

# Elektrodynamik

Arthur Hebecker, Heidelberg University

Vorlesungsnotizen zum Kurs von A. Hebecker, Wintersemester 2022/23 und 2023/24.  
Die vorliegende LaTeX-Version wurde mit Unterstützung von David Lehmen erstellt.

Diese Vorlesung wird besonders stark durch die Bücher [1–3] und das Skript [4] beeinflusst werden. Es gibt natürlich eine sehr große Zahl verschiedenartiger, ausgezeichneter Lehrbücher und Skripte. Es wird leider nicht immer möglich sein, auf die beste Herleitung und das beste weiterführende Buch zu einem gewissen Thema zu verweisen. Bitte suchen Sie selbst mit!

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Motivation und Einleitung</b>	<b>5</b>
1.1 Motivation . . . . .	5
1.2 Einige mathematische Grundlagen und Konventionen . . . . .	5
1.3 Maxwell-Gleichungen . . . . .	7
<b>2 Spezielle Relativitätstheorie – Kinematik</b>	<b>9</b>
2.1 Die Galilei-Transformationen . . . . .	9
2.2 Die Lorentz-Transformationen . . . . .	11
2.3 Die Lorentz-Gruppe . . . . .	13
2.4 Lorentz-Transformationen ganz explizit . . . . .	15
2.5 Eine physikalisch-anschauliche Herleitung der Lorentz-Transformationen . . . . .	18
2.6 Zusammenfassung zu Lorentz- und Poincaré-Gruppe . . . . .	20
<b>3 Spezielle Relativitätstheorie – Dynamik</b>	<b>21</b>
3.1 Wirkung für den Massenpunkt . . . . .	21
3.2 Impuls und Energie . . . . .	22
3.3 Bewegungsgleichungen . . . . .	24
3.4 Zerfälle und Streuung . . . . .	24
<b>4 Feldtheorie – grundlegende Konzepte</b>	<b>25</b>
4.1 Effektive Feldtheorien aus der Mechanik . . . . .	26

4.2	Relativistisches Skalarfeld . . . . .	28
4.3	Bewegungsgleichung und Wellen . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Elektrodynamik – prinzipielle Struktur</b>	<b>31</b>
5.1	Teilchen – Vektorpotential – Eichinvarianz . . . . .	31
5.2	Die Delta-Funktion (M – mathematischer Einschub) . . . . .	34
5.3	Die 4-er Stromdichte . . . . .	35
5.4	Maxwell-Gleichungen . . . . .	37
5.5	Übergang zu E und B . . . . .	38
5.6	Maxwell-Gleichungen in nichtrelativistischer Form . . . . .	40
<b>6</b>	<b>Elektrostatik</b>	<b>44</b>
6.1	Feld von Punktladungen . . . . .	44
6.2	Methode der Greenschen Funktion . . . . .	46
6.3	Greensche Formeln . . . . .	47
6.4	Greensche Methode für Gebiete mit Rand . . . . .	48
6.5	Spiegelladungen . . . . .	51
6.6	Taylor-Entwicklung in mehreren Variablen (M) . . . . .	54
6.7	Multipol-Entwicklung: kartesisch . . . . .	55
<b>7</b>	<b>Vollständige Funktionensysteme und die sphärische Multipolentwicklung</b>	<b>58</b>
7.1	Fourier-Reihe . . . . .	58
7.2	Fourier-Transformation . . . . .	60
7.3	Greensche Funktion im Fourier-Raum . . . . .	61
7.4	Fourier-Reihe und Polarkoordinaten . . . . .	62
7.5	Kugelflächenfunktionen (KFF) . . . . .	63
7.6	Poisson-Gleichung in Kugelkoordinaten und sphärische Multipolentwicklung . .	64
7.7	Greensche Funktion in Kugelkoordinaten und sphärische Multipolentwicklung . .	66
<b>8</b>	<b>Magnetostatik</b>	<b>67</b>
8.1	Grundgleichungen, Poisson-Gleichung für Vektor-Potential . . . . .	67
8.2	Helmholtz-Theorem (M) . . . . .	69
8.3	Magnetische Multipolentwicklung und Dipolmoment . . . . .	70
8.4	Dünne Leiter und Biot-Savart . . . . .	72

8.5	Beispiele . . . . .	73
<b>9</b>	<b>Elektrisch-Magnetische Dualität</b>	<b>75</b>
9.1	Symmetrie zwischen E und B ohne Ladungen . . . . .	75
9.2	Ladungen und Dualität . . . . .	77
9.3	Dualität und Wirkung . . . . .	78
<b>10</b>	<b>Elektrodynamik in Differentialformen</b>	<b>80</b>
10.1	Tangentialraum und Vektorfelder . . . . .	80
10.2	Kotangentialraum und 1-Formen . . . . .	84
10.3	Höhere p-Formen . . . . .	86
10.4	Äußeres Produkt, Äußere Ableitung und Hodge-Operator . . . . .	87
10.5	Integration von p-Formen . . . . .	89
10.6	Wirkung der Elektrodynamik und Maxwellgleichungen . . . . .	92
<b>11</b>	<b>Dynamik geladener Teilchen und Energie-Impuls-Erhaltung</b>	<b>96</b>
11.1	Bewegungsgleichungen für Teilchen im Feld . . . . .	96
11.2	Beispiel: Homogene Felder . . . . .	98
11.3	Energie-Impuls-Tensor eines Teilchenstroms . . . . .	99
11.4	Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes . . . . .	102
<b>12</b>	<b>Elektromagnetische Wellen</b>	<b>104</b>
12.1	Relativistische Herleitung . . . . .	104
12.2	Polarisation und Feldstärken . . . . .	105
12.3	Nichtkovariante Herleitung der Wellengleichung . . . . .	107
<b>13</b>	<b>Felder bewegter Ladungen</b>	<b>108</b>
13.1	Relativistische Greensche Funktion . . . . .	108
13.2	Residuensatz (M) . . . . .	111
13.3	Relativistische Greensche Funktion - Fortsetzung . . . . .	114
13.4	Feld einer bewegten Punktladung (Liénard-Wiechert) . . . . .	117
13.5	Feld einer geradlinig gleichförmig bewegten Ladung . . . . .	119
13.6	Dipol-Strahlung . . . . .	120
<b>14</b>	<b>Felder in Materie</b>	<b>124</b>

14.1 Dielektrische Verschiebung und magnetische Erregung . . . . .	124
14.2 Maxwell-Gleichungen in Materie: Elektrostatik . . . . .	127
14.3 Maxwell-Gleichungen in Materie: Magnetostatik . . . . .	131
14.4 Wellen in Materie . . . . .	135
14.5 Brechung und Reflexion . . . . .	137

# 1 Motivation und Einleitung

## 1.1 Motivation

Fast alles, was uns umgibt, kann physikalisch verstanden werden, wenn man nur Kerne, Elektronen und das elektromagnetische Feld benutzt. Außerdem genügt es für die allermeisten Zwecke, sowohl Kerne als auch Elektronen als punktförmig anzusehen. Die klassische Elektrodynamik, so wie wir sie jetzt entwickeln wollen, liefert also anscheinend genau das, was wir brauchen, um einen sehr großen Teil unserer Realität zu verstehen: Die Theorie der elektromagnetischen Feldes und seiner Wechselwirkung mit geladenen Punktteilchen.

Leider stimmt das so nicht ganz, denn bei kleinen Abständen, z.B. in Atomen oder im Festkörper, brauchen wir die quantisierte Version dieser Theorie, also die Quantenmechanik oder sogar die Quantenfeldtheorie. Darauf müssen Sie noch mindestens ein Semester warten. Aber es ist trotzdem klar, dass Sie mit dem Studium der Elektrodynamik, und sei es im Moment auch nur auf dem klassischen Niveau, einen entscheidenden Schritt hin zum fundamentalen Verständnis unserer Welt gehen. Ohne diese klassische Grundlage kann die spätere quantenmechanische Verallgemeinerung nicht gelingen. Außerdem liefert die klassische Elektrodynamik eine angenäherte Beschreibung vieler wichtiger makroskopischer Phänomene, wie sie natürlich in der Experimentalphysik schon gelernt haben.

Zusammenfassend darf man also behaupten, dass die klassische Elektrodynamik die Grundlage für das Verständnis fast der gesamten realen Welt schafft, mikroskopisch und makroskopisch.

Nach einer kurzen Einleitung, in der wir ein paar mathematische Grundlagen wiederholen, uns auf Konventionen einigen und die Maxwell-Gleichungen vorstellen, werden wir unser systematisches Studium wie folgt strukturieren: Wir beginnen mit der **speziellen Relativitätstheorie** (SRT), welche historisch und konzeptionell sehr eng mit der Elektrodynamik verknüpft ist. Dann werden wir ganz allgemein über das Konzept von **Feldtheorien** (FT) reden. Aus SRT und FT folgt, zusammen mit dem **Eichprinzip**, zwingend die E-Dynamik: Die Maxwell-Gleichungen lassen sich so leicht herleiten. Dann gehen wir zurück zum einfacheren nichtrelativistischen Grenzfall und studieren so die sogenannte **Elektro- und Magnetostatik**. Wir schließen fortgeschrittenere und konzeptionell sehr wichtige Themen wie die **elektrisch-magnetische Dualität** und die Beschreibung der E-Dynamik in **Differentialformen** an. Danach kommen wir zur **Dynamik geladener Teilchen in Feldern**, zu **elektromagnetischen Wellen** sowie zur **Erzeugung von Feldern durch bewegte Ladungen**. Abschließend folgt noch ein Kapitel zu **Feldern in Materie**, wobei wir die Punktladungen, um die es uns bisher ausschließlich ging, zu elektromagnetisch aktiven Medien zusammensetzen.

## 1.2 Einige mathematische Grundlagen und Konventionen

Das Konzept von Feldern im  $\mathbb{R}^n$ , oft aber nicht immer mit  $n = 3$ , ist uns vertraut. Man denke zum Beispiel an ein Temperaturfeld

$$T = T(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (1.1)$$

Hierbei charakterisieren wir  $\vec{x}$  oft auch durch seine Komponenten bzgl. einer gewissen Basis, also z.B.

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^3 x^i \hat{e}_i \equiv x^i \hat{e}_i \quad \text{oder} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Abstände auf einem durch derartige Koordinaten  $x^i$  parametrisierten Raum messen wir i.A. mittels einer Metrik  $g_{ij}$ , also

$$ds^2 = g_{ij}(\vec{x}) dx^i dx^j. \quad (1.3)$$

Die Einsteinsche Summenkonvention wird ab jetzt immer angewendet. Der für uns wichtigste Fall wird der des  $\mathbb{R}^n$  mit Metrik  $g_{ij}(\vec{x}) = \delta_{ij}$  sein. Wir sprechen dann vom euklidischen Raum.

Eine physikalisch interessante Größe ist der Gradient des Temperaturfeldes (oder eines beliebigen anderen Skalarfeldes, also eines Feldes ohne Indizes):

$$(\vec{\nabla}T(\vec{x}))_i = \partial_i T(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x^i} T(\vec{x}). \quad (1.4)$$

Wollen wir die Größe des Gradienten messen, so brauchen wir dessen Betragsquadrat:

$$|\vec{\nabla}T|^2 = g^{ij}(\partial_i T)(\partial_j T), \quad (1.5)$$

wobei die inverse Metrik  $g^{ij}$  durch

$$g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k \quad (1.6)$$

definiert ist. In unserem Fall ist natürlich  $g^{ij} = \delta^{ij}$ , aber i.A. ist die Indexstellung und die Unterscheidung zwischen Metrik und inverser Metrik sowie zwischen Vektor (Index oben) und Kovektor (Index unten) entscheidend. Einfache Beispiele sind  $d\vec{x}$  mit Komponenten  $dx^i$  sowie  $\nabla T$  mit Komponenten  $\partial_i T$ .

Bitte beachten Sie, dass wir  $dx^i$  im Moment *noch nicht* als Differentialform (siehe später) auffassen sondern einfach als infinitesimale Änderung der Koordinate  $x^i$ . Wenn wir uns also im Raum von  $\vec{x}$  nach  $\vec{x} + d\vec{x}$  bewegen, ändert sich die Temperatur um

$$dT(\vec{x}) = d\vec{x} \cdot (\vec{\nabla}T(\vec{x})) = dx^i \partial_i T(\vec{x}). \quad (1.7)$$

Falls Ihnen die Komplikation mit Metrik und oberen bzw. unteren Indizes unnötig erscheint, versuchen Sie bitte das eben gesagte für ein Temperaturfeld  $T(\phi, \theta)$  auf einer Einheitskugel  $S^2$ , parametrisiert durch  $\theta$  und  $\phi$ , zu wiederholen (Abb. 1). Dann ist der Abstand definiert durch

$$ds^2 = d\theta^2 + \cos^2(\theta)d\phi^2, \quad \text{also} \quad g_{ij} = \text{diag}(1, \cos^2(\theta)) \quad \text{mit} \quad i, j \in \{1, 2\}. \quad (1.8)$$

Jetzt sind Metrik und inverse Metrik nicht mehr gleich und man muss wirklich immer auf die Indexposition achten.

Genauer gesagt ist es so, dass Vektoren und Kovektoren immer zu einem Punkt des relevanten Raumes (der ‘differenzierbaren Mannigfaltigkeit’) gehören. Sie leben jeweils im Tangential- bzw. Kotangentialraum an diesem Punkt. Zum Beispiel kann man sich eine Trajektorie  $\{\theta(t), \phi(t)\} \equiv \{x^1(t), x^2(t)\}$  auf der  $S^2$  denken. Die Geschwindigkeit  $\vec{x}(t)$  dieser Trajektorie an einem bestimmten Punkt ist ein typischer Tangentialvektor (vgl. Abb. 1). Seine Komponenten haben obere Indizes.

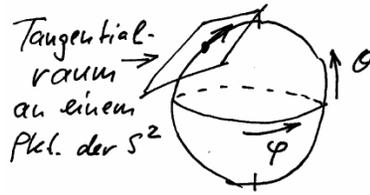


Abbildung 1: Sphäre  $S^2$  mit Tangentialraum an einem Ihrer Punkte und einem Tangentialvektor darin.

Kotangentialvektoren haben entsprechend untere Indizes. Diese Bemerkungen sollen nur helfen, die Verbindung zu dem herzustellen, was Sie in zu dieser Thematik in Mathe gelernt haben. Im Moment brauchen wir diese abstraktere Sicht noch nicht zwingend.

Man kann neben Skalarfeldern auch Vektor- und Kovektorfelder betrachten, z.B. kann in unserem  $\mathbb{R}^n$  (oder auch auf der  $S^2$ ) ein Flüssigkeit mit einem Geschwindigkeitsfeld  $v^i(\vec{x})$  strömen. Der Gradient der Temperatur ist Kovektorfeld mit Komponenten  $\partial_i T(\vec{x})$ . Man kann Indizes mit der Metrik heben und senken und damit Vektor- in Kovektorfelder umwandeln und umgekehrt:

$$v_i = g_{ij}v^j, \quad v^i = g^{ij}v_j. \quad (1.9)$$

Nach diesem elementaren Vorspiel schränken wir uns jetzt auf den Fall *konstanter* Metrik ein und geben die Definition von Divergenz und Rotation,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \equiv \partial_i v^i, \quad (\vec{\nabla} \times \vec{v})^i \equiv \epsilon^{ijk} \partial_j v_k, \quad \text{wobei} \quad \epsilon^{123} = 1. \quad (1.10)$$

Hier ist  $\vec{v}$  ein beliebiges Vektorfeld. Das Levi-Civita-Symbol  $\epsilon^{ijk}$  ist total antisymmetrisch in seinen Indizes. Die Rotation ist wegen der Benutzung von  $\epsilon^{ijk}$  nur in 3 Dimensionen definiert. Bitte beachten Sie, dass die entsprechenden Ausdrücke im Fall nichtkonstanter Metrik komplizierter sind.

Schließlich erinnern wir an die Sätze von Gauß und Stokes in  $n = 3$  Dimensionen:

$$\int_V d^3\vec{x} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = \oint_{\partial V} \vec{v} \cdot d\vec{f} \quad , \quad \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{f} = \oint_{\partial A} \vec{v} \cdot d\vec{s}. \quad (1.11)$$

Hierbei ist  $\vec{v}$  ein beliebiges (hinreichend glattes) Vektorfeld,  $V$  und  $A$  sind ein kompaktes Volumen bzw. eine kompakte Fläche im  $\mathbb{R}^3$ , und  $\partial V$  bzw.  $\partial A$  sind deren Ränder (siehe Abb. 2) Letztere sind natürlich jeweils eine Fläche ohne Rand und eine geschlossene Kurve. Die infinitesimalen Vektoren  $d\vec{f}$  und  $d\vec{s}$  beschreiben die entsprechenden Flächenelemente bzw. Wegstücke.

### 1.3 Maxwell-Gleichungen

Wie Sie natürlich schon wissen, beschreibt die E-Dynamik zwei Vektorfelder,  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$ , welche durch Ladungen bzw. die Bewegung von Ladungen erzeugt werden können. Im Gaußschen

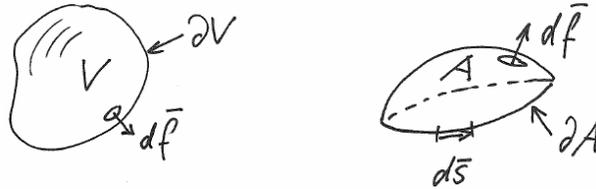


Abbildung 2: Geometrien für die Anwendung der Sätze von Gauß und Stokes.

Einheitensystem lauten die relevanten Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad (1.12)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 4\pi\vec{j}/c + \dot{\vec{E}}/c \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}/c. \qquad (1.13)$$

Hierbei sind  $\rho$  die Ladungsdichte und  $\vec{j}$  die zugehörige Ladungsstromdichte. Das Magnetfeld  $B$  wird in ‘Gauss’ (auch G oder Gs) gemessen, wobei  $G = \sqrt{g/\text{cm s}^2}$  gilt. Diese Beziehung zu mechanischen Einheiten wird, sofern nicht schon aus der Experimentalphysik bekannt, später klar werden. Wir arbeiten im Vakuum, so dass die dielektrische Verschiebung  $D$  und die magnetische Feldstärke  $H$  keine Rolle spielen – wir identifizieren sie im Moment schlicht mit  $E$  und  $B$ . (Eigentlich nennt man  $B$  die Flussdichte, aber wir bleiben wegen der Analogie zum  $E$ -Feld bei Feldstärke.)

Es ist aus Sicht eines Theoretikers oft bequem, die Faktoren  $4\pi$  in die Definitionen von Feldstärken und Ladungen zu absorbieren. Dies führt zum sogenannten Lorentz-Heaviside-System. Außerdem ist es, wie wir im Detail diskutieren werden, für den Theoretiker sehr natürlich,  $c = 1$  zu setzen. D.h. wir messen die Zeit z.B. in Metern, wobei 1 m genau die Zeit ist, welche das Licht braucht, um 1 m zurückzulegen. Mit diesen Vereinfachungen lauten die Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad (1.14)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{j} + \dot{\vec{E}} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}. \qquad (1.15)$$

Unsere spätere formale Herleitung wird uns die Maxwell-Gleichungen in genau dieser einfachen Form geben.

Selbst in der letzten Form sind die Maxwell-Gleichungen jedoch noch viel zu komplex, um überzeugend als ‘natürliche Grundlage’ der gesamten E-Dynamik zu fungieren. Außerdem sind sie relativistisch kovariant, was man jedoch so nicht sieht. Sie folgen auch in dieser Form nicht ohne weiteres aus einem Wirkungsprinzip, was (wie Sie später sehen werden) für die Quantisierung sehr wichtig ist. Deshalb werden wir im Folgenden nochmal ganz von vorne anfangen, die spezielle Relativitätstheorie und die Grundprinzipien von relativistischen Feldtheorien formulieren, und damit die Maxwell-Gleichungen mit minimalen Annahmen herleiten. Das wird das zentrale Thema des Anfangs dieser Vorlesung sein.

Bevor wir uns dem zuwenden, geben wir noch die Integralform der Maxwell-Gleichungen an,

$$\int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{f} = Q \qquad \int_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{f} = 0 \qquad (1.16)$$

$$\int_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{s} = I + \frac{d}{dt} \int_A \vec{E} \cdot d\vec{f} \qquad \int_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{f}, \qquad (1.17)$$

wobei

$$Q \equiv \int_V d^3\vec{x} \rho \qquad \text{und} \qquad I = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{f} \qquad (1.18)$$

die Ladung in  $V$  bzw. der Strom durch  $I$  sind. Die Herleitung überlassen wir dem Leser als Übung. Sie besteht im Integrieren der differentiellen Gleichungen über ein Volumen  $V$  oder eine Fläche  $A$ , so dass man anschließend Gauß bzw. Stokes anwenden kann. In (1.17) darf man die Zeitableitung nur vors Integral ziehen, wenn  $A$  zeitunabhängig ist.

## 2 Spezielle Relativitätstheorie – Kinematik

Die Motivation für dieses Kapitel haben wir oben schon genannt: Ein gutes Verständnis der SRT wird uns eine mühelose Herleitung der Maxwell-Gleichungen ermöglichen.

### 2.1 Die Galilei-Transformationen

Schon in der Newtonschen Mechanik haben wir es als nützlich erkannt, Raum und Zeit in der sogenannten Raumzeit  $\mathbb{R}^4$  zu vereinigen. Punkte darin bezeichnet man als Ereignisse:

$$\mathbb{R}^4 \ni \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \vec{x} = \{x^i\} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}. \qquad (2.1)$$

Die auf dieser Raumzeit wirkende Symmetriegruppe sind die **Galilei-Transformationen**, welche generiert werden durch

(1) Rotationen:

$$\begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} t \\ R\vec{x} \end{pmatrix} \qquad , \qquad R \in O(3), \qquad (2.2)$$

also mit einer orthogonalen Matrix  $R$ .

