = \epsilon_t \sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}} \quad (**)$$

$$B \sim \sqrt{\epsilon \mu} E$$

$$H = B/\mu$$

$$\text{Definiere } A_r \equiv \frac{\epsilon_r}{\epsilon_e} \quad ; \quad A_t = \frac{\epsilon_t}{\epsilon_e}$$

$$(*) \Rightarrow 1 - A_r = A_t \cos \varphi_t / \cos \varphi_e$$

$$(**) \Rightarrow 1 + A_r = A_t \sqrt{\epsilon' \mu / \mu' \epsilon}$$

$$\Rightarrow \frac{1 - A_r}{1 + A_r} = \frac{\cos \varphi_t \cdot \sqrt{\mu' \epsilon}}{\cos \varphi_e \sqrt{\epsilon' \mu}} \equiv a$$

$$1 - A_r = a + a A_r$$

$$\Rightarrow A_r = \frac{1-a}{1+a} = \frac{\sqrt{\epsilon' \mu'} \cos \varphi_e - \sqrt{\mu' \epsilon} \cos \varphi_t}{\sqrt{\epsilon' \mu'} \cos \varphi_e + \sqrt{\mu' \epsilon} \cos \varphi_t}$$

$$\Rightarrow \frac{\underline{\epsilon}_r}{\underline{\epsilon}_e} = \frac{n' \frac{\mu}{\mu'} \cos \varphi_e - n \cos \varphi_t}{n' \frac{\mu}{\mu'} \cos \varphi_e + n \cos \varphi_t} \quad \left( \begin{array}{l} n = \sqrt{\mu \epsilon} \\ n' = \sqrt{\mu' \epsilon'} \end{array} \right)$$

(im opt. relevanten Bereich  $\mu/\mu' \approx 1$ ;

Analyse leicht zu verallgemeinern auf

Fall mit  $\sigma \neq 0 \Rightarrow$  komplexes "n")

• daraus folgt: 
$$\frac{\underline{\epsilon}_t}{\underline{\epsilon}_e} = \frac{2n \cos \varphi_e}{n' \frac{\mu}{\mu'} \cos \varphi_e - n \cos \varphi_t}$$

B) E-Feld orthogonal zur Einfallsebene

↓ analoge Analyse

Dies sind die

$$\frac{\underline{\epsilon}_r}{\underline{\epsilon}_e} = \frac{n \cos \varphi_e - n' \frac{\mu}{\mu'} \cos \varphi_t}{-n \quad + \quad -n'}$$

Fresnelschen  
Formeln

$$\frac{\underline{\epsilon}_t}{\underline{\epsilon}_e} = \frac{2n \cos \varphi_e}{n \cos \varphi_e - n' \frac{\mu}{\mu'} \cos \varphi_t}$$

(vgl. Jackson,  
Wikipedia,  
... viele Bücher...)

Vergessen Sie nicht: All diese Vielfalt  
von Phänomenen folgt aus

$$S = \int_{\mathbb{R}^{1,3}} d^4x \left( -\frac{1}{4} F^2 \right) + e \int_{WL} A_\mu dx^{\mu} - m \int_{WL} ds ; \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

(Im Fall mit Materie ergänzt um einige  
einfache Annahmen aus der statist. Mechanik.)

Vielen Dank fürs Zuhören und Mitmachen.

Viel Erfolg bei der Klausur und

Schöne Ferien!