(2) Translationen:

$$\begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} t + s \\ \vec{x} + \vec{y} \end{pmatrix} \qquad , \qquad \text{mit} \qquad s \in \mathbb{R}; \vec{y} \in \mathbb{R}^3. \qquad (2.3)$$

(3) Boosts:

$$\begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} + \vec{v}t \end{pmatrix} \qquad , \qquad \text{mit} \qquad \vec{v} \in \mathbb{R}^3. \qquad (2.4)$$

Die allgemeine Galilei-Transformation ist durch beliebige Kombination von Elementen dieser drei Untergruppen gegeben.

Es liegt natürlich nahe, den hier betrachteten  $\mathbb{R}^4$  als Vektorraum anzusehen. Doch das ist nicht wirklich angemessen, weil die Translationen aus Vektorraum-Sicht keine natürliche Operation darstellen: Sie respektieren nicht die für einen Vektorraum so wichtige Sonderstellung der Null.

Die mathematisch präzisere Beschreibung betrachtet den  $\mathbb{R}^4$  nicht als Vektorraum sondern als **affinen Raum**. Details dazu finden Sie z.B. in meinem TP1-Skript. Für unsere Zwecke, also für den Übergang zur Symmetrie der speziellen Relativitätstheorie, wird es bequemer sein, die Translationen zunächst zu ignorieren. Dies ermöglicht es uns, die Raumzeit  $\mathbb{R}^4$  als Vektorraum mit den Symmetrien (1) und (3), also mit Rotationen und Boosts, zu betrachten. Physikalisch bedeutet dies, dass wir uns auf Transformationen einschränken, welche den Koordinatenursprung  $\{t, \vec{x}\} = \{0, \vec{0}\}$  invariant lassen. Man bezeichnet sie auch als **homogene Galilei-Transformationen**. Am Ende unserer Diskussion wird es kein Problem darstellen, die Translationen wieder zuzulassen.

Wie eben erklärt, wollen wir uns jetzt also auf die Gruppe homogenen Galilei-Transformationen, also der linearen Transformationen

$$\begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} t \\ R\vec{x} + \vec{v}t \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{v} & R \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

konzentrieren. Hier ist  $G$  eine  $4 \times 4$ -Matrix in Block-Form. Insbesondere stehen  $\vec{0}^T$  für einen Zeilenvektor aus drei Nullen und  $\vec{v}$  für einen Spaltenvektor, dessen drei Einträge die Boost-Geschwindigkeiten beschreiben. Der Leser mag als Übungsaufgabe prüfen, dass Transformationen von der Gestalt (2.5) tatsächlich eine Gruppe bilden.

Die entscheidende Aussage im Zusammenhang mit der Newtonschen Mechanik ist, dass die Galilei-Transformationen (und damit natürlich die für uns im Moment relevante Untergruppe der Transformation  $G$ ) eine Symmetrie-Gruppe bilden. Das bedeutet, dass ein physikalischer Prozess (also eine Lösung der Bewegungsgleichungen) wieder auf einen physikalischen Prozess abgebildet wird:

$$\text{Lösung der Bew.gl.} \quad \xrightarrow{G} \quad \text{Lösung der Bew.gl.} \quad (2.6)$$

Die eben gegebene Definition entspricht der **aktiven Sicht** auf Symmetrien. Ebenso nützlich ist die **passive Sicht**: Jetzt beschreiben wir gleiche Physik mittels zweier verschiedener Koordinatensysteme, die wir z.B.  $K$  und  $K'$  nennen, und die durch eine Galilei-Transformation  $G$  miteinander verbunden sind. Wir setzen voraus, dass  $K$  ein Inertialsystem ist und wissen somit schon, dass auch  $K'$  ein Inertialsystem sein wird.

Die allgemeine Definition einer Symmetrie ist in dieser passiven Sicht ist wie folgt: *Die Bewegungsgleichungen müssen in  $K$  und  $K'$  die gleiche mathematische Form haben.* Dies ersetzt die obige Forderung, dass eine Lösung in eine Lösung übergeht. Letztere wäre ja jetzt sinnlos, weil wir per Definition von der selben Lösung sprechen, nur eben aus Sicht von  $K$  und  $K'$ .

Wir konzentrieren uns jetzt auf die passive Sicht der homogenen Galilei-Transformationen. Das System  $K'$  gehe aus  $K$  durch einen Boost  $(-\vec{v})$  und eine Drehung  $R^{-1}$  (in dieser Reihenfolge) hervor. Für die Koordinaten eines Ereignisses in  $K'$  bzw.  $K$  gilt dann

$$\begin{pmatrix} t' \\ \vec{x}' \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{v} & R \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Man schreibt oft auch

$$\begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} t' \\ \vec{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ R\vec{x} + \vec{v}t \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Jetzt wenden wir dies auf eine Trajektorie, also eine Weltlinie in  $\mathbb{R}^4$ , an:

$$\begin{pmatrix} t \\ \vec{x}(t) \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Die Geschwindigkeit der Weltlinie am Punkt  $t = 0$  sei

$$\vec{w} \equiv \dot{\vec{x}}(0). \quad (2.10)$$

Nach einem reinen Boost, also einer homogenen Galilei-Transformation mit  $R = \mathbb{1}$  und beliebigem  $\vec{v}$ , erhalten wir die Weltlinie

$$\begin{pmatrix} t' \\ \vec{x}'(t') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \vec{x}(t) + \vec{v}t \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Die Geschwindigkeit der neuen Weltline bei  $t' = 0$ , was natürlich auch  $t = 0$  entspricht, lautet also

$$\vec{w}' = \dot{\vec{x}}'(0) = \vec{w} + \vec{v}. \quad (2.12)$$

Wir sehen, dass sich bei einem nichttrivialen Boost **jede** Geschwindigkeit ändert.

## 2.2 Die Lorentz-Transformationen

Im Gegensatz zum oben Gezeigten, wissen wir, dass die Lichtgeschwindigkeit  $c$  in allen Inertialsystemen gleich ist. Dieser zentrale experimentelle Fakt geht unter anderem auf das berühmte Michelson-Morley-Experiment zurück und wurde seit dem auf verschiedenste Weise überprüft. Die erstaunliche Implikation ist, dass Licht weder eine auf einem Äther reitende Welle ist, noch ein Strom von gemäß Galilei durch die Quelle abgeschossenen Teilchen. Bei letzteren müsste sich ja sonst ihre Geschwindigkeit mit der Geschwindigkeit der Quelle ändern.

Haben wir einmal den Fakt der Gleichheit von  $c$  in allen Systemen akzeptiert, so bleibt nur ein Ausweg: Wir müssen die Transformationsregeln für den Übergang von  $K$  nach  $K'$  ändern. Die entscheidende Forderung besteht darin, dass zwei Ereignisse, welche in  $K$  lichtartig getrennt waren, auch in  $K'$  lichtartig getrennt sein müssen.

Hierbei definieren wir, dass wir  $(t_1, \vec{x}_1)$  und  $(t_2, \vec{x}_2)$  **lichtartig getrennt** nennen wollen, falls es einen Lichtstrahl gibt, der von  $(t_1, \vec{x}_1)$  ausgeht und bei  $(t_2, \vec{x}_2)$  eintrifft. Mit  $\Delta\vec{x} \equiv \vec{x}_2 - \vec{x}_1$  und  $\Delta t \equiv t_2 - t_1$  bedeutet dies  $|\Delta\vec{x}| = c\Delta t$ .

Damit nimmt unsere Forderung, dass lichtartige Trennung wieder zu lichtartiger Trennung wird, die folgende Form an:

$$|\Delta \vec{x}| = c \Delta t \quad \Rightarrow \quad |\Delta \vec{x}'| = c \Delta t'. \quad (2.13)$$

Eine äquivalente Formulierung dafür lautet

$$-c^2 \Delta t^2 + \Delta \vec{x}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad -c^2 \Delta t'^2 + \Delta \vec{x}'^2 = 0. \quad (2.14)$$

Eine klarere Formulierung dieser Forderung an Transformationen erhält man durch Einführung von 4-er Vektoren:

$$x = \{x^\mu\} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad x^0 = ct. \quad (2.15)$$

Wir benutzen für die Indizierung von 4-er Vektoren kleine griechische Buchstaben:  $\mu, \nu, \rho, \dots \in \{0, 1, 2, 3\}$ . Außerdem setzen wir durch passende Einheitenwahl ab sofort  $c = 1$ , so dass  $x^0 = t$ . Es ist eine übliche Notation, 4-er Vektoren ohne Vektor-Pfeil zu schreiben, d.h.  $x$  steht für den 4-er Vektor,  $\vec{x}$  für den räumlichen Anteil  $\{x^1, x^2, x^3\} = \{x^i\}$ .

Wir definieren nun auf unserem  $\mathbb{R}^4$ , dessen Elemente wir jetzt als 4-er Vektoren beschreiben, die quadratische Form<sup>1</sup>

$$x^2 \equiv -(x^0)^2 + \vec{x}^2. \quad (2.16)$$

Lichtartigkeit bedeutet in dieser Sprache  $x^2 = 0$ . Zusätzlich führen wir folgende Definitionen ein:

$$x^2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 'x \text{ ist zeitartig}' \quad (2.17)$$

$$x^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 'x \text{ ist raumartig}' \quad (2.18)$$

Jetzt kommen wir zu den gesuchte Transformationen. Wie wir schon wissen, erfüllen homogene Galilei-Transformation,

$$x \rightarrow x' = Gx \quad \text{bzw.} \quad x^\mu \rightarrow x'^\mu = G^\mu_\nu x^\nu, \quad (2.19)$$

unsere zentrale Forderung

$$x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x'^2 = 0 \quad (2.20)$$

nicht. Wir suchen eine andere Klasse von Matrizen, welche wir mit  $\Lambda$  bezeichnen und **Lorentz-Transformation** nennen wollen. Für diese soll gelten

$$x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x'^2 \equiv (\Lambda x)^2 = 0. \quad (2.21)$$

Bitte beachten Sie, dass wir an dieser Stelle die Annahme gemacht haben, dass unsere neue Symmetrie-Gruppe aus **linearen** Transformationen bestehen wird.

---

<sup>1</sup>Vorsicht! Die Konvention  $x^2 \equiv (x^0)^2 - \vec{x}^2$  ist auch weit verbreitet.

Es ist nicht offensichtlich aber wahr, dass man ohne die Menge der Matrizen weiter einzuschränken auch die stärkere Forderung

$$x'^2 \equiv (\Lambda x)^2 = x^2 \quad (2.22)$$

stellen kann. Wir definieren also die Lorentz-Gruppe als die Menge aller Matrizen, welche (2.22) für alle  $x$  erfüllen.

Ein einfaches Argument dafür, dass wir durch die stärkere Forderung der **Invarianz von  $x^2$**  keine physikalisch sinnvollen Transformationen, welche die Lichtartigkeit respektieren, ausschließen, ist folgendes: Wir erwarten eine 6-dimensionale (durch 6 reelle Parameter definierte) Gruppe von Matrizen. Der Grund ist, dass wir physikalisch 3 unabhängige Drehungen und 3 Boosts beschreiben müssen. Nun ist es aber nicht schwer (siehe später und Übungen), zu zählen, wie viele Dimensionen die Menge (eigentlich Mannigfaltigkeit) aller Matrizen hat, welche (2.22) erfüllen. Es sind 6. Wir haben also keine Transformationen verloren (zumindest keine großen Klassen von Transformationen).

Ein anderes Argument, warum die Invarianz von  $x^2$  nicht nur hinreichend sondern auch notwendig ist, findet sich in [2]. Es ist allerdings nicht sehr präzise und dadurch nicht sehr überzeugend. Der Wikipedia-Artikel ‘Derivations of Lorentz-Transformations’ entwickelt aus dem Argument von [2] einen einfachen Beweis, den wir jedoch aus Zeitgründen nicht reproduzieren wollen. Wir begnügen uns mit dem obigen Dimensions-Argument einem später zu diskutierendem Spezialfall (eine  $(1+1)$ -dimensionale Raumzeit), der zeigt, wie man grundsätzlich von der Erhaltung der Lichtartigkeit zur Erhaltung von  $x^2$  kommt.

## 2.3 Die Lorentz-Gruppe

Wir wollen jetzt das oben zu Lorentz-Transformationen Gesagte in eine klarere mathematische Sprache gießen. Dazu erinnern wir uns an die **Definition der Gruppe  $O(3)$  über die Norm**:

$$O(3) \text{ ist die Gruppe aller } R \text{ mit:} \quad (R\vec{x})^2 = \vec{x}^2 \quad (\forall \vec{x}). \quad (2.23)$$

Hierbei ist, wie üblich,  $\vec{x}^2 = x^i x^j \delta_{ij}$  und der Rang-2-Tensor  $\delta_{ij}$  ist die Metrik auf dem euklidischen Raum  $\mathbb{R}^3$ . Äquivalent dazu ist die **Definition der Gruppe  $O(3)$  über die Metrik**:

$$\dots \text{ alle } R \text{ mit} \quad \delta_{ij} R^i_k R^j_l = \delta_{kl}. \quad (2.24)$$

Unsere obige Diskussion der physikalischen Motivation für die Lorentz-Transformationen führt zu einer ganz analogen **Definition der Lorentz-Gruppe  $O(1,3)$  über die Norm**:

$$O(1,3) \text{ ist die Gruppe aller } \Lambda \text{ mit:} \quad (\Lambda x)^2 = x^2 \quad (\forall x). \quad (2.25)$$

Hierbei ist  $(\Lambda x)^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$  sowie

$$x^2 = -(x^0)^2 + \vec{x}^2 = x^\mu x^\nu \eta_{\mu\nu} \quad \text{mit} \quad \eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1). \quad (2.26)$$

Das Symbol  $x$  bezeichnet, wie weiter oben diskutiert, eine 4-er Vektor. Als entscheidende Neuerung haben wir die Lorentz-Metrik  $\eta_{\mu\nu}$  eingeführt, welche sich von euklidischen Metrik des  $\mathbb{R}^4$

nur um ein Vorzeichen eines Eigenwerts unterscheidet. Diese Metrik ermöglicht es uns, unsere vorher physikalische motivierte Größe  $x^2$  als Quadrat des Vektors  $x$  mit ebendieser Metrik zu schreiben. Völlig analog zur bekannten Situation bei der  $O(3)$ , ergibt sich damit die **Definition der Lorentz-Gruppe  $O(1,3)$  über die Metrik:**

$$\dots \text{ alle } \Lambda \text{ mit } \quad \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma} . \quad (2.27)$$

Alles weiter oben zur Metrik im Allgemeinen gesagte gilt auch hier, im Spezialfall von  $\eta_{\mu\nu}$ : Es gibt die durch

$$\eta^{\mu\nu} \eta_{\nu\rho} = \delta^\mu{}_\rho \quad (2.28)$$

definierte inverse Metrik  $\eta^{\mu\nu}$ , welche allerdings als Matrix mit der ursprünglichen Metrik übereinstimmt. Man kann einen allgemeinen Vektor  $x$  oder  $v$  als Element des Vektorraums  $V \equiv \mathbb{R}^{1,3}$  auffassen. Hierbei verweist der Index  $(1,3)$  auf die zum Raum gehörende Metrik. Man spricht vom **Minkowski-Raum** und dementsprechend, synonym zu Lorentz-Metrik auch von der Minkowski-Metrik.

Wenn man mit der Metrik den Index eines Vektors senkt, erhält man

$$v_\mu = \eta_{\mu\nu} v^\nu \quad \text{mit} \quad \{v_\mu\} \in V^* . \quad (2.29)$$

Indizes heben und senken kann man ebenso bei höheren Tensoren, z.B.

$$t_{\mu\nu} = \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} t^{\rho\sigma} \quad \text{oder} \quad t^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} t_{\rho\sigma} , \quad (2.30)$$

wobei die Tensoren mit unteren bzw. oberen Indizes als Elemente von  $(V^* \otimes V^*)$  bzw.  $(V \otimes V)$  aufgefasst werden können.

Es wird für uns nützlich sein, uns in diesem Zusammenhang auch an die Konzepte von Lie-Gruppen und Lie-Algebren zu erinnern bzw. diese zu einzuführen (Vgl. auch meine Mechanik-Skripte). Sie werden davon vermutlich auch sehr bald in Mathe hören.

Grob gesagt ist eine **Lie-Gruppe** eine Gruppe, welche gleichzeitig eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist, wobei die Gruppenoperation differenzierbar sein soll. Einfacher gesagt sind Lie-Gruppen kontinuierliche Gruppen, also durch eine gewisse Zahl von reellen Koordinaten parametrisiert. Beispiele, die Sie schon kennen, sind Dreh- und Galilei-Gruppe. Die Zahl der Parameter bzw. die Dimension sind in diesen beiden Fällen 3 und 10.

Ein entscheidende und vermutlich neue Tatsache ist, dass zu jeder Lie-Gruppe eine sogenannte Lie-Algebra gehört. Dies gilt zwar ganz allgemein, aber wir erklären es nur für Matrix-Gruppen, also für Gruppen von linearen Transformationen auf endlichdimensionalen Räumen. Wir behaupten, dass man jedes Element  $R$  aus der ‘Zusammenhangskomponente der Eins’<sup>2</sup> einer Matrix-Lie-Gruppe  $G$  schreiben kann als

$$R = \exp(T) \quad \text{mit} \quad T \in \text{Lie}(G) . \quad (2.31)$$

Hierbei ist  $\text{Lie}(G)$  ein Vektorraum von Matrizen, die sogenannte Lie-Algebra, und  $\exp$  ist durch seine Reihendarstellung in naheliegender Weise auch für Matrizen definiert. Die Abbildung

---

<sup>2</sup>Die Zusammenhangskomponente der Eins besteht aus allen Elementen, die durch eine Kurve in der Gruppe mit dem Einselement verbunden werden können. Für die Drehgruppe sind dies z.B. alle echten Drehungen, ohne die Reflexionen.

$R \leftrightarrow T$  ist in der Nähe der  $\mathbb{1} \in G$  und der  $0 \in Lie(G)$  eineindeutig und differenzierbar (ein Diffeomorphismus).

Eine der unmittelbarsten Anwendungen besteht darin, dass man ‘kleine’ Transformationen als

$$R = \exp(\epsilon T) \simeq \mathbb{1} + \epsilon T \quad ( T \in Lie(G) , \quad \epsilon \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \epsilon \ll 1 ) \quad (2.32)$$

annähern kann. In diesem Zusammenhang nennt man die Basiselemente des Vektorraums  $Lie(G)$  auch die **Generatoren** der Gruppe  $G$ .

Vermutlich sind Sie bei der Diskussion von Drehungen in der Mechanik schon mit Ähnlichem begegnet: Wir fokussieren uns jetzt auf den Spezialfall  $G = O(n)$ , also Drehungen (und Reflexionen) in  $n$  Dimensionen. Wir benutzen (2.32) und betrachten den Limes  $\epsilon \rightarrow 0$ :

$$RR^T = \mathbb{1} \quad \Rightarrow \quad (\mathbb{1} + \epsilon T + \mathcal{O}(\epsilon^2))(\mathbb{1} + \epsilon T + \mathcal{O}(\epsilon^2))^T = \mathbb{1} \quad \Rightarrow \quad T + T^T = 0. \quad (2.33)$$

Hierbei haben wir uns im letzten Schritt auf den Koeffizienten des linearen Terms in  $\epsilon$  eingeschränkt. Wie wir sehen, ist also  $Lie(O(n))$  der Vektorraum der antisymmetrischen  $(n \times n)$ -Matrizen und damit  $\dim(Lie(O(n))) = (n^2 - n)/2 = n(n - 1)/2$ . Letzteres folgt, wenn man von der Gesamtzahl der Elemente die bei antisymmetrischen Matrizen leere Diagonale abzieht und dann wegen der Antisymmetrie durch 2 teilt.

Jetzt können wir das eben gelernte mühelos auf die Lorentz-Gruppe und ihre Lie-Algebra  $Lie(O(1, 3))$  übertragen. Wir schreiben dazu

$$\Lambda = \exp(\epsilon M) \quad ( M \in Lie(SO(1, 3)) ) \quad (2.34)$$

und setzen dies in die metrik-basierte Definition der Gruppe ein. Dabei lohnt es sich, die Index-Notation zu benutzen

$$\eta_{\mu\nu} (\mathbb{1} + \epsilon M + \mathcal{O}(\epsilon^2))^\mu_\rho (\mathbb{1} + \epsilon M + \mathcal{O}(\epsilon^2))^\nu_\sigma = \eta_{\rho\sigma}. \quad (2.35)$$

Das Verschwinden des Koeffizienten des linearen Terms liefert

$$\eta_{\mu\nu} M^\mu_\rho \delta^\nu_\sigma + \eta_{\mu\nu} \delta^\mu_\rho M^\nu_\sigma = 0. \quad (2.36)$$

In der letztere Beziehung können wir die Wirkung von  $\eta$  auf  $M$  als Senkung des ersten Index auffassen, wir haben also

$$M_{\sigma\rho} + M_{\rho\sigma} = 0. \quad (2.37)$$

Mit anderen Worten, die Matrizen aus  $Lie(O(1, 3))$  sind, nach Senkung des ersten Index, identisch mit den antisymmetrischen  $(4 \times 4)$  Matrizen. Wir hätten das Obige auch für  $O(1, n - 1)$  durchführen können, und haben somit gezeigt, dass  $\dim(Lie(O(1, n - 1))) = n(n - 1)/2$  und insbesondere  $\dim(Lie(O(1, 3))) = 6$ . Wir haben also in der Tat genug Parameter, um Rotationen und Boosts (3+3) zu beschreiben und bestätigen so nochmal unsere Behauptung, dass wir durch die physikalisch eigentlich zu starke Forderung der Invarianz von  $x^2$  nichts verlieren.

## 2.4 Lorentz-Transformationen ganz explizit

Wir wollen jetzt ganz explizit werden, und zwar am Beispiel einer (1+1)-dimensionalen Welt. Das Gefundene lässt sich am Ende leicht auf  $(1 + 3)$  Dimensionen verallgemeinern. Wir folgen hier [4].

Unsere Koordinaten sind  $x^0 = t$  und  $x^1$ . Das für uns so wichtige **invariante Längenquadrat**, welches die Lichtartigkeit definiert, kann man schreiben als

$$-x^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 = (x^0 + x^1)(x^0 - x^1) = x^+ x^-, \quad (2.38)$$

wobei wir die sogenannten Lichtkegel-Koordinaten

$$x^+ = x^0 + x^1 \quad \text{und} \quad x^- = x^0 - x^1 \quad (2.39)$$

definiert haben. Unsere zentrale physikalische Forderung an Transformationen war, dass Lichtartigkeit erhalten wird, also in unserem Fall

$$x^+ x^- = 0 \quad \Rightarrow \quad x'^+ x'^- = 0. \quad (2.40)$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$(x^+ = 0 \text{ oder } x^- = 0) \quad \Rightarrow \quad (x'^+ = 0 \text{ oder } x'^- = 0). \quad (2.41)$$

Da wir mit dem Grenzwert verschwindender Boost-Geschwindigkeit,  $v \rightarrow 0$ , konsistent sein müssen, und da dann die Transformation trivial wird, kann es keinen Wechsel der Null zwischen  $x^+$  und  $x^-$  geben. Zumindest gilt das für den mit der  $\mathbb{1}$  zusammenhängenden Teil der Lorentz-Gruppe. Es muss also weiterhin gelten

$$(x^+ = 0 \Rightarrow x'^+ = 0) \quad \text{und} \quad (x^- = 0 \Rightarrow x'^- = 0). \quad (2.42)$$

Damit wird die einzig mögliche lineare Transformation vom Typ

$$x'^+ = f^+(v)x^+, \quad x'^- = f^-(v)x^- \quad (2.43)$$

sein. Hierbei sind  $f^\pm(v)$  im Moment noch beliebige Funktionen der Boost-Geschwindigkeit  $v$ , welche in  $(1+1)$  Dimensionen natürlich nur eine Komponente hat, so dass wir keinen Vektorpfeil schreiben. Der entscheidende Punkt in (2.43) ist, dass z.B.  $x'^+$  keine Beimischung von  $x^-$  erhält, weil dies (2.42) widersprechen würde.

Jetzt betrachten wir die Hintereinanderausführung von

$$(\text{Boost mit } v), (\text{Spiegelung } x^1 \rightarrow -x^1), (\text{Boost mit } v), (\text{Spiegelung } x^1 \rightarrow -x^1). \quad (2.44)$$

Wegen der dazwischenliegenden Reflexion neutralisieren sich die beiden Boosts gerade und das Ergebnis ist die Identität. Ausserdem werden bei der Reflexion  $x^+$  und  $x^-$  gerade vertauscht, so dass am Ende jede der beiden Lichtkegel-Koordinaten mit  $f^+$  **und** mit  $f^-$  multipliziert wird. Es muss also gelten

$$f^+(v)f^-(v) = 1. \quad (2.45)$$

Wir definieren z.B.  $g(v) \equiv f^+(v)$  und haben statt (2.43) jetzt

$$x'^+ = g(v)x^+, \quad x'^- = \frac{1}{g(v)}x^-. \quad (2.46)$$

Damit sehen wir nun ganz explizit dass Invarianz der Lichtartigkeit die Invarianz von  $x^2 = -x^+x^-$  impliziert. Das lässt sich mit etwas linearer Algebra auf den Fall von mehr Dimensionen verallgemeinern (siehe der oben erwähnte Wikipedia-Artikel).

Nachdem wir die Transformation von  $x^\pm$  ganz explizit kennen, können wir natürlich zu  $x^{0/1}$  zurückkehren. Zum Beispiel gilt

$$x'^1 = \frac{1}{2}(x'^+ - x'^-) = \frac{1}{2} \left( gx^+ - \frac{1}{g}x^- \right), \quad (2.47)$$

und nach Einsetzen der Formeln für  $x^\pm$ :

$$x'^1 = \frac{1}{2} \left( g - \frac{1}{g} \right) x^0 + \frac{1}{2} \left( g + \frac{1}{g} \right) x^1. \quad (2.48)$$

Wenn wir nun  $x^1 = vt = vx^0$  setzen, dann beschreibt dies im System  $K$  offensichtlich die Bewegung eines Punktes mit Geschwindigkeit  $v$ , der zur Zeit  $t = 0$  den Ursprung durchläuft. Dies ist natürlich per Definition gerade der Ursprung des geboosteten Systems  $K'$ , entspricht also  $x'^1 = 0$ . Demnach wird (2.48) wahr bleiben, wenn wir  $x'^1 = 0$  und  $x^1 = vx^0$  setzen:

$$0 = \frac{1}{2} \left( g - \frac{1}{g} \right) x^0 + \frac{1}{2} \left( g + \frac{1}{g} \right) vx^0. \quad (2.49)$$

Dies entspricht einer Beziehung zwischen  $g$  und  $v$ , die wir nach  $g$  auflösen:

$$g = \sqrt{\frac{1-v}{1+v}}. \quad (2.50)$$

Es folgt weiterhin

$$g + \frac{1}{g} = \frac{2}{\sqrt{1-v^2}} \quad , \quad g - \frac{1}{g} = \frac{-2v}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (2.51)$$

Damit können wir die Transformation von  $x^{0/1}$  ganz explizit machen:

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \begin{pmatrix} x^0 - vx^1 \\ -vx^0 + x^1 \end{pmatrix}. \quad (2.52)$$

Wir kehren jetzt durch die Ersetzung  $v \rightarrow v/c$  zu allgemeinen Einheitensystemen zurück. Außerdem gehen wir zur Matrix-Schreibweise über:

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \beta \equiv \frac{v}{c}, \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (2.53)$$

Wir haben also jetzt die Elemente von  $\text{SO}(1,1)$  ganz explizit gefunden:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}^\mu{}_\nu. \quad (2.54)$$

Falls gewünscht, kann man noch  $x^0 = ct$  und  $x^1 = x$  schreiben und so die Boost-Transformationsregeln in einer durch  $t$  und  $x$  parametrisierten 2d Raumzeit gewinnen.

Schließlich sei noch angemerkt, dass der Übergang zu  $d = 4$  dadurch gelingt, dass man einfach zu  $x^1$  noch die Koordinaten  $x^2, x^3$  hinzufügt und annimmt, dass diese bei einem Boost in  $x^1$ -Richtung **nicht** transformieren.

## 2.5 Eine physikalisch-anschauliche Herleitung der Lorentz-Transformationen

Wir folgen hier [1] und beginnen mit zwei Übungsaufgaben. Wir denken uns die Welt zur Vereinfachung wieder zweidimensional.

**Aufgabe (A):** Betrachten Sie einen mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegten Eisenbahnwaggon und einen Lichtstrahl, der vom Boden des Waggons zu einem senkrecht darüber befindlichen Siegel an der Decke und wieder zurück zum Boden läuft. Nehmen Sie die Konstanz von  $c$  an und verlangen Sie die konsistente Beschreibung dieses Vorgangs im System  $K$  des Waggons und System  $K'$  des Gleisbetts (vgl. Abb. 3). Folgern Sie daraus die

$$\text{Zeitdilatation: } \Delta t' = \gamma \Delta t. \quad (2.55)$$

Hierbei ist  $\Delta t$  die Zeit, die Lichtstrahl für seinen Weg in  $K$  braucht.



Abbildung 3: Gedankenexperiment zur Herleitung der Zeitdilatation.

**Aufgabe (B):** Betrachten Sie die gleiche Situation wie bei (A), aber lassen Sie den Lichtstrahl jetzt horizontal in Fahrtrichtung von einer Wand des Waggons zu einem Spiegel an der gegenüberliegenden Seite und zurück laufen. Folgern Sie aus der konsistenten Beschreibung in beiden Bezugssystemen (vgl. Abb. 4) die Notwendigkeit einer

$$\text{Längenkontraktion: } \Delta \tilde{x} = \Delta x / \gamma. \quad (2.56)$$

Hierbei sind  $\Delta x$  die Länge des Waggons in seinem Ruhesystem und  $\Delta \tilde{x}$  seine Länge aus Sicht des Gleisbetts. Beachten Sie, dass dies nicht das Gleiche ist, wie die Differenz der transformierten Koordinaten von Waggon-Anfang und Waggon-Ende, deshalb das Symbol  $\Delta \tilde{x}$ .

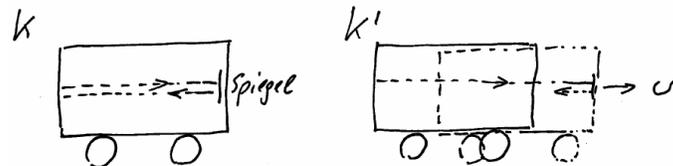


Abbildung 4: Gedankenexperiment zur Herleitung der Längenkontraktion.

Bei der Bearbeitung dieser Aufgaben (und vieler ähnlicher Aufgaben) ist es äußerst wichtig, dass Sie sich klarmachen, was ein Koordinatensystem im Sinne der speziellen Relativitätstheorie, also ein Koordinatensystem für die Raumzeit, wirklich ist: Es genügt nicht, sich drei orthogonale

Koordinatenachsen vorzustellen. Entscheidend ist, dass zu dem System ein Satz von **synchronisierten** Uhren – eine an jedem Punkt der Raumes – gehören (vgl. Abb. 5). Diese Uhren sind nur in besagtem Koordinatensystem synchronisiert, weil die Zeit nichttrivial transformiert und das Konzept der Gleichzeitigkeit nicht mehr absolut ist.

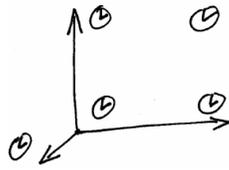


Abbildung 5: Koordinatensystem einschließlich synchronisierter Uhren.

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir jetzt die Lorentz-Transformation für den Übergang von einem System  $K$  zu einem relativ dazu mit  $v$  bewegten System  $K'$  ableiten. Wir betrachten dazu ein generisches Ereignis mit Koordinaten  $(t, x)$  in  $K$  bzw.  $(t', x')$  in  $K'$  (vgl. Abb. 6).

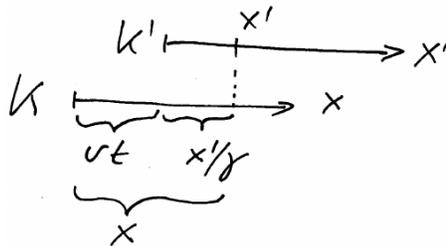


Abbildung 6: Zum Wechsel von  $K$  nach  $K'$ .

Aus Sicht von  $K$  haben wir

$$x = vt + x'/\gamma, \tag{2.57}$$

wobei der Beitrag  $vt$  von der Verschiebung des Ursprungs von  $K'$  stammt.

Wenn wir das gleiche Ereignis aus Sicht von  $K'$  betrachten, so muss natürlich eine analoge Formel gelten. Der entscheidende Unterschied besteht im wechselnden Vorzeichen der Relativgeschwindigkeit, also  $v \rightarrow -v$ . Wir haben demnach

$$x' = -vt' + x/\gamma. \tag{2.58}$$

Wenn wir  $x'$  in (2.57) mittels (2.58) eliminieren und dann nach  $t'$  auflösen, folgt

$$t' = \gamma(t - vx/c^2). \tag{2.59}$$

Außerdem können wir (2.57) direkt nach  $x'$  auflösen:

$$x' = \gamma(x - vt). \tag{2.60}$$

Damit haben wir  $t', x'$  durch  $t, x$  ausgedrückt, in Übereinstimmung mit den Formeln am Ende des letzten Kapitels.

## 2.6 Zusammenfassung zu Lorentz- und Poincaré-Gruppe

Die Lorentz-Gruppe  $O(1, 3)$  ist definiert durch

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma}. \quad (2.61)$$

In Matrix-Notation kann man dies auch als

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \quad (2.62)$$

schreiben. Sie hat die Gruppe der Rotationen (mit Reflexionen)  $O(3)$  als Untergruppe. Die entsprechenden  $\Lambda$ s sind von der Form

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & R \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad R \in O(3). \quad (2.63)$$

Hierbei benutzen wir eine hoffentlich selbsterklärende Block-Darstellung mit einem  $(1 \times 1)$ , einem  $(3 \times 3)$ , einem  $(1 \times 3)$  und einem  $(3 \times 1)$ -Block.

Ein reiner Boost in  $x^1$ -Richtung hat die Form

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.64)$$

Analoge Formeln für Boosts in  $x^2$ - und  $x^3$ -Richtung ergeben sich durch vertauschen der entsprechenden Zeilen und Spalten.

Die Gruppe wirkt auf dem  $\mathbb{R}^{1,3}$  gemäß

$$x \rightarrow \Lambda x. \quad (2.65)$$

Man spricht hierbei auch von einer **Darstellung**. Ganz allgemein ist eine Darstellung einer Gruppe definiert als ein Homomorphismus in die Gruppe der linearen Operatoren auf einem Vektorraum. In unserem speziellen Fall sind die Operatoren schlicht Matrizen. Außerdem ist unser Fall etwas tautologisch, weil wir die Gruppe ja genau über diese Darstellung definiert haben. Es ist also die ‘definierende Darstellung’ und die Matrizen sind identisch mit den Gruppenelementen. Interessantere Beispiele für Darstellungen werden folgen.

Die Invarianz des Längenquadrats  $x^2 = -(x^0)^2 + \vec{x}^2$  impliziert, dass Licht-, Raum- und Zeitartigkeit eines Vektors jeweils von den Lorentz-Transformationen respektiert werden. Das heißt, Inneres und Äußeres des sogenannten Lichtkegels (vgl. die Darstellung für  $\mathbb{R}^{1,2}$  in Abb. 7) werden, ebenso wie der Lichtkegel selbst, jeweils auf sich abgebildet.

Fordert man neben (2.61) noch  $\det\{\Lambda\} = 1$ , so erhält man **eigentliche Lorentz-Gruppe**  $SO(1, 3)$ . Rein räumliche Reflexionen oder die Zeitumkehr, also

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T = \begin{pmatrix} -1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \quad (2.66)$$

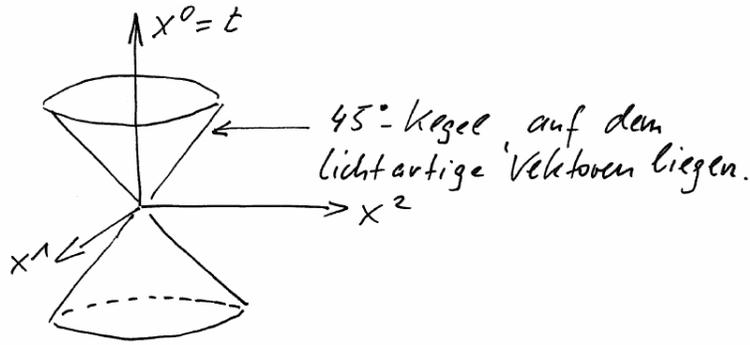


Abbildung 7: Illustration des Lichtkegels im  $\mathbb{R}^{1,3}$ .

sind dann ausgeschlossen. Ebenso sind dann natürlich alle Kombinationen von  $P$  oder  $T$  mit Elementen von  $SO(1, 3)$  nicht mehr zugelassen.

Schränkt man sich außerdem noch auf die Zusammenhangskomponente der  $\mathbb{1}$  ein, so schließt man damit auch die kombinierte Reflexion von Raum und Zeit, also  $PT$ , aus. Man spricht dann von der **eigentlich-orthochronen Lorentz-Gruppe**  $SO^+(1, 3)$ .

Als letzten, einfachen aber sehr wichtigen Schritt lassen wir jetzt schließlich auch Translationen wieder zu. Damit gehen wir von der Lorentz zur **Poincaré-Gruppe** über. Diese besteht aus allen Transformationen der Form

$$x \rightarrow x' = \Lambda x + a \quad \text{mit} \quad \Lambda \in O(1, 3) \quad , \quad a \in \mathbb{R}^4. \quad (2.67)$$

Natürlich könnte man ebenso nur die eigentliche oder eigentlich-orthochrone Lorentz-Gruppe mit Translationen kombinieren. Wir führen dafür keine besonderen Namen ein.

## 3 Spezielle Relativitätstheorie – Dynamik

### 3.1 Wirkung für den Massenpunkt

Die Weltlinie eines Teilchens (wegen der graphischen Darstellbarkeit nur in  $(1+2)$  Dimensionen) ist in Abb. 8 illustriert. Was könnte eine **mathematisch natürliche** Wirkung für solch eine Weltlinie sein? Da wir uns in einem Raum mit Metrik befinden, liegt es nahe, schlicht die Länge zu wählen. Dies wird sich auch als die physikalisch richtige Antwort herausstellen.

Wir schreiben die Länge als Summe über die Längen kleiner Wegstücke (in der Raumzeit!) und gehen dann im Riemannschen Sinne zum Grenzwert über:

$$S = \alpha \lim \sum_i \sqrt{-(\Delta x)^2} = \alpha \int_{\Gamma} ds \quad \text{mit} \quad ds = \sqrt{-dx^2}. \quad (3.1)$$

Die Konstante  $\alpha$  werden wir gleich bestimmen. Expliziter haben wir auch

$$ds = \sqrt{(c dt)^2 - (d\vec{x})^2} = c dt \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (3.2)$$

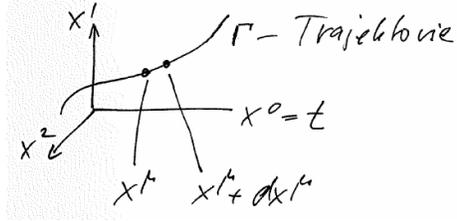


Abbildung 8: Trajektorie oder Weltlinie  $\Gamma$  eines Teilchens oder auch Massenpunktes.

Die infinitesimale Größe  $ds$  ist die invariante Länge eines Stücks der Trajektorie oder Weltlinie. Statt  $ds$  können wir auch

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \frac{dt}{\gamma} \quad (3.3)$$

benutzen, vgl. (3.2). Wir sehen aus der letzten Formel, dass  $d\tau$  wegen des Faktors  $\gamma$  gerade der Zeit auf einer vom Teilchen mitgeführten Uhr, also der **Eigenzeit** entspricht.

Wenn es angebracht ist, können wir  $S$  auch direkt mittels der Koordinaten-Zeit  $t$  ausdrücken:

$$S = \alpha c \int \sqrt{1 - \beta^2} dt \equiv \int L dt. \quad (3.4)$$

Hier haben wir die Langrange-Funktion  $L$  definiert. Wenn wir nun die Wurzel Taylor-entwickeln, so finden wir

$$S = \alpha c \int dt \left( 1 - \frac{\vec{v}^2}{2c^2} + \dots \right), \quad (3.5)$$

woraus wir durch die Forderung der Konsistenz mit Newtonscher Mechanik die Beziehung  $\alpha = -mc$  gewinnen. Zusammenfassend haben wir damit

$$S = -mc \int_{\Gamma} ds = - \int_{\Gamma} mc^2 d\tau = -mc^2 \int \sqrt{1 - \beta^2} dt. \quad (3.6)$$

Wir können dies auch mittels der Lagrange-Funktion formulieren:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} = -mc^2 + \frac{m}{2} \vec{v}^2 + \dots. \quad (3.7)$$

Erinnern wir uns an  $L = T - V$ , so erkennen wir, dass  $mc^2$  wie erwartet die Interpretation der potentiellen Energie bzw. der Ruheenergie des Teilchens hat.

### 3.2 Impuls und Energie

Wir erinnern uns an die Definition der Impulse aus der Mechanik

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}. \quad (3.8)$$

Dies sind auch ganz abstrakt gemäß Noether-Theorem die zu den zyklischen Koordinate  $x^i$  gehörenden Erhaltungsgrößen.

Wir rechnen sie in unserem Fall der Punktteilchen-SRT aus, wobei wir auf die Indexstellung achten (obwohl das hier wegen der euklidischen Metrik noch keine Fehlerquellen birgt):

$$p^i = \frac{\partial}{\partial v_i} \left( -mc^2 \sqrt{1 - \delta^{kj} v_k v_j / c^2} \right) = \frac{m \delta^{ij} v_j}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma m v^i = \gamma m \frac{dx^i}{dt} = m \frac{dx^i}{d\tau}. \quad (3.9)$$

Wir sehen: Ein unterer Index im Nenner entspricht einem oberen Index. (Ebenso entspricht ein oberer Index im Nenner einem unteren Index.)

Wir identifizieren die Energie wie üblich mit der Hamilton-Funktion oder dem Hamiltonian:

$$E = \vec{p} \cdot \vec{v} - L = m\gamma \vec{v}^2 + mc^2 / \gamma = \gamma mc^2. \quad (3.10)$$

(Bitte prüfen Sie den letzte Rechenschritt.)

Ein nicht ganz trivialer aber sehr wichtiger Fakt besteht darin, dass  $E/c$  zusammen mit  $\vec{p}$  einen 4-er Vektor, den sogenannte **4-er Impuls**, bilden:

$$\{p^\mu\} = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Um uns davon zu überzeugen, schreiben wir etwas um:

$$\begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \gamma c \\ d\vec{x} / d\tau \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} d(ct) / d\tau \\ d\vec{x} / d\tau \end{pmatrix} = m \{dx^\mu / d\tau\}. \quad (3.12)$$

Nun ist aber  $dx^\mu$  ein 4-er Vektor, wohingegen die Eigenzeit  $d\tau$  per Definition ein Skalar (also invariant unter Lorentz-Transformationen) ist. Damit ist  $p^\mu$  ein 4-er Vektor.

Wir definieren noch die **4-er Geschwindigkeit**

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (3.13)$$

so dass  $p^\mu = mu^\mu$ , und rechnen nach

$$u^2 = -\gamma^2 c^2 + \gamma^2 \vec{v}^2 = -c^2. \quad (3.14)$$

Da wir in Zukunft mehr und mehr  $c = 1$  benutzen werden, notieren wir nochmal explizit, dass in solchen Systemen entsprechend

$$u^2 = -1 \quad (3.15)$$

gilt, und zwar für *alle* Bewegungen aller massiven Teichen.

Es folgt auch sofort

$$p^2 = -m^2, \quad (3.16)$$

wobei wir wieder darauf hinweisen, dass in Teilchenphysik und Quantenfeldtheorie oft die sogenannte ‘mostly minus’ Metrik  $\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  benutzt wird, und dann entsprechend  $p^2 = m^2$  gilt.

### 3.3 Bewegungsgleichungen

Wir setzen  $c = 1$  und schreiben die Wirkung auf eine noch etwas andere Art:

$$S = -m \int \sqrt{-dx^\mu dx^\nu \eta_{\mu\nu}}. \quad (3.17)$$

Um die Integration explizit zu machen, parametrisieren wir die Weltlinie durch einen parameter  $\lambda$ , welcher nicht unbedingt die Zeit oder Eigenzeit sein muss. Dann haben wir

$$S = -m \int d\lambda \sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \eta_{\mu\nu}} \quad \text{mit} \quad \dot{x}^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\lambda}. \quad (3.18)$$

Wir bemerken, dass es auf die Wahl von  $\lambda$  nicht ankommt –  $S$  ist **reparametrisierungs-invariant**.

Um die Bewegungsgleichung zu gewinnen, können wir jetzt die vier Funktionen  $x^\mu = x^\mu(\lambda)$  unabhängig variieren. Das wäre für  $x^\mu = x^\mu(\tau)$  wegen der Bedingung  $(dx/d\tau)^2 = -1$  offensichtlich nicht möglich gewesen. Nullsetzen der Variation liefert

$$0 = \delta S = m \int \frac{1}{\sqrt{-\dot{x}^2}} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \delta \left( \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right) \eta_{\mu\nu} d\lambda. \quad (3.19)$$

Wir vertauschen nun die Reihenfolge der Wirkung von  $\delta$  und  $d$  auf  $x^\nu$ . Dann integrieren wir partiell und wälzen so die auf  $\delta x^\nu$  wirkende  $\lambda$ -Ableitung auf den Rest des Integranden ab. Es folgt

$$0 = \int d\lambda \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{1}{\sqrt{-\dot{x}^2}} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \right) \delta x^\nu \eta_{\mu\nu}. \quad (3.20)$$

Die Bewegungsgleichung lautet somit

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}} \right) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{dx^\mu}{\sqrt{-(dx/d\lambda)^2} d\lambda} = \frac{dx^\mu}{ds} = \text{const.} \quad (3.21)$$

Anders gesagt: Für ein freies Teilchen ist  $u^\mu$  entlang der Weltlinie konstant, was uns natürlich nicht überrascht. Wir erinnern noch daran, dass wegen  $c = 1$  für uns  $d\tau$  und  $ds$  im Moment identisch sind.

### 3.4 Zerfälle und Streuung

Die Invarianz von  $L$  bzgl. Verschiebungen in  $t$  und  $\vec{x}$  impliziert Energie und Impulserhaltung und damit die Erhaltung von  $p^\mu$ . Beim Zerfall eines Teilchens mit Impuls  $p^\mu$  gilt also (vgl. Abb 9)

$$p^\mu = k_a^\mu + k_b^\mu. \quad (3.22)$$

Seien nun die Massen von Ausgangsteilchen und Zerfallsprodukten  $m$  sowie  $m_a, m_b$ . Im Ruhesystem des zerfallenden Teilchens wird aus (3.22)

$$\begin{pmatrix} m \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_a^0 \\ \vec{k}_a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_b^0 \\ \vec{k}_b \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{k}_a = -\vec{k}_b. \quad (3.23)$$

Aus  $k_a^2 = -m_a^2$  folgt dann  $k_a^0 = \sqrt{\vec{k}_a^2 + m_a^2}$  und analog für Teilchen  $b$ . Damit finden wir schließlich

$$m = \sqrt{\vec{k}_a^2 + m_a^2} + \sqrt{\vec{k}_b^2 + m_b^2}, \quad (3.24)$$

woraus sich  $|\vec{k}_a|$  und damit alle anderen Größen bestimmen lassen. Als interessanten Grenzfall kann man sich die entsprechenden Formeln für die Abstrahlung eines Photons durch ein massives Teilchen überlegen.



Abbildung 9: Illustration zum Zerfall.

Ganz analog kann man die Streuung zweier Teilchen analysieren, vgl. Abb. 10. Es gilt, wobei wir mit 4-er Impulsen arbeiten und den Index unterdrücken

$$p_a + p_b = k_a + k_b \equiv p. \quad (3.25)$$

Dabei kann man  $p$  als Impuls eines gedachten Zwischenzustands interpretieren. Es ist of bequem in das sogenannte **Centre-of-Mass Frame** zu gehen, wo

$$p = \begin{pmatrix} M \\ \vec{0} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad M^2 = -(p_a + p_b)^2. \quad (3.26)$$

Die Beziehung zu  $k_a, k_b$  ist dann wie beim Zerfall. Viele Anwendungen dieser und anderer relativistischer Impuls-Formeln finden sich in der Teilchenphysik und der Quantenfeldtheorie.



Abbildung 10: Illustration zum Zerfall.

## 4 Feldtheorie – grundlegende Konzepte

Die Elektrodynamik eine relativ komplizierte Feldtheorie ist, u.a. weil  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  vektorwertig sind. Es ist deshalb sinnvoll, zunächst einfachere Spielzeugmodelle oder Toy-Models zu betrachten.

## 4.1 Effektive Feldtheorien aus der Mechanik

Wir erinnern uns zunächst an die sogenannte **lineare Kette**, vgl. Abb. 11, mit der Lagrange-Funktion

$$L = \sum_i \frac{m}{2} \dot{q}_i^2 - \sum_i \frac{k}{2} (q_{i+1} - q_i)^2. \quad (4.1)$$

Im sogenannten Kontinuums-Limes,  $\Delta x \rightarrow 0$ , wird daraus

$$L = \int dx \left( \frac{\rho}{2} \dot{q}(t, x)^2 - \frac{b}{2} q'(t, x)^2 \right), \quad (4.2)$$

wobei  $\rho = m/\Delta x$  und  $b = k \Delta x$  und wir die Nummerierung mittels  $i$  durch das Orts-Argument  $x$  ersetzt haben.

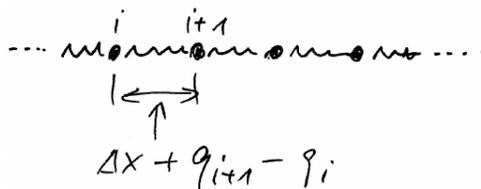


Abbildung 11: Lineare Kette. Der aktuelle Abstand  $\Delta x + q_{i+1} - q_i$  zwischen zwei Massenpunkten ergibt sich aus dem Ruheabstand  $\Delta x$  und den beiden relevanten Auslenkungen  $q_i$  und  $q_{i+1}$ .

Die **schwingende Saite**, vgl. Abb. 12, wird durch eine zu (4.2) völlig analoge Lagrange-Funktion beschrieben. Allerdings wird der Koeffizient  $b$ , welcher die Federkonstante  $k$  kodiert, durch die Kraft  $F$  ersetzt, mit der die Saite gespannt ist. Außerdem hat  $q(t, x)$  jetzt die Interpretation einer transversalen Auslenkung.

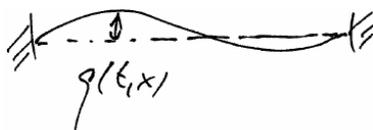


Abbildung 12: Schwingende Saite mit zeit- und ortsabhängiger transversaler Auslenkung  $q(t, x)$ .

Das Ganze lässt sich auch auf den Fall einer **schwingenden Membran** verallgemeinern, siehe Abb. 13. Jetzt hängt die transversale Auslenkung, die wir immer noch  $q$  nennen, von zwei Ortskoordinaten ab. Die Lagrange-Funktion lässt sich wie vorher mit elementaren Methoden herleiten und lautet

$$L = \int d^2x \left( \frac{\rho}{2} \dot{q}^2 - \frac{T}{2} (\vec{\nabla} q)^2 \right). \quad (4.3)$$

Hierbei ist  $q = q(t, \vec{x})$  die Auslenkung,  $\vec{x}$  und  $\vec{\nabla}$  bezeichnen einen 2d Vektor und Gradienten, und  $T$  ist die sogenannte Spannung der Membran. Letzteres ist die Energie pro zusätzliche Fläche, die man aufwenden muss, um die Membran zu dehnen.

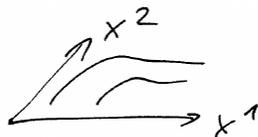


Abbildung 13: Schwingende Membran, ausgedehnt in der  $x^1$ - $x^2$ -Ebene, mit Auslenkung in der dazu orthogonalen Richtung.

Weitere Beispiele für effektive Feldtheorien, die aus mechanischen Systemen folgen, sind Höhenwellen auf dem Wasser oder Druckwellen bzw. andere Auslenkungswellen in Gasen, Flüssigkeiten und Festkörpern. Entscheidend ist, dass das zentrale dynamische Objekt, in unseren expliziten Beispielen immer mit  $q(t, \vec{x})$  bezeichnet, ein **Feld** ist. Dies kann durchaus auch ein Vektor- oder sogar ein Tensor-Feld sein, wie man man sie z.B. braucht, um eine allgemeine Auslenkungswelle in einem Festkörper zu beschreiben. Das Feld ist also für uns eine **dynamische physikalische Größe, die neben der Zeit auch vom Ort abhängt**. Es hat für jedes Ortsargument  $\vec{x}$  einen Wert bzw. (bei Tensorfeldern) einen Satz von Werten.

Wichtig ist, dass all diese Feldtheorien **effektiv** sind. Damit meinen wir, dass sie im Kontinuums-Limes aus fundamental oder mikroskopisch *anderen* Systemen hervorgehen. Der Kontinuums-Limes muss hierbei nicht bedeuten, dass die typischen physikalischen Abstände des zugrundeliegenden mikroskopischen Systems gegen Null gehen. Vielmehr ist er als Näherung sinnvoll, weil wir das System aus makroskopischer oder Infrarot-Sicht betrachten. In obigen Beispielen kamen die zugrundeliegenden mikroskopischen Systeme immer aus dem Bereich der Mechanik mit vielen Freiheitsgraden. Natürlich können diese Systeme auch quantenmechanisch sein.

Wenn wir von diesen einfachen effektiven Feldtheorien jetzt zur E-Dynamik wechseln, dann passiert etwas Neues: Die E-Dynamik ist, zumindest nach gegenwärtigem Wissensstand, nicht effektiv sondern **fundamental**. Das heißt, wir kennen keine grundlegendere und eventuell einfachere mikroskopische Beschreibung. Vielmehr sind die Grundprinzipien, welche die Dynamik der relevanten Felder beherrschen, neue und fundamentale Grundgesetze der Natur.

Obige effektive Feldtheorien sind alle **lokal**, das heißt  $L$  ist gegeben durch ein Integral über den Raum  $\mathbb{R}^{d-1}$  (in einer  $d$ -dimensionalen Raumzeit). Dabei hängt der Integrand vom Wert des Feldes an einem Punkt oder (durch einen Grenzprozess) durch Werte in beliebig großer Nähe eines Punktes ab. In diesem Sinne sind  $q(t, x)$  oder auch

$$q'(t, x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{q(t, x + \Delta) - q(t, x)}{\Delta} \quad (4.4)$$

als Bausteine des Integranden erlaubt. Auch höhere Ableitungen sind im Prinzip zulässig. Aber ein Ausdruck wie  $q(t, x)q(t, x + a)$  mit endlichem  $a$  in  $L$  oder in dem Integranden, welcher  $L$  definiert, würde die Lokalität verletzen.

Nach allem, was wir wissen, scheint **Lokalität** ein Grundprinzip der Natur zu sein. Darauf bauen wir unsere allgemeine Definition einer (lokalen) Feldtheorie auf. Wir fordern eine Wirkung der Form

$$S = \int dt L = \int dt d^{d-1}x \mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}, \vec{\nabla}\phi, \dots). \quad (4.5)$$

Dabei haben wir die grundlegende Feldvariable, in unserem Fall ein Skalarfeld, statt  $q$  mit  $\phi = \phi(t, \vec{x})$  bezeichnet. Das ist eine sehr übliche Notation für Skalarfelder. Der Integrand  $\mathcal{L}$  ist die **Lagrange-Dichte** oder auch kurz **Lagrangian**. Das Auslassungs-Zeichen ‘ $\dots$ ’ steht für das mögliche Auftreten von Termen mit höheren Ableitungen, z.B.  $\vec{\nabla}^2 \phi$ .

## 4.2 Relativistisches Skalarfeld

Neben dem Lokalitäts-Prinzip bauen wir unsere weitere Analyse auf der speziellen Relativitätstheorie, also auf der Poincare-Invarianz auf. Wir fordern, dass fundamentale Feldtheorien Poincare-invariant sein müssen. Es folgt

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, \partial_\mu \partial_\nu \phi, \dots), \quad (4.6)$$

d.h. insbesondere, dass  $\dot{\phi}$  und  $\vec{\nabla} \phi$  immer gemeinsam auftreten müssen, sonst ist Poincare und speziell Lorentz-Invarianz nicht zu gewährleisten. Über das Maß  $d^4x$  müssen wir uns keine Gedanken machen: es ist offensichtlich translationsinvariant und wegen  $\det\{\Lambda\} = \pm 1$  auch Lorentz-invariant.

Damit ergibt sich sofort die einfachste Möglichkeit einer relativistischen Wirkung (mit Zeitableitung, sonst gäbe es keine Dynamik):

$$S = \int d^4x \left( -\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial_\nu \phi) \eta^{\mu\nu} \right) \quad \text{mit} \quad \phi = \phi(t, \vec{x}) = \phi(x), \quad (4.7)$$

wobei  $x$  wie schon oben für  $\{x^\mu\}$  steht. Die Lorentz-Invarianz folgt hierbei aus der vollständigen Kontraktion aller Indizes, so wie Sie schon in der Mechanik gelernt haben, dass

$$S = \int dt \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 \quad \text{mit} \quad \dot{\vec{x}}^2 = \dot{x}^i \dot{x}^j \delta_{ij}, \quad (4.8)$$

die einfachste  $O(3)$ -symmetrische Wirkung ist.

Für uns ist jetzt wichtig, konsistent mit oberen und unteren Indizes umzugehen. Wir bemerken insbesondere, dass

$$\partial_\mu \phi \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \quad (4.9)$$

ein Kovektor ist, welcher unter eine Lorentz-Rotation  $\Lambda$  gemäß

$$\partial_\mu \phi \rightarrow \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu \phi \quad (4.10)$$

transformiert. Hier ist

$$\Lambda_\mu{}^\nu \equiv \eta_{\mu\rho} \Lambda^\rho{}_\sigma \eta^{\sigma\nu}. \quad (4.11)$$

Wir erinnern auch im Vergleich dazu an die Transformation eines Vektors:

$$x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu. \quad (4.12)$$

Die Definition der Lorentz-Gruppe impliziert, dass  $x^2 = x^\mu x_\mu$  invariant ist. Ebenso folgt auch die Invarianz von

$$(\partial\phi)^2 \equiv \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \eta^{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi, \quad (4.13)$$

aus der Definition der  $O(1,3)$ . Der Leser sollte beides explizit nachrechnen.

Fortgeschrittener Einschub: Betrachten wir ein Skalarfeld  $\phi = \phi(x)$  in einer Dimension, also ohne Zeit und mit  $x \in \mathbb{R}$ . Die einzige Symmetrie seien die Verschiebungen in  $x$ , vgl. Abb. 14. Wie man aus der Abb. sieht, ergibt sich die neue Feldkonfiguration  $\phi'$  aus der alten Feldkonfiguration  $\phi$  indem man die **inverse Transformation** (also im vorliegenden Fall eine Verschiebung um  $-\Delta$ ) auf  $x$  anwendet und das Ergebnis als Argument in die Funktion  $\phi$  einsetzt. Man erkennt dies daran, dass  $\phi(x - \Delta)$  ein Maximum bei  $x_0 + \Delta$  hat, falls  $\phi(x)$  ein Maximum bei  $x_0$  hatte.



Abbildung 14: Aus der Feldkonfiguration  $\phi(x)$  mit Maximum bei  $x = x_0$  geht durch Verschiebung um  $+\Delta$  eine Feldkonfiguration  $\phi'(x) = \phi(x - \Delta)$  mit Maximum bei  $x = x_0 + \Delta$  hervor.

Ganz analog kann man sich überzeugen, dass die Wirkung einer Lorentz-Transformation auf eine skalare Feldkonfiguration durch

$$\phi \xrightarrow{\Lambda} \phi' \quad \text{mit} \quad \phi'(x) \equiv \phi(\Lambda^{-1}x) \quad (4.14)$$

gegeben ist. Jetzt kann man  $\phi$  und ebenso  $\phi'$  nach  $x$  ableiten und explizit eine Beziehung zwischen den beiden so definierten Kovektorfeldern herstellen. Man findet

$$\partial_\mu \phi \xrightarrow{\Lambda} \partial_\mu \phi' \quad \text{mit} \quad \partial_\mu \phi'(x) = \Lambda_\mu^\nu \partial_\nu \phi(\Lambda^{-1}x). \quad (4.15)$$

Ein analoges Transformationsverhalten findet man für Vektorfelder, z.B. für  $\partial^\mu \phi \equiv \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \phi$ . Wir lernen daraus, dass es nicht ganz richtig ist, zu sagen, dass sich Vektorfelder schlicht durch Multiplikation mit der Matrix  $\Lambda$  transformieren. Es kommt noch die Transformation des Arguments, also die Drehung der ganzen Feldkonfiguration im Raum, hinzu. Dies wird in der abgekürzten Notation ohne Argument nicht sichtbar. Ende des Einschubs.

Für uns ist entscheidend, dass  $\partial_\mu \phi$  ein Kovektorfeld ist, also

$$\partial_\mu \phi \xrightarrow{\Lambda} \Lambda_\mu^\nu \partial_\nu \phi. \quad (4.16)$$

Daraus ergibt sich die Lorentz-Invarianz der Wirkung (4.7). Ebenso ist  $\partial^\mu \phi \equiv \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \phi$  ein Vektorfeld.

Wir sehen weiterhin, dass

$$S = \int d^4x \left( -\frac{1}{2} (\partial\phi)^2 \right) = \int d^4x \left( -\frac{1}{2} \right) \left( -\dot{\phi}^2 + (\vec{\nabla}\phi)^2 \right) \quad (4.17)$$

den weiter oben diskutierten effektiven Wirkungen für Saite, Membran etc. sehr ähnlich ist. Neu ist allerdings, dass der relative Koeffizient zwischen dem Zeitableitungs- und Gradienten-Term durch die Forderung der  $O(1,3)$ -Invarianz jetzt zwingend fixiert ist.

### 4.3 Bewegungsgleichung und Wellen

Wie üblich fordern wir, dass die Variation der Wirkung, in unserem Fall (4.7), verschwindet:

$$0 = \delta S = \int d^4x \left( -\frac{1}{2} \right) 2 \partial_\mu (\delta\phi) \partial_\nu \phi \eta^{\mu\nu} = \int d^4x (\partial^2 \phi) \delta\phi, \quad \text{wobei} \quad \partial^2 \equiv \partial^\mu \partial_\mu. \quad (4.18)$$

Da  $\delta\phi$  beliebig ist, muss der Rest des Integranden identisch verschwinden, also

$$\partial^2 \phi = 0. \quad (4.19)$$

Dies ist die **Klein-Gordon-Gleichung**.

Wir wollen die Lösungen hier nicht allgemein analysieren sondern nur einen ersten Eindruck gewinnen und uns überzeugen, dass ebene Wellen zu den Lösungen gehören. Dazu wählen wir den Ansatz

$$\phi \sim \sin(kx) \quad \text{mit} \quad kx \equiv k_\mu x^\mu \quad (4.20)$$

und berechnen

$$\partial^\mu \partial_\mu \sin(k_\nu x^\nu) = \partial^\mu [ (k_\nu \delta_\mu^\nu) \cos(k_\rho x^\rho) ] = k_\mu (k_\rho \eta^{\mu\rho}) (-\sin(k_\sigma x^\sigma)) = -k^2 \sin(kx). \quad (4.21)$$

Die Klein-Gordon-Gleichung impliziert also

$$k^2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad k_0 = \pm |\vec{k}|. \quad (4.22)$$

Wir können z.B.  $k_0 = -k_3$  mit  $k_1 = k_2 = 0$  wählen und erhalten so eine Welle, deren Wellenberge und Täler in der  $x^1 - x^2$ -Ebene liegen und sich mit Lichtgeschwindigkeit in positiver  $x^3$ -Richtung bewegen, vgl. Abb. 15. Die Welle wird dann explizit durch  $\phi \sim \sin(k_3(-x^0 + x^3))$  beschrieben.

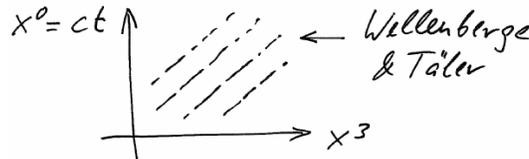


Abbildung 15: Wellenausbreitung in  $x^0 - x^3$ -Ebene.

Allgemeiner können wir  $\omega = |\vec{k}|c$  definieren und haben dann Lösungen von der Form

$$\phi \sim \sin(-\omega t + \vec{k} \cdot \vec{x}). \quad (4.23)$$

Wir haben dann

$$\text{Phasengeschwindigkeit: } v_p = \omega / |\vec{k}| = c \quad (4.24)$$

$$\text{Gruppengeschwindigkeit: } v_g = d\omega / d|\vec{k}| = c, \quad (4.25)$$

Im Fall der relativistischen Skalarfeld-Welle und (wie wir später in ganz analoger Weise sehen werden) auch der elektromagnetischen Welle breiten sich also sowohl die Wellenfronten als auch

die transportierte Energie bzw. Information mit Lichtgeschwindigkeit aus. Dies ist die Maximalgeschwindigkeit für Energie- und Informationstransport in relativistischer Feldtheorie, auch nach Quantisierung.

Aus Sicht der Physik-Didaktik ist es bedauerlich, dass die Natur bei den uns zugänglichen Energien kein fundamentales Skalarfeld außer dem Higgs-Feld vorzuweisen hat. Letzteres unterscheidet sich von unserem bisherigen Toy-Model dadurch, dass der Lagrangian einen Massenterm enthält,  $\mathcal{L} \supset m^2\phi^2$ . Außerdem ist das durch dieses Feld beschriebene Higgs-Teilchen instabil. Dadurch existiert das Higgs-Teilchen nicht im klassischen Regime. Es gibt noch skalare Mesonen, z.B. das Pion, aber die sind nicht fundamental und außerdem wiederum instabil. Wir können das obige einfache System also leider nicht real erleben.

Wir schließen mit einer Bemerkung von großer konzeptioneller Bedeutung: Die SRT schränkt nicht nur die Form von Feldtheorie-Wirkungen ein, sondern sie erzwingt auch den Übergang von der **instantanen Fernwirkung** der klassischen Mechanik (z.B. durch ein 2-Teilchen-Potential) zur **kausalen Fernwirkung durch Felder**. Der Grund dafür ist, dass das Konzept der Gleichzeitigkeit verlorengeht: Wir können für zwei raumartig getrennte Ereignisse A und B Bezugssysteme finden, in denen A nach B oder B nach A stattfindet. Damit kommt es immer zu logischen Widersprüchen, wenn A durch B oder B durch A beeinflusst wird. In der SRT kann die Informationsübertragung von A nach B oder umgekehrt nur durch Felder geschehen. Diese propagieren (breiten sich aus) maximal mit Lichtgeschwindigkeit. Dann kann, wegen der raumartigen Trennung, weder A durch B beeinflusst werden noch umgekehrt. Somit wird alles konsistent.

## 5 Elektrodynamik – prinzipielle Struktur

### 5.1 Teilchen – Vektorpotential – Eichinvarianz

Wir setzen  $c = 1$  und betrachten ein Teilchen mit seiner Weltlinie (vgl. Abb. 16) und der entsprechenden Wirkung:

$$S = -m \int ds. \tag{5.1}$$

Wir wissen aus der Erfahrung, dass es geladene Teilchen gibt, also Teilchen, die an Felder koppeln. Was könnte eine mathematisch natürliche Beschreibung dafür sein?

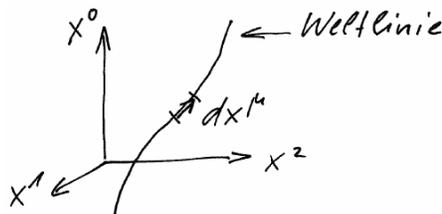


Abbildung 16: Weltlinie in 1 + 2 Dimensionen.

Unsere zentrale Behauptung ist, dass die natürlichste und naheliegendste Option ein Kovektorfeld ist, weil man dieses auf offensichtliche Weise mit dem infinitesimalen Wegelement  $dx^\mu$

zu einem Skalar kombinieren und somit entlang des Weges integrieren kann. Der infinitesimale Beitrag zur Wirkung ist also  $dx^\mu A_\mu(x)$ , und die Gesamtwirkung einschließlich Kopplung an  $A_\mu$  lautet

$$S = -m \int ds + e \int A_\mu(x) dx^\mu . \quad (5.2)$$

Hierbei ist  $e$  eine Kopplungskonstante, die mit der Ladung des Teilchens zusammenhängt.

Zur besseren Anschauung mache man sich klar, dass der zweite Term ein exaktes Analogon zu dem Integral darstellt, welches in der Mechanik die Arbeit berechnet:

$$W = \int \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} . \quad (5.3)$$

Technisch ist der einzige Unterschied die Dimension des Raumes bzw. der Raumzeit.

Wir machen nun eine wichtige Beobachtung: Falls  $A_\mu$  die spezielle Form eines ‘Gradienten’,

$$A_\mu = \partial_\mu \chi , \quad (5.4)$$

mit einem Skalarfeld  $\chi(x)$ , annimmt, dann trägt der neue Wirkungsterm nicht zu den Bewegungsgleichungen (auch bekannt als Equations of Motion oder EOM) bei. In der Tat, wenn wir ‘initial’ und ‘final’ Punkte  $x_i$  und  $x_f$  wählen, so ist der Beitrag des Kopplungsterms

$$\int_{x_i}^{x_f} dx^\mu (\partial_\mu \chi) = \chi(x_f) - \chi(x_i) . \quad (5.5)$$

Man sieht diese Gleichheit sofort, weil wir hier einen Gradienten über ein Wegstück integrieren und das Resultat natürlich die Differenz der Funktionswerte am End- und Anfangspunkt ist. Wenn man die Trajektorie dazwischen variiert, so ändert sich dieses Resultat nicht. Also hat der Kopplungsterm in diesem Fall keinen Einfluss auf die Variation der Wirkung und damit auf die EOMs.

Zur Übung rechnen wir ((5.5)) auch noch ganz explizit nach, ohne auf Ihre Kenntnisse des Gradienten aus der Mechanik Bezug zu nehmen: Dazu parametrisieren wir die Weltlinie als  $x = x(\lambda)$ , so dass

$$\int (\partial_\mu \chi) dx^\mu = \int (\partial_\mu \chi) \dot{x}^\mu d\lambda = \int d\lambda \chi(x(\lambda))' = \chi(x(\lambda_f)) - \chi(x(\lambda_i)) \quad \text{mit} \quad ( )' \equiv \frac{d}{d\lambda} ( ) . \quad (5.6)$$

Wir mussten also nur Kettenregel und Fundamentalsatz der Analysis anwenden.

Da unsere Wirkung linear in  $A_\mu$  ist, gilt damit auch folgendes: Die sogenannte

$$\mathbf{Eichtransformation} : \quad A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi \quad (5.7)$$

des **Vektorpotentials**  $A_\mu$  stellt eine Symmetrie dar. Mit anderen Worten, wenn  $A_\mu$  und eine gewisse Trajektorie die EOMs lösen, dann gilt das auch für das eichtransformierte Feld  $A_\mu + \partial_\mu \chi$  und die gleiche Trajektorie.

Die Begriffe Eichtransformation oder Eichsymmetrie implizieren aber noch mehr: Wir wollen fordern, dass im Zusammenhang geladener Teilchen, die natürlicherweise an  $A_\mu$  koppeln, Feld und eichtransformiertes Feld **äquivalent** sind:

$$A_\mu \sim A_\mu + \partial_\mu \chi . \quad (5.8)$$

Das ist eine stärkere Behauptung, als nur die der Symmetrie. Eine Symmetrie transformiert eine Lösung in eine andere Lösung. Eine Eichsymmetrie identifiziert eine **Redundanz der Beschreibung**: Wir behaupten oder fordern, dass  $A_\mu$  und  $A_\mu + \partial_\mu \chi$  die exakt gleiche, prinzipiell ununterscheidbare physikalische Situation charakterisieren.

Als nächstes suchen wir eine passende Wirkung für das Feld  $A_\mu$ . Die eben postulierte Eichsymmetrie schränkt die Möglichkeiten stark ein.

Beginnen wir mit einem Lorentz-invarianten und dem Skalarfeld-Fall sehr ähnlichen Ansatz:

$$\mathcal{L} \sim (\partial^\mu A_\nu)(\partial^\rho A_\sigma) \eta_{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} = -(\partial^\mu A_0)(\partial^\rho A_0) \eta_{\mu\rho} + \sum_{i=1}^3 (\partial^\mu A_i)(\partial^\rho A_i) \eta_{\mu\rho}. \quad (5.9)$$

Wir haben den Ausdruck hier rechts so umgeschrieben, dass man die Analogie zum Skalarfeld-Ausdruck  $(\partial\phi)(\partial\phi)$  deutlich erkennt. Im Wesentlichen hat man eine Skalarfeld-Wirkung für jede der Komponenten des Vektorfeldes.

Es gibt allerdings auch eine andere Lorentz-invariante Möglichkeit:

$$S \sim (\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu A^\nu). \quad (5.10)$$

Leider sind jedoch beide Vorschläge nicht eichinvariant.

Um hier voranzukommen, hilft die Beobachtung, dass die spezielle Linearkombination zweier Ableitungsterme des Vektorfeldes, nämlich

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (5.11)$$

eichinvariant ist. Man rechnet dies leicht nach:

$$F_{\mu\nu}(A = \partial\chi) = \partial_\mu \partial_\nu \chi - \partial_\nu \partial_\mu \chi = 0. \quad (5.12)$$

Vorausschauend bemerken wir, dass  $A_\mu$  in seiner nullten Komponente das vertraute elektrostatische Potential beinhaltet ( $A^0 = \phi$ ) und der sogenannte **Feldstärketensor**  $F_{\mu\nu}$  das  $\vec{E}$ - und  $\vec{B}$ -Feld enthält.

Nach allem Gesagten können wir jetzt einen sehr gut motivierten Vorschlag für die Wirkung der E-Dynamik machen:

$$S = \int_{\mathbb{R}^{1,3}} d^4x \left( -\frac{1}{4} \right) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + e \int_\Gamma A_\mu dx^\mu - m \int_\Gamma ds. \quad (5.13)$$

Die zentrale Aussage dieses Kurses besteht darin, dass die Wirkung, ergänzt um mehr geladene Teilchen mit ggf. verschiedenen Ladungen, **vollständig die gesamte Elektrodynamik beschreibt**. Die zugrundeliegenden Prinzipien zum Aufstellen dieser Wirkung waren nur Poincare-Invarianz sowie die natürliche (eichinvariante) Kopplung von Teilchen und Feld.

Zum Abschluss sei noch bemerkt, dass es keine anderen Lorentz-invarianten Kombinationen von Ableitungstermen von  $A_\mu$  in quadratischer Ordnung gibt, als die zwei oben diskutierten. Der Term  $F^2$ , den wir schlussendlich als Wirkung benutzen, stellt die eindeutige eichinvariante Kombination dieser Terme dar. Weitere Möglichkeiten wie  $A_\mu A^\mu$  oder der lineare Term  $\partial_\mu A^\mu$  sind

auch nicht eichinvariant und lassen sich nicht zu einem eichinvarianten Ausdruck ergänzen. Der von uns gemachte Vorschlag  $F^2$  ist also tatsächlich (bis zur zweiten Ordnung in Ableitungen) der einzige erlaubte Ausdruck. Lässt man mehr Ableitungen oder höhere Potenzen von  $A_\mu$  zu, so gibt es mehr Möglichkeiten. Doch die sind bei kleinen Energien unwichtig. Mehr dazu lernen Sie in der Quantenfeldtheorie.

## 5.2 Die Delta-Funktion (M – mathematischer Einschub)

Um zwischen der Betrachtung von Punktladungen und glatten Ladungsverteilungen wechseln zu können, brauchen wir die  $\delta$ -Funktion. Definieren wir dazu zunächst die Funktion  $\delta_\epsilon(x)$  gemäß Abb. 17. Dabei kommt es nicht auf die spezielle Form sondern nur auf die Lokalisierung bei Null und die Normierung des Integrals auf Eins an. Andere funktionale Formen, vgl. 18, sind ebensogut.

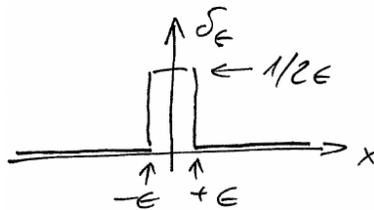


Abbildung 17: Beispiel einer auf der Skala  $\epsilon$  lokalisierten Funktion mit auf Eins normiertem Integral.

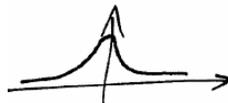


Abbildung 18: Ein anderes Beispiel einer Funktion mit den Eigenschaften aus Abb. 17. Es könnte z.B. eine Gauß-Kurve oder eine andere glatte Funktion sein, die typische Breite  $\epsilon$  hat.

Eine äußerst grobe Definition der  $\delta$ -Funktion ist dann

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(x). \tag{5.14}$$

Dies macht natürlich in der Form mathematisch keinen Sinn, liefert aber die richtige Intuition und ist auch technisch sinnvoll, wenn man die Funktion in einem Integral mit anderen Funktionen benutzt und den Grenzwert *nach* der Integration bildet..

Etwas besser ist die Definition der  $\delta$ -Funktion durch die beiden folgenden Eigenschaften:

$$(1) \int dx \delta(x) = 1 \quad \text{und} \quad (2) \delta(x) = 0 \quad \forall x \neq 0. \tag{5.15}$$

Dabei sind nur Ausdrücke mit  $\delta(x)$  zulässig, welche sich mittels (1) und (2) auswerten lassen.

Noch besser ist Definition der  $\delta$ -Funktion als eine bestimmte Art von linearem Funktional, man sagt auch Distribution:

$$\delta : f \mapsto \int f(x) \delta(x) dx \equiv f(0). \quad (5.16)$$

Dabei ist der Integralausdruck rechts reine Notation – die eigentliche Definition besteht in der Abbildung der Funktion  $f$  auf die Zahl  $f(0)$ .

Intuitiv kann man vielleicht sagen, dass die  $\delta$ -Funktion beliebig scharf bei Null lokalisiert und ihr Integral auf Eins normiert ist. Entsprechend ist damit  $\delta(x - x_0)$  bei  $x_0$  lokalisiert.

In mehreren Dimensionen ist die Notation

$$\delta^n(x) \equiv \delta(x^1)\delta(x^2)\cdots\delta(x^n) \quad \text{mit} \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (5.17)$$

oft nützlich. Ein einfaches Beispiel dazu ist die Beziehung

$$\int d^3x f(\vec{x}) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) = f(\vec{y}), \quad (5.18)$$

welche der Leser mit allen drei Definitionen auszuwerten versuchen sollte.

### 5.3 Die 4-er Stromdichte

Wir wollen die mathematische Formulierung der E-Dynamik jetzt so erweitern, dass wir auch kontinuierliche Ladungsverteilungen zulassen können. Diese sind mikroskopisch natürlich immer durch eine Summe über viele Weltlinien von Punktladungen realisiert, aber die alternative Beschreibung durch eine **effektive**, glatte Ladungsverteilung bzw. Stromdichte ist trotzdem oft sinnvoll.

Schreiben wir zunächst den Kopplungs-Teil der Wirkung für eine Menge von Teilchen wie folgt um:

$$\sum_i e_i \int_{\Gamma_i} dx_i^\mu A_\mu(x_i) = \sum_i e_i \int_{\Gamma_i} d\lambda_i \dot{x}_i^\mu A_\mu(x_i(\lambda_i)) = \int d^4x \sum_i e_i \int_{\Gamma_i} d\lambda_i \delta^4(x - x_i(\lambda_i)) \dot{x}_i^\mu A_\mu(x) \quad (5.19)$$

Mit der Definition

$$j^\mu(x) \equiv \sum_i e_i \int_{\Gamma_i} d\lambda_i \delta^4(x - x_i(\lambda_i)) \dot{x}_i^\mu \quad (5.20)$$

nimmt diese Wirkung die einfache Form

$$\int d^4x j^\mu A_\mu \quad (5.21)$$

an. Eine Illustration zu dem durchgeführten Übergang von den Weltlinien zur glatten Stromdichte findet sich in Abb. 19.

Eine äquivalente, intuitivere Definition der 4-er Stromdichte lautet

$$j^\mu(x) = \rho(x) \frac{dx^\mu}{dt}(x). \quad (5.22)$$

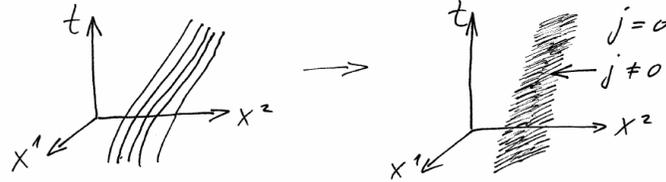


Abbildung 19: Links: eine Schar von Weltlinien. Rechts: die entsprechende glatte Ladungsdichte.

Es handelt sich also schlicht um das Produkt von Ladungsdichte  $\rho$  und der Geschwindigkeit  $dx/dt$  des Teilchenstroms am Ort  $x$ . Die Ladungsdichte kann man auch als

$$\rho = \frac{e dN}{d^3x} \quad (5.23)$$

schreiben, wobei  $dN$  die Zahl der Teilchen im infinitesimalen Volumen  $d^3x$  ist, vgl. Abb. 20. Damit folgt

$$j^\mu = \frac{e dN}{d^3x dt} \cdot dx^\mu, \quad (5.24)$$

wobei wir die Terme so angeordnet haben, dass man klar sieht, dass  $j^\mu$  tatsächlich ein 4-er Vektor ist:  $d^3x dt = d^4x$  ist invariant, ebenso wie  $dN$ . Also transformiert  $j^\mu$ , so wie  $dx^\mu$ , als 4-er Vektor. Wir lernen daraus auch, dass  $\rho$  und  $dt$  zwar keine Skalare sind, aber  $\rho/dt$  ist einer.



Abbildung 20:  $dN$  Teilchen im Volumen  $d^3x$ .

Die Äquivalenz der beiden Definitionen (5.20) und (5.22) kann man explizit nachrechnen. Wir überlassen das den Übungen.

Damit haben wir als Ergebnis dieses Unterkapitels die alternative Form der Wirkung

$$S = \int d^4x \left[ -\frac{1}{4} F^2 + j^\mu A_\mu \right] + S_{matter} \quad (5.25)$$

gefunden. Hierbei spielt die Materie-Wirkung

$$S_{matter} = \sum_i \left( -m_i \int_{\Gamma_i} ds \right) + \left\{ \text{Alle Wechselwirkungen der Teilchen außer mit } A^\mu \right\} \quad (5.26)$$

für die Dynamik von  $A_\mu$ , auf die wir uns im Moment konzentrieren, keine Rolle. Zur Vollständigkeit sei noch angemerkt, dass die obige ‘Wechselwirkung der Teilchen’ i.A. durch ein weiteres Feld vermittelt wird, z.B. das Gravitationsfeld (vgl. die Bemerkung am Ende von Kap. 4.3).

## 5.4 Maxwell-Gleichungen

Durch Variation der Wirkung bzgl. des Feldes  $A_\mu$ ,

$$0 \stackrel{!}{=} \delta S = \int d^4x \left( -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} + j^\mu \delta A_\mu \right) \quad (5.27)$$

$$= \int d^4x \left( -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} (\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu) + j^\mu \delta A_\mu \right) \quad (5.28)$$

$$= \int d^4x (\partial_\nu F^{\nu\mu} + j^\mu) \delta A_\mu, \quad (5.29)$$

erhalten wir die sogenannten **inhomogene Maxwell-Gleichungen**:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu. \quad (5.30)$$

Beachten Sie dabei, dass das Vorzeichen in der Gleichung in der Literatur variieren kann, weil es an der Vorzeichen-Konvention für  $\eta$  hängt.

Des Weiteren erfüllt  $F_{\mu\nu}$  aufgrund seiner Definition die sogenannte **Bianchi-Identität** oder auch **Homogenen Maxwell-Gleichungen**:

$$\partial_{[\mu} F_{\nu\rho]} = 0. \quad (5.31)$$

Dabei bezeichnet  $[\ ]$  die totale Antisymmetrisierung. Letztere ist allgemein durch:

$$T_{[\mu_1 \dots \mu_n]} \equiv \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) T_{\mu_{\sigma(1)} \dots \mu_{\sigma(n)}} \quad (5.32)$$

definiert. Damit gilt z.B.

$$T_{[\mu_1 \mu_2 \mu_3]} = \frac{1}{6} (T_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} + T_{\mu_2 \mu_3 \mu_1} + T_{\mu_3 \mu_1 \mu_2} - T_{\mu_2 \mu_1 \mu_3} - T_{\mu_1 \mu_3 \mu_2} - T_{\mu_3 \mu_2 \mu_1}) \quad (5.33)$$

oder auch

$$F_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu} A_{\nu]}. \quad (5.34)$$

Aus dem letzten Beispiel folgen sofort die oben angegebenen homogenen Maxwell-Gleichungen:

$$\partial_{[\mu} F_{\nu\rho]} = \partial_{[\mu} \partial_{\nu} A_{\rho]} - \partial_{[\mu} \partial_{\rho} A_{\nu]} = 0. \quad (5.35)$$

Die letzte Gleichheit ergibt sich dabei aus der Tatsache, dass partielle Ableitungen vertauschen, also

$$\partial_{[\mu} \partial_{\nu]} \dots = 0, \quad \partial_{[\mu} \partial_{\rho]} \dots = 0. \quad (5.36)$$

Hierbei stehen die Punkte für eine beliebige Funktion der Koordinaten.

Eine oft nützliche alternative Formulierung der homogenen Maxwell-Gleichungen oder der Bianchi-Identität lässt sich angeben, wenn man das 4d Levi-Civita-Symbol benutzt. Dieses ist ganz analog zum bekannten 3d Fall definiert:

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \equiv \begin{cases} \pm 1 \text{ falls } \{\mu\nu\rho\sigma\} \text{ gerade/ungerade Permutation von } \{0123\} \\ \text{sonst } 0. \end{cases} \quad (5.37)$$

Es ist eine wichtige Tatsache, dass  $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  ein invarianter Tensor der  $SO(1,3)$  ist. Dies ist ganz analog dazu, dass  $\epsilon_{ijk}$  ein invarianter Tensor der  $SO(3)$  ist. Die Herleitung unterscheidet sich auch nicht vom  $SO(3)$ -Fall.

Mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols definieren wir nun den **dualen Feldstärkentensor**:

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}. \quad (5.38)$$

Auf dieser Grundlage kann man sich nun überlegen, dass (5.31) äquivalent ist zu der Aussage

$$\partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (5.39)$$

Bitte tun Sie dies.

Damit nehmen die kovarianten Maxwell-Gleichungen folgende sehr kompakte und (fast) symmetrische Form an:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu, \quad \partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (5.40)$$

## 5.5 Übergang zu E und B

Die tägliche Erfahrung (mit  $|\vec{v}| \ll c$ ) kennt nur die Untergruppe  $O(3) \subset O(1,3)$ . Es ist oft nützlich die Beschreibung entsprechend anzupassen. Um dies zu erreichen, bemerken wir zunächst, dass der 4-er Vektor  $A_\mu$  bzgl. der  $O(3) \subset O(1,3)$  in den Skalar  $A_0$  und den 3-er Vektor  $A_i$  zerfällt:

$$A_\mu \longrightarrow A_0; A_i. \quad (5.41)$$

Ebenso zerfällt  $F_{\mu\nu}$  in einen 3-er Vektor und einen Rang-2 Tensor bzgl.  $O(3)$ :

$$F_{\mu\nu} \longrightarrow F_{0i}; F_{ij}. \quad (5.42)$$

Bitte beachten Sie, dass hier  $F_{00}$  nicht auftaucht, da es identisch verschwindet. Außerdem tritt wegen der Antisymmetrie  $F_{i0}$  auch nicht als zusätzlicher, unabhängiger Vektor auf.

Kommentar: Das Obige ist ein einfacher aber wichtiger Teil der Darstellungstheorie von Gruppen. Wir erinnern daran, dass eine Darstellung ganz allgemein ein Homomorphismus einer Gruppe in die linearen Operatoren auf einem Vektorraum ist. Sie kennen bisher explizit u.a. die Vektordarstellungen (auch fundamentale oder definierene Darstellungen) und die Tensordarstellungen der  $O(3)$  und  $O(1,3)$ . Einfacher gesagt entspricht eine Darstellung der Wirkung einer Gruppe auf einem Vektorraum. Man sagt, dass eine gewisse Darstellung einer Gruppe (in unserem Fall Vektor und antisymmetrischer Tensor der  $O(1,3)$ ) sich bezüglich einer Untergruppe immer in Darstellungen dieser Untergruppe (in unserem Fall  $O(3)$ ) zerlegen lassen. Die Darstellungen werden oft durch ihre Dimension bezeichnet, also  $O(1,3)$ -Vektor durch '4',  $O(3)$ -Vektor durch '3' etc. Damit ergibt sich für das oben gesagte die verbreitete mathematische Notation

$$O(1,3) \supset O(3) \quad (5.43)$$

$$4 = 1 + 3_v \quad (5.44)$$

$$6 = (4 \times 4)_A = 3_v + 3_p. \quad (5.45)$$

Hier steht 6 für den antisymmetrischen Tensor, welcher sich aus dem allgemeinen Tensor ( $4 \times 4$ ) durch Antisymmetrisierung ergibt. Das haben wir durch den Index  $A$  bezeichnet. Außerdem haben wir den 3-er Vektoren Indizes zur genaueren Kennzeichnung gegeben:  $v$  für Vektor und  $p$  für Pseudo- oder auch Axialvektor. Dieser letzte Punkt wird im Laufe der Vorlesung noch erklärt werden.

Wir geben den beiden Anteilen von  $A_\mu$  nun noch eigene Formelzeichen und Namen:

$$\{A^\mu\} = \{A^0 \equiv \phi, \{A^i\} = \vec{A}\}. \quad (5.46)$$

Wir nennen  $\phi$  das elektrostatische Potential und  $\vec{A}$  das 3-er Vektorpotential.

Ebenso definieren wir das elektrische Feld  $\vec{E}$  durch

$$E^i \equiv F^{0i}. \quad (5.47)$$

Wir rechnen damit nach, dass

$$E^i = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 \quad \text{bzw.} \quad \vec{E} = -\partial_t \vec{A} - \vec{\nabla} \phi \quad (5.48)$$

gilt. Warum dies unser vertrautes E-Feld ist, wird bald klar werden.

Jetzt wenden wir uns dem in  $F^{\mu\nu}$  enthaltenen Rang-2  $O(3)$ -Tensor zu. Für diesen gilt die Identität

$$F^{ij} = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \epsilon_{klm} F^{lm}. \quad (5.49)$$

Dies lässt sich zeigen, wenn man beachtet, dass

$$\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \epsilon_{klm} = \frac{1}{2} (\delta^i_l \delta^j_m - \delta^i_m \delta^j_l) \quad (5.50)$$

gilt. Dieser Ausdruck ist, wie man rechts besonders deutlich sieht, der Projektor auf den antisymmetrischen Anteil eines Tensor. Auf  $F^{ij}$  wirkt er demnach als Identität.

Wenn wir nun in (5.49) rechts die Definition

$$F^{lm} = \partial^l A^m - \partial^m A^l \quad (5.51)$$

einsetzen, und uns an die Formel  $(\vec{\nabla} \times \vec{A})_i = \epsilon_{ijk} \partial^j A^k$  für die Rotation erinnern, so erhalten wir

$$F^{ij} = \epsilon^{ijk} (\vec{\nabla} \times \vec{A})_k. \quad (5.52)$$

Mit der Definition

$$\vec{B} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (5.53)$$

wird daraus

$$F^{ij} = \epsilon^{ijk} B_k. \quad (5.54)$$

Zusammenfassend ergibt sich damit

$$F^{\mu\nu} = \left( \begin{array}{c|ccc} 0 & & \vec{E} & \\ \hline & 0 & B_3 & -B_2 \\ -\vec{E} & -B_3 & 0 & B_1 \\ & B_2 & -B_1 & 0 \end{array} \right)^{\mu\nu}. \quad (5.55)$$

Jetzt wollen wir noch den Zusammenhang mit  $\tilde{F}$  explizit machen. Dazu rechnen wir zunächst nach

$$\tilde{F}^{01} = \epsilon^{0123} F_{23} = -F_{23} = -F^{23}. \quad (5.56)$$

Hier müssen Sie beachten, dass das Levi-Civita-Symbol mit oberen Indizes sich von dem mit unteren Indizes um ein Vorzeichen unterscheidet, weil beim Heben der Indizes genau ein Mal  $\eta^{00}$  benötigt wird. Ebenso findet man

$$\tilde{F}^{23} = \epsilon^{2301} F_{01} = -F_{01} = F^{01}. \quad (5.57)$$

Man erkennt leicht die Systematik und überzeugt sich so davon, dass der Übergang von  $F$  zu  $\tilde{F}$  der Ersetzung

$$\vec{E} \rightarrow -\vec{B} \quad \text{und} \quad \vec{B} \rightarrow \vec{E} \quad (5.58)$$

entspricht. Es gilt also

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \left( \begin{array}{c|ccc} 0 & & -\vec{B} & \\ \hline \vec{B} & 0 & E_3 & -E_2 \\ & -E_3 & 0 & E_1 \\ & E_2 & -E_1 & 0 \end{array} \right)^{\mu\nu}. \quad (5.59)$$

## 5.6 Maxwell-Gleichungen in nichtrelativistischer Form

Erinnern wir uns an die inhomogenen Gleichungen

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu. \quad (5.60)$$

Die beiden 4-er Vektoren  $\partial_\nu F^{\mu\nu}$  und  $j^\mu$  zerfallen, wie oben der 4-er Vektor  $A_\mu$ , gemäß

$$SO(1,3) \supset SO(3) \quad , \quad 4 = 1 + 3. \quad (5.61)$$

Beim Strom führen wir neue Bezeichnungen für den  $SO(3)$ -Skalar und den 3-er Vektor ein:

$$\{j^\mu\} = \{\rho, \vec{j}\}. \quad (5.62)$$

Damit zerfällt (5.60) in eine skalare Gleichung,

$$\partial_\nu F^{0\nu} = \rho \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho, \quad (5.63)$$

und eine 3-er Vektor-Gleichung,

$$\partial_\nu F^{i\nu} = j^i \quad \Leftrightarrow \quad -\partial_t E^i + \partial_j F^{ij} = j^i \quad \Leftrightarrow \quad -\dot{\vec{E}} + \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{j}. \quad (5.64)$$

Hier haben wir im letzten Schritt den Zusammenhang

$$F^{ij} = \epsilon^{ijk} B_k \quad (5.65)$$

verwendet, den wir oben abgeleitet hatten.

Die homogene Gleichung

$$\partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (5.66)$$

zerfällt ganz analog nach dem Schema ‘4=1+3’, aber mit

$$\vec{E}, \vec{B} \rightarrow -\vec{B}, \vec{E}. \quad (5.67)$$

Man findet auf diese Weise sofort die beiden homogenen Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad , \quad \dot{\vec{B}} + \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (5.68)$$

Man schreibt die Rotation  $\vec{\nabla} \times (\dots)$  vielfach auch als  $\text{rot}(\dots)$ , aber wir werden versuchen, dass zu vermeiden.

Zusammenfassend haben wir also die Maxwell-Gleichungen in der  $O(3)$ -kovarianten (aber nicht mehr  $O(1,3)$ -kovarianten) Form gewonnen:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (5.69)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{j} + \dot{\vec{E}} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}. \quad (5.70)$$

Man bezeichnet dabei  $\dot{\vec{E}}$  auch als Verschiebungsstrom (displacement current) und  $\dot{\vec{B}}$  als magnetischen Verschiebungsstrom.

Rechts ‘fehlen’ offensichtlich Beiträge  $\rho_{\text{mag.}}$  und  $\vec{j}_{\text{mag.}}$  von magnetischen Ladungen und deren Strömen. Die Struktur der Gleichungen lässt solche magnetischen Ladungen zu. Man erwartet sie theoretisch sogar. Aber bislang wurde noch kein sogenannter **magnetischer Monopol** gefunden. Er ist vermutlich (auch das ist theoretisch erwartet) sehr schwer.

Die obige Form der Maxwell-Gleichungen entspricht dem ”Lorentz-Heavyside”-Einheitssystem, wobei wir zusätzlich  $c = 1$  gesetzt haben. Um zum Gaußschen System überzugehen, führen wir zunächst  $c$  wieder ein. Dazu erinnern wir uns an den Teil der Wirkung, welcher die Wechselwirkung zwischen Ladung und Feld beschreibt:

$$S_{WW} = e \int A_\mu dx^\mu \quad (c = 1). \quad (5.71)$$

Mit  $c$  definiert man

$$S_{WW} = \frac{e}{c} \int A_\mu dx^\mu. \quad (5.72)$$

Im Prinzip ist dieser Faktor beliebig, weil er in eine Umdefinition von  $e$  absorbiert werden könnte. Aber er ist logisch begründbar, wenn man sich die Wirkung für ein Teilchen in Ruhe ansieht,

$$S_{WW} = -\frac{e}{c} \int \phi dt c, \quad (5.73)$$

wobei wir  $x^0 = c dt$  benutzt haben. Der Vorfaktor  $1/c$  kompensiert gerade das  $c$  aus  $dx^0$ .

Jetzt schreiben wir  $S_{WW}$  so um, dass man den Strom identifizieren kann:

$$S_{WW} = \frac{1}{c} \int d^4x e \int_{\Gamma} d\lambda \delta^4(x - x(\lambda)) \dot{x}^\mu A_\mu. \quad (5.74)$$

Wir erinnern daran, dass  $\dot{x}^\mu \equiv dx^\mu/d\lambda$  und definieren den Strom als

$$e \int_{\Gamma} d\lambda \delta^4(x - x(\lambda)) \dot{x}^\mu = \frac{j^\mu}{c}. \quad (5.75)$$

Der hier zusätzlich eingeführte Faktor  $c$  begründet sich wie folgt:

Wir machen uns klar, dass die Einheit einer  $\delta$ -Funktion immer die inverse Einheit des Arguments ist. Also z.B.

$$[\delta(x)] = [1/x]. \quad (5.76)$$

Die Einheit des von uns eben definierten Stroms ist demnach

$$[j] = [e\delta^4(x)xv] = [e\delta^3(x)v] = [\rho v]. \quad (5.77)$$

Das macht natürlich physikalisch Sinn und rechtfertigt das  $c$  in der Definition des Stroms (5.75).

Also haben wir schlussendlich

$$S_{WW} = \frac{1}{c^2} \int d^4x j^\mu A_\mu \quad \text{mit} \quad j^\mu = \begin{pmatrix} \rho c \\ \vec{j} = \rho \vec{v} \end{pmatrix}. \quad (5.78)$$

Des Weiteren definieren wir die Wirkung der freien Elektrodynamik bei  $c \neq 1$  als

$$S_{ED} = \int d^4x \left( -\frac{1}{4c} F^2 \right). \quad (5.79)$$

Der Faktor  $1/c$  dient hier dazu, das  $c$  aus  $dx^0 = c dt$  zu kürzen.

Zusammenfassend haben wir somit

$$S = \int d^4x \left( -\frac{1}{4c} F^2 + \frac{1}{c^2} jA \right). \quad (5.80)$$

Der Übergang zur nichtrelativistischen Form liefert, ganz analog zur oben durchgeführten Rechnung,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (5.81)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{j} + \frac{\dot{\vec{E}}}{c} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\dot{\vec{B}}}{c} \quad (5.82)$$

Dies sind die Maxwell-Gleichungen sind im Lorentz-Heaviside-System. Als Merkregel kann man sich erinnern, dass das  $1/c$  bei den expliziten Zeitableitungen mit  $dx^0 = c dt$  zusammenhängt. Außerdem hat  $S_{WW}$  relativ zu  $S_{ED}$  einen extra Faktor  $1/c$ , was sich in einem Faktor  $1/c$  bei  $j^\mu$  niederschlägt. Bei  $j^0/c \equiv \rho$  sieht man diesen Faktor wegen der Definition von  $\rho$  nicht.

Im weit verbreiteten Gauß-System wird noch die relative Normierung von Feldern und Ladungen um einen Faktor  $4\pi$  verändert. Die (in diesem Fall sehr guten) historischen Gründe dafür werden bald klar. Dann ergibt sich

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad (5.83)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 4\pi\frac{\vec{j}}{c} + \frac{\dot{\vec{E}}}{c} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\dot{\vec{B}}}{c} . \qquad (5.84)$$

Kommen wir nun zu den Maßeinheiten der einzelnen Größen im Gauß-System. Wir starten bei der Mechanik im cgs-System (nicht mit mks, wie beim SI-System) und definieren die Einheiten von  $e$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  etc. auf dieser Basis. Aus

$$S_{ED} \sim \frac{1}{c} \int d^4x F^2 \qquad (5.85)$$

ergibt sich zunächst

$$[S] = \left[ \frac{L^4}{c} \right] [E; B]^2 . \qquad (5.86)$$

Da wir die Einheit einer Wirkung kennen, erhält man so

$$[E; B]^2 = \frac{\text{g cm}^2}{\text{s}} \cdot \frac{1}{\text{cm}^4} \cdot \frac{\text{cm}}{\text{s}} \quad \text{bzw.} \quad [E; B] = \sqrt{\frac{\text{g}}{\text{cm s}^2}} \equiv \text{G} \equiv \text{statV/cm} . \qquad (5.87)$$

Den Ausdruck  $\sqrt{\text{g/cm s}^2}$  identifiziert man speziell im Fall von  $B$  als ‘Gauß’ und im Fall von  $E$  als ‘Statvolt/cm’ (mit Abkürzungen G und statV/cm).

Jetzt betrachten wir den Term für die Wechselwirkung,

$$S_{WW} \sim \frac{e}{c} \int A dx , \qquad (5.88)$$

und beachten, dass per Definition des Feldstärketensors gilt

$$[A] = [E; B] \cdot \text{cm} . \qquad (5.89)$$

Daraus ergibt sich

$$[e] = \frac{\text{g cm}^2}{\text{s}} \cdot \frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot \sqrt{\frac{\text{cm s}^2}{\text{g}}} \cdot \frac{1}{\text{cm}} \cdot \frac{1}{\text{cm}} = \sqrt{\frac{\text{g cm}^3}{\text{s}^2}} \equiv \text{statC} \equiv \text{Fr} . \qquad (5.90)$$

Hier steht statC für ‘Statcoulomb’ und Fr für ‘Franklin’. Für die Ladung eines Elektrons findet man experimentell

$$e = 5 \cdot 10^{-10} \text{ Fr} . \qquad (5.91)$$

In den sogenannten **natürlichen Einheiten** mit  $\hbar = c = 1$  ist  $e \simeq \sqrt{4\pi/137} \simeq 0,303\dots$ . Die Elementarladung ist also trotz der obigen Zahl  $10^{-10}$  in keiner objektiven Weise besonders klein. Dies wird im Rahmen der QFT genauer diskutiert werden.

Wir erinnern an dieser Stelle daran, dass wir in den Kap. 1.2 die Sätze von Gauß und Stokes angegeben hatten. In Kap. 1.3 hatten wir dann kurz angesprochen, wie man damit von der differentiellen Form zur integralen Form der Maxwell-Gleichungen kommt. Wie wollen dies hier nicht wiederholen, aber der Leser sollte sich das in Erinnerung rufen.

## 6 Elektrostatik

In fast unserer gesamten täglichen Erfahrung sind Geschwindigkeiten sehr klein gegen  $c$ . Wir erwarten also, dass die Annahme  $c \rightarrow \infty$  die Maxwell-Gleichungen in einer Weise vereinfacht, die in vielen Fällen nützlich ist. In der Tat verschwinden in diesem Limes die Terme mit  $j$ ,  $\dot{E}$  und  $\dot{B}$ . Es gibt dann keine Quellen mehr für das  $B$ -Feld und es ist konsistent, per Annahme  $B = 0$  zu setzen.

Was bleibt sind die beiden Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0. \quad (6.1)$$

Außerdem wollen wir nur nach Lösungen unabhängig von  $t$  suchen (wie der Begriff **Elektrostatik** nahelegt und wie es mit dem Weglassen der  $\dot{E}$ -,  $\dot{B}$ - und  $j$ -Terme konsistent ist). Aus der Mechanik, speziell der Analyse konservativer Kraftfelder, wissen wir:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \phi \text{ mit } \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi. \quad (6.2)$$

Unabhängig von unseren Mechanik-Vorkenntnissen folgt dies auch aus  $E^i = F^{0i}$  zusammen mit der Definition von  $F^{0i}$  durch Ableitungen  $A^\mu$ . Man muss nur den Term mit  $\partial_t$  weglassen und  $A^0 = \phi$  setzen.

Zu lösen bleibt also nur  $\vec{\nabla}(-\vec{\nabla}\phi) = \rho$ . Mit der Definition

$$\Delta \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \sum_i \partial_i^2, \quad (6.3)$$

nimmt dies die Form

$$\Delta \phi = -\rho \quad (6.4)$$

an. Dies ist die in vielen Zusammenhängen auftretende **Poisson-Gleichung**. Den Operator  $\Delta$  nennt man **Laplace-Operator** und die obige Gleichung mit  $\rho = 0$  die **Laplace-Gleichung**.

### 6.1 Feld von Punktladungen

Die Ladungsdichte einer Punktladung  $e$  bei  $\vec{x}_0$  ist, per Definition der  $\delta$ -Funktion,

$$\rho = e\delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0). \quad (6.5)$$

Wir setzen O.B.d.A.  $\vec{x}_0 = 0$ . Außerdem wollen wir zur Allgemeinheit die folgende Analyse mit  $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$  durchführen. Wir wollen also

$$\Delta\phi = -e\delta^d(\vec{x}) \quad (6.6)$$

lösen. Dazu machen wir den Ansatz

$$\phi = \frac{a}{|\vec{x}|^\alpha}, \quad (6.7)$$

wobei  $a$  und  $\alpha$  zu bestimmende Konstanten sind. Es gilt

$$\vec{\nabla}\phi = \vec{\nabla} \frac{a}{(\sum_i (x^i)^2)^{\alpha/2}} = -\frac{a\alpha\vec{x}}{(\vec{x}^2)^{\alpha/2+1}} \quad (6.8)$$

und, durch nochmaliges Differenzieren,

$$\vec{\nabla}^2\phi = -\alpha a \left[ \frac{d}{(\vec{x}^2)^{\alpha/2+1}} - \frac{(\alpha+2)\vec{x}^2}{(\vec{x}^2)^{\alpha/2+2}} \right] = -(d - (\alpha+2)) \frac{a\alpha}{(\vec{x}^2)^{\alpha/2+1}}. \quad (6.9)$$

Damit dies bei  $\vec{x} \neq 0$  verschwindet, muss  $\alpha = d - 2$  gelten. Das so definierte  $\phi$  löst, außer bei  $\vec{x} = 0$ , die Laplace-Gleichung

$$\Delta\phi = 0, \quad \vec{x} \neq 0. \quad (6.10)$$

Man sagt:  $\phi$  ist **harmonisch**, außer bei  $\vec{x} = 0$

Wir müssen jetzt noch die Stelle  $\vec{x} = 0$  analysieren. Diesen Teil der Analyse machen führen wir zur Zeitersparnis nur bei  $d = 3$  durch. Wir betrachten also

$$\vec{\nabla}^2 \frac{a}{|\vec{x}|} = -e\delta^3(\vec{x}) \quad (6.11)$$

und wollen  $a$  so fixieren, dass diese Aussage stimmt. Dazu erinnern wir uns, dass die  $\delta$ -Funktion nur nach Integration mit einer Funktion  $f(\vec{x})$  definiert ist. Wir wissen, dass beide Seiten der Gleichung außer bei  $\vec{x} = 0$  verschwinden. Also können wir O.B.d.A.  $f \equiv 1$  und als Integrationsgebiet eine Einheitskugel wählen:

$$a \int_{B_3} d^3x \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x}|} \right) = -e \int_{B_3} \delta^3(\vec{x}) d^3\vec{x}. \quad (6.12)$$

Mit Gauß und der Definition der  $\delta$ -Funktion wird daraus

$$a \int_{S^2} d\vec{f} \cdot \left( \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x}|} \right) = a \int_{S^2} d\vec{f} \cdot \left( -\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \right) = -e \quad \text{und somit} \quad a 4\pi = e. \quad (6.13)$$

Wir haben also

$$a = \frac{e}{4\pi} \quad (6.14)$$

gefunden. Es folgt

$$\phi = \frac{e}{4\pi|\vec{x}|} \quad \text{sowie} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = \frac{e\vec{x}}{4\pi|\vec{x}|^3}. \quad (6.15)$$

Im Gauß-System würden diese  $4\pi$  verschwinden.

Das Resultat für eine Ladung bei  $\vec{x}_0 \neq 0$  ergibt sich durch Verschiebung um  $\vec{x}_0$ :

$$\phi = \frac{e}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}_0|}. \quad (6.16)$$

Ebenso folgt das entsprechende Resultat für  $\vec{E}$ .

Als wichtige Erkenntnis halten wir fest:

$$|\vec{E}| \sim \frac{1}{|\vec{x}|^2} \quad (6.17)$$

für eine Punktladung am Ursprung. Die Potenz ‘2’ tritt hier auf, weil dies die Dimension der  $S^2$  ist, welche die Ladung umschließt. Das verstehen wir aufgrund unserer allgemeineren Analyse, wo wir an dieser Stelle  $d - 1$  gefunden hätten. Es folgt auch aus dem Gaußschen Satz in  $d$  Dimensionen.

Wegen der Linearität der Poisson-Gleichungen ist das Potential vieler Punktladungen einfach die Summe der einzelnen Potentiale:

$$\phi = \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}_{\alpha}|}. \quad (6.18)$$

Der Übergang zum Kontinuum fällt von hier aus nicht schwer:

$$\phi = \int \frac{d^3y}{4\pi} \cdot \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}. \quad (6.19)$$

## 6.2 Methode der Greenschen Funktion

Unser nächstes Ziel soll nun darin bestehen, mit Vorgabe eines beliebigen  $\rho$  die Poisson-Gleichung

$$\Delta\phi = -\rho(\vec{x}) \quad (6.20)$$

allgemein zu lösen, also  $\phi$  zu bestimmen. Dies ist noch allgemeiner als unser letztes Ergebnis mit dem Integral über Punktladungspotentiale, weil wir uns beim Raum nicht auf  $\mathbb{R}^d$  beschränken wollen.

Die Idee, welche wir verfolgen wollen, bleibt aber die ähnlich wie im letzten Kapitel: Wir lösen zunächst

$$\Delta G(\vec{x}, \vec{y}) = -\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (6.21)$$

lösen. Hat man dieses  $G$ , so gilt für allgemeines  $\rho$ :

$$\phi(\vec{x}) = \int d^3y G(\vec{x}, \vec{y})\rho(\vec{y}). \quad (6.22)$$

Zur Begründung wenden wir einfach den Laplace-Operator auf  $\phi$  an:

$$\Delta\phi = \int d^3y \Delta_x G(\vec{x}, \vec{y}) \rho(\vec{y}) = - \int d^3y \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \rho(\vec{y}) = -\rho(\vec{x}). \quad (6.23)$$

Hier bezeichnet  $\Delta_x$  den Laplace-Operator bzgl.  $\vec{x}$ , also  $\partial^2/(\partial x^1)^2 + \partial^2/(\partial x^2)^2 + \partial^2/(\partial x^3)^2$ . Diese Methode funktioniert nicht nur für den Laplace-Operator  $\Delta$  sondern auch für allgemeine Differentialoperatoren  $D$  und auch auf Räumen, die vom  $\mathbb{R}^d$  verschieden sind. Für den Fall  $D = \Delta$  und  $\mathbb{R}^3$  kennen wir die Lösung natürlich schon aus dem letzten Kapitel:

$$G(\vec{x} - \vec{y}) = \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|}. \quad (6.24)$$

Hier haben wir die oft verwendete Schreibweise  $G(\vec{x}, \vec{y}) = G(\vec{x} - \vec{y})$  benutzt, welche immer dann gerechtfertigt ist, wenn  $G$  nur von der Differenz seiner Argumente abhängt. Die ist hier ein Resultat der Translationssymmetrie und gilt somit nicht immer.

Wie schon erwähnt, kann man obige Analyse auf sehr allgemeinen, auch gekrümmten Räumen anwenden. Wir wollen uns aber auf  $\mathbb{R}^d$  und Teilmengen davon einschränken. Die gesuchte Lösung  $G$  zu (6.21) ist im Allgemeinen so wie auch in unserem Fall nicht eindeutig sondern hängt insbesondere von den Randbedingungen ab. Selbst im einfachsten Fall des ganzen  $\mathbb{R}^d$  trifft das zu: Man braucht dann die Randbedingungen bei  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ .

Besprechen wir dies etwas genauer: Seien  $G_1, G_2$  zwei Lösungen zu (6.21). Dann erfüllt  $u = G_1 - G_2$  die Laplace-Gleichung

$$\Delta u = 0, \quad (6.25)$$

$u$  ist also harmonisch. Falls wir nun hinreichen schnellen Abfall der beiden Lösungen (und damit auch von  $u$ ) bei  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$  fordern, so kann man zeigen, dass  $u \equiv 0$  und damit  $G_1 = G_2$ . Wir kommen darauf noch zurück.

Als Nächstes wollen wir uns der Situationen mit Rand (bei  $|\vec{x}| < \infty$ ) zuwenden, vgl. Abb. 21. Um auch hierfür Greensche Funktionen zu benutzen, brauchen wir die Greenschen Formeln.

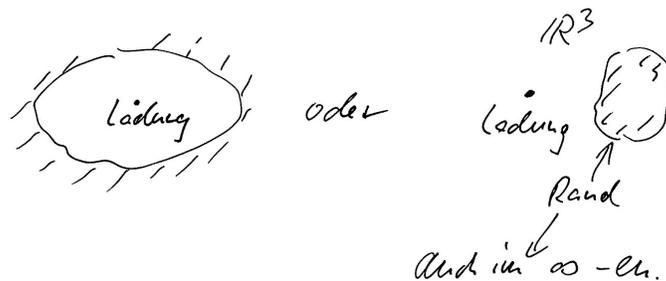


Abbildung 21: Zur Poisson-Gleichung mit Punktladung und Rand. Links: Ein endliches (kompaktes) Gebiet, dass von einem Rand eingeschlossen ist. Rechts: Ein unendliches Gebiet mit einem ausgesparten, kompakten Teil. Es gibt dabei sowohl einen Rand im Unendlichen als auch an der Grenze zum ausgesparten Gebiet.

### 6.3 Greensche Formeln

Bei den Greenschen Formeln handelt es sich um sehr nützliche, auch als ‘Greensche Sätze’ bezeichnete Ergebnisse. Zur Herleitung betrachten wir zunächst die unmittelbar aus Gauß folgende

Aussage

$$\int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{\nabla} \psi) = \int_{\partial V} (\varphi \vec{\nabla} \psi) \cdot d\vec{f}. \quad (6.26)$$

Dabei sind  $\varphi$  und  $\psi$  beliebige glatte Funktionen.

Statt Gauß anzuwenden können wir die linke Seite auch mit der Produktregel auswerten:

$$\int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{\nabla} \psi) = \int_V d^3x (\varphi \Delta \psi + (\vec{\nabla} \varphi) \cdot (\vec{\nabla} \psi)). \quad (6.27)$$

Gleichsetzen der rechten Seiten von (6.26) und (6.27) gibt

$$\int_V d^3x (\varphi \Delta \psi + (\vec{\nabla} \varphi) \cdot (\vec{\nabla} \psi)) = \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot (\varphi \vec{\nabla} \psi). \quad (6.28)$$

Dies bezeichnet man als die **1. Greensche Formel**.

Nun betrachten wir die Differenz

$$(1. \text{ Greensche Formel}) - (1. \text{ Greensche Formel mit } \varphi \leftrightarrow \psi). \quad (6.29)$$

Man könnte auch sagen, wir antisymmetrisieren die 1. Greensche Formel in  $\varphi$  und  $\psi$ . Es folgt

$$\int_V d^3x (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) = \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot (\varphi \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \varphi). \quad (6.30)$$

Dies ist die **2. Greensche Formel**.

## 6.4 Greensche Methode für Gebiete mit Rand

Wir wollen jetzt die Greensche Methode und die Greenschen Formeln benutzen, um die Poisson-Gleichung

$$\Delta \phi = -\rho \quad (6.31)$$

auf allgemeinen Gebieten mit Rand (siehe z.B. Abb. 22) zu lösen. Wie schon erwähnt, wird die Lösung nur eindeutig, falls Randbedingungen auf  $\partial V$  vorgeschrieben sind. Es gibt zwei grundlegende Möglichkeiten:

1) **Dirichlet-Randbedingung:**

$$\phi(\vec{x}) \Big|_{\partial V} = f(\vec{x}) \Big|_{\partial V}, \quad (6.32)$$

wobei  $f$  eine vorgegebene Funktion ist.

2) **Neumann-Randbedingung:**

$$\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \phi(\vec{x}) \Big|_{\partial V} = g(\vec{x}) \Big|_{\partial V} \quad \text{mit} \quad \vec{n} \parallel d\vec{f} \quad \text{und} \quad |\vec{n}| = 1. \quad (6.33)$$

Diesmal haben wir die vorgegebene Funktion, welche die Randbedingungen spezifiziert, mit  $g$  bezeichnet.

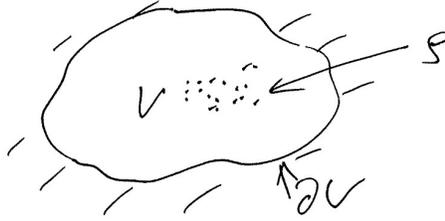


Abbildung 22: Ladungsverteilung im Gebiet  $V$  mit Rand  $\partial V$ .

Wir wollen für beide Fälle Greensche Funktionen definieren, welche wie üblich die Poisson-Gleichung mit  $\delta$ -Funktions-Quelle lösen:

$$\Delta G_{D,N}(\vec{x}, \vec{y}) = -\delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \quad (6.34)$$

Die Argumente können jetzt nicht mehr zu  $\vec{x} - \vec{y}$  zusammengefasst werden, da die Translationsinvarianz durch das Vorhandensein eines Randes gebrochen ist.

Für den Dirichlet-Fall definieren wir  $G_D$  durch die Randbedingung

$$G_D(\vec{x}, \vec{y}) \Big|_{\vec{x} \in \partial V} = 0. \quad (6.35)$$

Es ist also das Potential für eine Punktladung bei  $\vec{y}$  und die einfachsten Randbedingungen von Dirichlet-Typ:  $f = 0$ .

Für den Neumann-Fall definieren wir analog

$$\vec{n} \cdot \vec{\nabla}_x G_N(\vec{x}, \vec{y}) \Big|_{\vec{x} \in \partial V} = -\frac{1}{\|\partial V\|}. \quad (6.36)$$

Die einfachste mögliche Wahl der Funktion  $g$  ist hier eine Konstante. Der Wert dieser Konstanten ist minus die inverse Fläche des Randes  $\partial V$ . Man überzeugt sich davon leicht, indem man (6.36) über den Rand integriert und links den Satz von Gauß anwendet. Man sieht somit, dass die naive Betrachtung der einfachsten Wahl  $g = 0$  ausgeschlossen ist.

Unser Ziel ist es nun, in Analogie zur Situation im  $\mathbb{R}^3$ , eine Formel vom Typ

$$\phi(\vec{x}) = \int_V d^3y G(\vec{x}, \vec{y}) \rho(\vec{y}) + \dots \quad (6.37)$$

für das Potential abzuleiten. Dabei haben wir durch die Auslassungspunkte schon angedeutet, dass es je nach Randbedingung Zusatzterme geben wird.

Als nichttriviale mathematische Fakten stellen wir fest: Die Greenschen Funktionen  $G_{D,N}$  **existieren**, sind **eindeutig** und sind **symmetrisch** in den beiden Argumenten:

$$G_{D,N}(\vec{x}, \vec{y}) = G_{D,N}(\vec{y}, \vec{x}). \quad (6.38)$$

Genauer gesagt ist es so, dass man im Dirichlet-Fall die Symmetrie zeigen kann. Im Neumann-Fall kann man, gegeben ein nicht symmetrisches  $G_N$ , einen Beitrag addieren, so dass das Resultat

eine Greensche Funktion bleibt und symmetrisch ist. Eindeutigkeit gilt in diesem Sinne nur, wenn man auch die Symmetrie-Forderung stellt. Wir werden von diesen Eigenschaften weiter unten nur die Eindeutigkeit begründen.

Jetzt wollen wir uns bemühen, die oben skizzierte Formel mit den Auslassungszeichen zu vervollständigen. Dazu erinnern wir uns an die 2. Greensche Formel:

$$\int_V d^3y (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) = \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot (\varphi \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \varphi) . \quad (6.39)$$

Wir ersetzen die beiden darin auftretenden Funktionen gemäß

$$\varphi(\vec{y}) \rightarrow \phi(\vec{y}) , \quad \psi(\vec{y}) \rightarrow G(\vec{x}, \vec{y}) , \quad (6.40)$$

wobei  $\phi$  die Rolle des gesuchten Potentials spielen wird. Das gibt

$$\int_V d^3y (\phi(\vec{y}) \Delta_y G(\vec{x}, \vec{y}) - G(\vec{x}, \vec{y}) \Delta_y \phi(\vec{y})) = \int_{\partial V} d\vec{f} \left( \phi(\vec{y}) \vec{\nabla}_y G(\vec{x}, \vec{y}) - G(\vec{x}, \vec{y}) \vec{\nabla}_y \phi(\vec{y}) \right) , \quad (6.41)$$

wobei wir zur Klarheit explizit gemacht haben, auf welche Variable die Differentialoperatoren wirken. Links können wir nun

$$\Delta G = -\delta^3 \quad \text{und} \quad \Delta \phi = -\rho \quad (6.42)$$

anwenden, wobei die Symmetrie von  $G$  wichtig ist. Dies liefert

$$\int_V d^3y (-\phi(\vec{y}) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) + G(\vec{x}, \vec{y}) \rho(\vec{y})) = \int_{\partial V} d\vec{f} \left( \phi(\vec{y}) \vec{\nabla}_y G(\vec{x}, \vec{y}) - G(\vec{x}, \vec{y}) \vec{\nabla}_y \phi(\vec{y}) \right) . \quad (6.43)$$

Ausgehend von dieser allgemeinen Formel können wir jetzt die beiden Spezialfälle gemäß Dirichlet und Neumann diskutieren:

Im Dirichlet-Fall verschwindet rechts der zweite Term, weil eines der Argumente von  $G$  auf dem Rand liegt. Wir können dann nach  $\phi$  auflösen und finden

$$\phi(\vec{x}) = \int_V d^3y G_D(\vec{x}, \vec{y}) \rho(\vec{y}) - \int_{\partial V} d\vec{f} \left( \phi(\vec{y}) \vec{\nabla}_y G_D(\vec{x}, \vec{y}) \right) . \quad (6.44)$$

Die ist unser finales Ergebnis für **Dirichlet-Randbedingungen**.

Im Neumann-Fall können wir in (6.43) rechts die Beziehung

$$d\vec{f} \cdot \vec{\nabla} G_N = - \frac{|d\vec{f}|}{\|\partial V\|} \quad (6.45)$$

benutzen, welche aus (6.36) folgt, weil  $d\vec{f} \parallel d\vec{n}$ . Nach partieller Integration und Auflösen nach  $\phi$  erhalten wir

$$\phi(\vec{x}) = \int_V d^3y G_N(\vec{x}, \vec{y}) \rho(\vec{y}) + \int_{\partial V} d\vec{f} \left( G_N(\vec{x}, \vec{y}) \vec{\nabla}_y \phi(\vec{y}) \right) + \langle \phi \rangle_{\partial V} , \quad (6.46)$$

wobei der letzte Term den Mittelwert von  $\phi$  auf Rand charakterisiert:

$$\langle \phi \rangle_{\partial V} \equiv \frac{1}{\|\partial V\|} \int |d\vec{f}| \phi(\vec{y}). \quad (6.47)$$

Dies ist unser finales Ergebnis für **Neumann-Randbedingungen**. Wir betonen, dass in den beiden Ergebnis-Formeln (6.44) und (6.46) jeweils die Funktionen  $\phi(\vec{y})|_{\partial V}$  bzw.  $\vec{n} \cdot \vec{\nabla}_y \phi|_{\partial V}$  vorgegeben sein müssen. Im Neumann-Fall muss man außerdem  $\langle \phi \rangle_{\partial V}$  kennen. Der entscheidende Vorteil der beschriebenen Methode besteht darin, dass wir für beliebige derartige Vorgaben sofort das Ergebnis erhalten, ohne eine partielle Differentialgleichung lösen zu müssen. Natürlich ist diese Schwierigkeit nicht völlig verschwunden. Sie besteht insofern weiter, dass man zunächst die beiden Greenschen Funktionen  $G_D$  und  $G_N$  bestimmen muss.

Als nächstes kommen wir, wie angekündigt, zur Frage der Eindeutigkeit: Seien zu gegebenem  $\rho$  und Randbedingungen zwei Lösungen  $\phi_1, \phi_2$  bekannt. Dann löst  $\phi \equiv \phi_1 - \phi_2$  offensichtlich die Laplace-Gleichung und hat triviale Randbedingungen, also  $\phi(\vec{y})|_{\partial V} = 0$  bzw.  $\vec{n} \cdot \vec{\nabla}_y \phi|_{\partial V} = 0$  und  $\langle \phi \rangle_{\partial V} = 0$ . Jetzt benutzen wir die 1. Greensche Formel

$$\int_V d^3x \left( \varphi \Delta \psi + (\vec{\nabla} \varphi) \cdot (\vec{\nabla} \psi) \right) = \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot (\varphi \vec{\nabla} \psi) \quad (6.48)$$

und setzen  $\varphi = \phi$  und  $\psi = \phi$  ein. Es folgt

$$\int_V d^3x \left( \vec{\nabla} \phi \right)^2 = \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot (\phi \vec{\nabla} \phi). \quad (6.49)$$

Die rechte Seite verschwindet sowohl im Dirichlet- als auch im Neumann-Fall. Der Integrand links ist positiv definit und muss also identisch verschwinden. Es gilt demnach

$$\vec{\nabla} \phi \equiv 0 \quad (6.50)$$

und wegen der trivialen Randbedingungen auch  $\phi \equiv 0$ . Dies beweist die Eindeutigkeit.

Man kann diese Eindeutigkeits-Analyse unter gewissen Annahmen auch auf den Fall des ganzen  $\mathbb{R}^3$  übertragen. Dazu betrachten wir wie oben zwei Lösungen auf  $\mathbb{R}^3$  und deren Differenz  $\phi = \phi_1 - \phi_2$ . Wir schränken uns jetzt auf das Gebiet im Inneren einer Kugel mit Radius  $R$  ein, also  $\partial V = S^2(R)$ . Es gilt dann (6.49). Wenn wir nun annehmen, dass unsere Lösungen und damit auch deren Differenz im Unendlichen schnell genug abfallen, also z.B.  $\phi \sim 1/|\vec{x}|$  und  $\vec{\nabla} \phi \sim 1/|\vec{x}|^2$ , dann verschwindet die rechte Seite im Limes  $R \rightarrow \infty$ . Damit folgt wie vorher  $\phi \equiv 0$ .

## 6.5 Spiegelladungen

Die Methode der Spiegelladungen ist zum Auffinden von Greenschen Funktionen auf Gebieten mit Rand äußerst nützlich. Um dies zu erläutern, wollen wir uns zunächst klarmachen, inwiefern solche Greenschen Funktionen von der bekannten Funktion im  $\mathbb{R}^3$ -Fall abweichen. Betrachten wir dazu ein Gebiet  $V$  mit einer Punktladung der Stärke Eins bei  $\vec{y}$  im Inneren des Gebietes (Abb. 23). Das Potential zur Randbedingung  $\phi = 0$  (oder zur entsprechenden Neumann-Randbedingung  $\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \phi = -1/\|\partial V\|$ ) ist in diesem Fall identisch mit der Greenschen Funktion.

Letztere kann man schreiben als

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|} + F(\vec{x}, \vec{y}), \quad \text{wobei} \quad \Delta F = 0 \quad (6.51)$$

im Gebiet  $V$ . Dies folgt wegen  $\Delta G = -\delta^3$  unmittelbar durch Anwenden des Laplace-Operators auf die Gleichung.

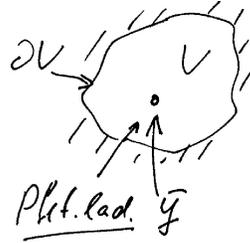


Abbildung 23: Gebiet mit Rand und Punktladung im Inneren.

Die i.A. schwierige Aufgabe des Auffindens von  $G$  ist also identisch mit der Aufgabe des Auffindens von  $F$ . Um  $F$  zu finden, mache man sich klar, dass es die sehr naheliegende Interpretation des Potential einer Ladungsverteilung außerhalb von  $V$  hat. Diese gedachte Ladungsverteilung besteht aus den sogenannten **Spiegelladungen**.

Betrachten wir dazu das einfache Beispiel, in dem  $V$  der Halbraum ist, welcher durch eine senkrecht durch den Ursprung gehende unendliche Ebene begrenzt wird (Abb. 24). Auf dieser Ebene sei  $\phi = 0$ . Letzteres kann man z.B. durch eine geerdete leitende Platte realisieren. In der Realität werden sich dann auf der Oberfläche dieser Platte Ladungen derart verteilen, dass ihr Potential gerade das von uns oben definierte  $F$  realisiert.

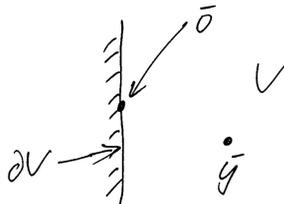


Abbildung 24: Halbraum  $V$  mit Ladung darin.

Die Spiegelladungsmethode besteht darin, dass man sich die leitende Platte (oder was immer sonst die geforderten Randbedingungen realisiert) wegdenkt und statt dessen nach einer möglichst einfachen *gedachten* Ladungsverteilung außerhalb von  $V$  sucht, welche auf  $\partial V$  und in  $V$  den gleichen Effekt verursacht.

In unserem Fall des Halbraums gibt es dazu eine offensichtliche Idee: Man platziert eine Punktladung der Stärke minus Eins bei  $\vec{y}'$ , wobei  $\vec{y}'$  aus  $\vec{y}$  durch Spiegelung an der Ebene hervorgeht (Abb. 25). Die Funktion  $F$  ist das Potential dieser (hier im wörtlichen Sinne) Spiegelladung und die Greensche Funktion ist

$$G_D(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} - \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}'|} \right), \quad \text{wobei} \quad \vec{y}' = \vec{y} - 2\vec{n}(\vec{y} \cdot \vec{n}) \quad (6.52)$$

und  $\vec{n}$  der Einheitsvektor orthogonal zur Platte ist.

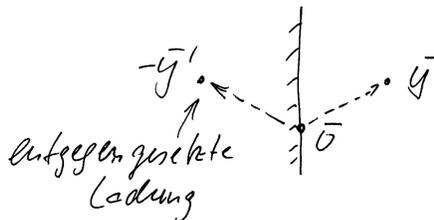


Abbildung 25: Spiegelladung für einen Punkt im Halbraum.

Ein vielleicht interessanteres Beispiel ist das der leitenden Kugel, vgl. Abb. 26. Physikalisch besteht das Problem darin, das Potential für eine Anordnung zu bestimmen, bei der eine geerdete leitende Kugel (o.B.d.A.) im Ursprung zentriert sei und sich im Außenraum bei  $\vec{y}$  eine Punktladung befindet. Mathematisch bestimmt man dabei die Greensche Funktion für Dirichlet-Randbedingungen, wobei das relevante Volumen  $V$  das Gebiet außerhalb der Kugel ist. Vielleicht überraschenderweise genügt eine einzige im Inneren der Kugel richtig platzierte Punktladung von passender Stärke, um das Potential auf der Oberfläche zum Verschwinden zu bringen und so die Greensche Funktion zu bestimmen.



Abbildung 26: Leitende Kugel mit Ladung bei  $\vec{y}$ . Gesucht sind Position  $\vec{y}'$  und Stärke der Spiegelladung.

Die zentrale zugrundeliegende Idee, um dies zu zeigen, besteht darin, zunächst die Inversion  $I$  an einer Sphäre vom Radius  $R$  zu definieren:

$$I : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d ; \quad \vec{x} \longrightarrow \frac{R^2}{|\vec{x}|^2} \vec{x} \equiv I(\vec{x}). \quad (6.53)$$

Man definiert weiterhin eine entsprechende Transformation auf dem Raum der Funktionen:

$$f \longrightarrow \tilde{f} \quad \text{mit} \quad \tilde{f}(\vec{x}) \equiv \left( \frac{R}{|\vec{x}|} \right)^{d-2} f(I(\vec{x})). \quad (6.54)$$

Man nennt diese die **Kelvin-Transformation**. Es lässt sich durch explizites Nachrechnen zeigen, dass die Kelvin-Transformation einer harmonischen Funktion  $f$  wieder harmonisch ist. Mit diesen Ideen sollte klar sein, wie und warum die Spiegelladungs-Methode bei der Kugel so einfach funktioniert: Das Potential der Ladung bei  $\vec{y}$  ist eine harmonische Funktion, außer bei

$\vec{x} = \vec{y}$ . Damit ist die Kelvin-Transformierte dieses Potentials wieder harmonisch, außer bei  $I(\vec{y})$ . Man überlegt sich leicht, dass dies nur das Potential einer weiteren Punktladung, und zwar bei  $\vec{x} = I(\vec{y})$ , sein kann. Die Größe dieser Spiegelladung kann man explizit bestimmen. Da Punkte und Funktionswerte auf der Sphärenoberfläche nicht transformieren, wird die Differenz der beiden Potential dort verschwinden. Damit hat man die Dirichlet-Randbedingungen realisiert. Wir überlassen die explizite Ausführung der eben skizzierten Analyse den Übungen.

Es sei noch angemerkt, dass eine analoge Analyse auch dann zum Ziel führt, wenn das relevante Volumen  $V$  nicht der Außenraum sondern der Innenraum einer Sphäre ist.

## 6.6 Taylor-Entwicklung in mehreren Variablen (M)

Im folgenden Kapitel werden wir eine Funktion, deren Argument ein Vektor ist, Taylor-entwickeln müssen. Die entsprechende Formel lässt sich leicht aus dem bekannten eindimensionalen Fall ableiten.

Sei dazu  $f$  eine Funktion auf  $\mathbb{R}^d$ , also  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ . Betrachten wir die gewohnte, eindimensionale Taylor-Entwicklung der Funktion  $f(t\vec{x})$ , wobei wir  $t \in \mathbb{R}$  als Argument betrachten. Wir entwickeln also in  $t$  um  $t = 0$ :

$$f(t\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n [(\partial_t)^n f(t\vec{x})]_{t=0} . \quad (6.55)$$

Nun wenden wir die Kettenregel an und finden

$$\partial_t f(t\vec{x}) = \frac{dy^i}{dt} \frac{\partial f}{\partial y^i}(\vec{y}) \quad \text{mit} \quad \vec{y} \equiv t\vec{x} . \quad (6.56)$$

Dies können wir auch als

$$\partial_t f(t\vec{x}) = \vec{x} \cdot \vec{\nabla}_y f(\vec{y}) \quad (6.57)$$

schreiben, was den Vorteil hat, dass weitere Ableitungen  $\partial/\partial y^i$  nicht auf den Vorfaktor  $\vec{x}$  wirken, welchen wir als von  $\vec{y}$  unabhängig ansehen. Dadurch kann der Operator  $(\partial_t)^n$  aus (6.55) durch eine entsprechende Potenz des Differentialoperators in (6.57) ersetzt werden. Es folgt

$$f(t\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n \left[ (\vec{x} \cdot \vec{\nabla}_y)^n f(\vec{y}) \right]_{\vec{y}=0} . \quad (6.58)$$

Schließlich setzen wir  $t = 1$  und erhalten

$$f(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\vec{x} \cdot \vec{\nabla}_y)^n f(\vec{y}) \Big|_{\vec{y}=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{i_1} \dots x^{i_n} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} f(\vec{0}) . \quad (6.59)$$

Im letzten Ausdruck steht  $\partial_i$  für  $\partial/\partial y^i$  und die Ableitung muss natürlich berechnet werden *bevor* das Argument  $\vec{y}$  von  $f$  zu Null gesetzt wird. Der Vorteil dieses letzten Ausdrucks ist, dass man eigentlich gar keine Dummy-Variable  $\vec{y}$  einzuführen braucht: Man bleibt einfach beim Argument  $\vec{x}$ , leitet  $n$  Mal ab, setzt das Argument zu Null, und multipliziert anschliessen mit Faktoren  $x^i$ , welche nun natürlich nicht Null sein sollen.

Eine analoge Rechnung mit  $\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0 + \vec{x}$  gibt

$$f(\vec{x}_0 + \vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{i_1} \cdots x^{i_n} \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_n} f(\vec{x}_0), \quad (6.60)$$

was eine äußerst nützliche Formel darstellt.

## 6.7 Multipol-Entwicklung: kartesisch

Es ist für die Praxis oft relevant, das Potential einer lokalisierten Ladungsverteilung (siehe Abb. 27) angenähert zu beschreiben, wenn man sich in großer Distanz zu dieser Verteilung befindet. Groß bedeutet hierbei groß im Vergleich zur typischen Längenskala  $R$ , auf der die Ladungsverteilung lokalisiert ist. Eine ähnliche Situation ergibt sich, wenn man sich die Ladungsverteilung sehr eng lokalisiert denkt gegen den Abstand, in dem man sich befindet. Dies entspricht dem Grenzwert  $R \rightarrow 0$ .

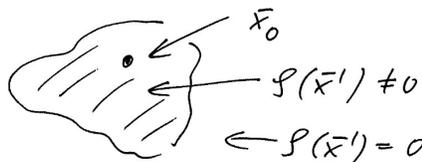


Abbildung 27: Skizze einer lokalisierten Ladungsverteilung. Der schraffierte Bereich soll einen endlichen Radius  $R$  haben, so dass  $\rho$  garantiert verschwindet, wenn  $|\vec{x} - \vec{x}_0| > R$ .

Erinnern wir uns zunächst an die allgemeine Formel für das Potential:

$$\phi(\vec{x}) = \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} = \int d^3y \frac{\rho(\vec{x}_0 + \vec{y})}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}_0 - \vec{y}|}. \quad (6.61)$$

Im zweiten Ausdruck haben wir eine Integrationsvariable  $\vec{y}$  so definiert, dass nur begrenzte oder sogar nur sehr kleine  $\vec{y}$  zum Integral beitragen. Es macht also Sinn, eine Taylor-Entwicklung der Greenschen Funktion in  $\vec{y}$  zu betrachten:

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0 - \vec{y}|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\vec{y} \cdot \vec{\nabla}_z)^n \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0 - \vec{z}|} \Big|_{\vec{z}=0}. \quad (6.62)$$

Hier haben wir exakt (6.59) benutzt, nur dass das dortige  $\vec{x}$  hier zu  $\vec{y}$  geworden ist und wir deshalb nun  $\vec{z}$  als Dummy-Variable einführen mußten.

Weil ganz allgemein

$$\frac{\partial}{\partial z^i} f(\vec{x} - \vec{z}) = -\frac{\partial}{\partial x^i} f(\vec{x} - \vec{z}) \quad (6.63)$$

gilt, können wir auch

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0 - \vec{y}|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-\vec{y} \cdot \vec{\nabla}_x)^n \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0 - \vec{z}|} \Big|_{\vec{z}=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-\vec{y} \cdot \vec{\nabla}_x)^n \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} \quad (6.64)$$

schreiben. Den dabei auftretenden Operator mit dem Gradienten schreibt man am besten als

$$\left(\vec{y} \cdot \vec{\nabla}_x\right)^n \equiv y^{i_1} \cdots y^{i_n} \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_n} \quad \text{wobei} \quad \partial_{i_1} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \quad \text{etc.} \quad (6.65)$$

Einsetzen in (6.61) liefert

$$\phi(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4\pi n!} \left[ \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_n} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} \right] \cdot \int d^3y y^{i_1} \cdots y^{i_n} \rho(\vec{x}_0 + \vec{y}). \quad (6.66)$$

Dies wird gewöhnlich noch umgeschrieben als

$$\phi(\vec{x}) = \sum_n \frac{(-1)^n}{4\pi n! N_n} \left[ \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_n} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} \right] \cdot q^{i_1 \cdots i_n}, \quad (6.67)$$

mit den von  $\vec{x}$  unabhängigen Tensoren

$$q^{i_1 \cdots i_n} \equiv N_n \int d^3y y^{i_1} \cdots y^{i_n} \rho(\vec{x}_0 + \vec{y}). \quad (6.68)$$

Hierbei sind die  $N_n$  Normierungskonstanten, mit

$$N_0 \equiv N_1 \equiv 1, \quad N_2 \equiv 3, \quad \text{und} \quad N_n (n > 2) \text{ konventionsabhängig.} \quad (6.69)$$

Die etwas ad hoc anmutende Wahl  $N_2 = 3$  und damit die ganze Existenz von  $N_n$  hängt an der historischen Definition des Quadrupolmoments. Die bisher definierten  $q^{i_1 \cdots i_n}$  werden in wenigen Zeilen zur Definition der Multipolmomente führen. Die darin enthaltenen  $y$ -Integrale von  $\rho$  kodieren alle in der jeweiligen Ordnung der Taylor-Entwicklung relevanten Informationen über die Ladungsverteilung  $\rho$ .

Die in (6.67) vorkommenden Ableitungen der Greenschen Funktion sind prinzipiell leicht zu berechnen. Zum Beispiel findet man sofort

$$n = 0: \quad \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} \equiv \frac{1}{r}, \quad n = 1: \quad \partial_i \frac{1}{r} = -\frac{(\vec{x} - \vec{x}_0)_i}{|\vec{x} - \vec{x}_0|^3} = -\frac{r_i}{r^3}. \quad (6.70)$$

Die kleine Rechnung für  $n = 3$  überlassen wir dem Leser. Das Resultat ist

$$n = 2: \quad \partial_i \partial_j \frac{1}{r} = \frac{3r_i r_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5}. \quad (6.71)$$

Jetzt wenden wir uns wieder den Tensoren  $n$ -ter Stufe  $q^{i_1 \cdots i_n}$  zu. Diese sind Elemente des **symmetrischen** Unterraums (bezeichnet mit dem Index  $S$ ) des  $n$ -fachen Tensorproduktes des Vektorraumes  $V \equiv \mathbb{R}^3$  mit sich selbst:

$$\{q^{i_1 \cdots i_n}\} \in (V \otimes \cdots \otimes V)_S \subset V \otimes \cdots \otimes V \equiv V^{\otimes n}. \quad (6.72)$$

Man bezeichnet Tensoren  $t$ , die bei Kontraktion zweier beliebiger Indizes verschwinden,

$$\delta_{jk} t^{i_1 \cdots j \cdots k \cdots i_n} = 0, \quad (6.73)$$

als **spurfrei**. Nur die Projektion unserer  $q'^{i_1 \dots i_n}$  auf den sogenannten **spurfreien** Unterraum von  $(V^{\otimes n})_S$  ist für die Berechnung von  $\phi$  relevant. Das folgt daraus, dass wir die  $q'^{i_1 \dots i_n}$  mit einem Tensor kontrahieren müssen, der selbst spurfrei ist:

$$\delta^{i_1 i_2} (\partial_{i_1} \dots \partial_{i_n}) \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} = 0. \quad (6.74)$$

Dies folgt wiederum aus der Relation

$$\Delta_x \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} = 0 \quad \text{für} \quad \vec{x} \neq \vec{x}_0. \quad (6.75)$$

Wir könnten in (6.74) offensichtlich auch ein beliebiges anderes Indexpaar nehmen und kontrahieren.

Also können wir  $q'^{i_1 \dots i_n}$  durch seine Projektion auf den spurfreien Unterraum ersetzen. Letztere bezeichnen wir mit  $q^{i_1 \dots i_n}$  und finden

$$q \equiv q', \quad q^i \equiv q'^i \quad (6.76)$$

$$q^{ij} \equiv q'^{ij} - \frac{1}{3} \delta^{ij} q'^{kk} \quad (6.77)$$

$$q^{ijk} = q'^{ijk} - \frac{1}{5} (\delta^{ij} q'^{kll} + \delta^{ik} q'^{jll} + \delta^{jk} q'^{ill}). \quad (6.78)$$

In den letzten beiden Formeln wird über jeweils  $k$  und  $l$  summiert, obwohl der Index zweimal oben steht (weil die Metrik hier die Einheitsmatrix ist). Die allgemeine Formel für die spurfreie Projektion,

$$q^{i_1 \dots i_n} = q'^{i_1 \dots i_n} - \dots \quad (6.79)$$

ist kompliziert und kann vom Leser in [5] nachgeschlagen werden.

Unsere Ausdruck für  $\phi$  ändert sich durch den Übergang von den  $q'^{i_1 \dots i_n}$  zu den  $q^{i_1 \dots i_n}$  nicht. Die  $q^{i_1 \dots i_n}$  sind total symmetrisch und spurfrei, also

$$\{q^{i_1 \dots i_n}\} \in (V^{\otimes n})_{S,SF} \subset (V^{\otimes n})_S \subset V^{\otimes n}. \quad (6.80)$$

Hier steht der Index 'SF' für 'spurfreie Projektion'. Man kann sich überlegen (siehe Übungen), dass  $\dim (V^{\otimes n})_{S,SF} = 2n + 1$ ,  $\dim (V^{\otimes n})_S = [(n + 1)(n + 2)]/2$ ,  $\dim(V^{\otimes n}) = 3^n$ .

Unsere finale Multipol-Entwicklungs-Formel lautet nun

$$\phi(\vec{x}) = \sum_n \frac{(-1)^n}{4\pi n! N_n} \left( \partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} \right) q^{i_1 \dots i_n}, \quad (6.81)$$

mit den Multipol-Momenten

$$q = \int d^3y \rho(\vec{x}_0 + \vec{y}) \quad (6.82)$$

$$q^i \equiv p^i = \int d^3y y^i \rho(\vec{x}_0 + \vec{y}) \quad (6.83)$$

$$q^{ij} = \int d^3y (3y^i y^j - \vec{y}^2 \delta^{ij}) \rho(\vec{x}_0 + \vec{y}) \quad \text{usw.} \quad (6.84)$$

Wir haben notiert, dass speziell für das Dipolmoment oft das Formelzeichen  $\vec{p}$  benutzt wird. Beim Quadrupolmoment sieht man explizit den konventionell eingeführten Faktor  $N_2 = 3$ . Der vom Ausdruck  $3y^i y^j$  abgezogene Term  $\vec{y}^2 \delta^{ij}$  entspricht der Projektion auf den spurfreien Teil.

Die explizite Entwicklung von  $\phi$  bis zum Quadrupol lautet

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{q}{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3r_i r_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5} \cdot q^{ij} + \dots \right), \quad \text{wobei} \quad \vec{r} \equiv \vec{x} - \vec{x}_0. \quad (6.85)$$

Der zweite Term ist das sogenannte **Dipol-Potential**. Das entsprechende Dipol-Feld folgt nach Anwendung von  $\vec{\nabla}$ .

## 7 Vollständige Funktionensysteme und die sphärische Multipolentwicklung

### 7.1 Fourier-Reihe

Es ist oft nützlich, Funktionen als Elemente eines (unendlich-dimensionalen) Vektorraumes  $V$  (über  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ ) zu sehen:  $f \in V$ . Besonders einfach ist dies, wenn der Raum, auf dem die Funktionen definiert sind, kompakt ist. Wir betonen, dass dieser Definitionsraum i.A. kein Vektorraum ist.

Der vielleicht einfachste Fall ist der von Funktionen auf dem Kreis:

$$f: S^1 \longrightarrow \mathbb{C}; \quad x \longmapsto f(x), \quad (7.1)$$

wobei  $x \in [-L/2, L/2]$  unseren Kreis bzw. die  $S^1$  parametrisiert. Eine vollkommen äquivalente Sichtweise besteht darin,  $f$  als periodische Funktion auf  $\mathbb{R}$  aufzufassen:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad f(x+L) = f(x). \quad (7.2)$$

Sei also  $V$  der Vektorraum der Funktionen auf  $S^1$ .  $V$  hat ein natürliches Skalarprodukt:

$$(f, g) \equiv \int_{-L/2}^{L/2} dx f^*(x)g(x). \quad (7.3)$$

Es gibt viele mögliche Basen (man spricht auch von vollständigen Funktionensystemen) auf  $V$ . Man wählt oft orthogonale oder sogar orthonormale Basen. Es ist oft praktisch, mit einer Basis zu arbeiten, in der eine bestimmte wichtige Matrix (ein Operator) diagonal ist. Sie haben dieses Vorgehen in der Mechanik im Fall des Trägheitstensors kennengelernt.

Im Fall von Funktionenräumen sind die entsprechenden Objekte keine Matrizen, aber es sind immer noch Operatoren, also lineare Abbildungen  $V \longrightarrow V$ . Für uns oft wichtig ist der Laplace-Operator  $\Delta = \sum_i \partial_i^2$ . Für die  $S^1$  ist  $\Delta = \partial_x^2$ . Die zugehörigen Eigenfunktionen sind

$$e^{ikx}. \quad (7.4)$$

Die entscheidende Periodizitätseigenschaft schränkt die zulässigen  $k$  ein:

$$e^{ikx} = e^{ik(x+L)} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2\pi n}{L}; \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (7.5)$$

Eine orthonormale Basis ist durch

$$\left\{ e^{ik_n x} / \sqrt{L}; \quad n \in \mathbb{Z} \right\} \quad (7.6)$$

gegeben. Man prüft die Orthonormalität leicht nach:

$$\int_{-L/2}^{L/2} dx \frac{e^{-ik_n x}}{\sqrt{L}} \frac{e^{ik_m x}}{\sqrt{L}} = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx e^{-i(k_n - k_m)x} = \delta_{nm}. \quad (7.7)$$

Als fortgeschrittenen Kommentar bemerken wir, dass die Orthogonalität hier eigentlich automatisch folgt, weil  $\Delta$  ein hermitescher bzw. symmetrischer Operator ist - das Analogon zu einer symmetrischen oder hermiteschen Matrix. Für letztere wissen Sie aus der linearen Algebra, dass die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten immer orthogonal sind.

Wir können jede Funktion in die obige Basis zerlegen:

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \cdot e^{ik_n x} / \sqrt{L}. \quad (7.8)$$

Dies bezeichnet man als **Fourier-Reihe**. Die Koeffizienten ergeben sich durch Projektion des Vektors, also in unserem Fall der Funktion  $f$ , auf die entsprechenden Basisvektoren:

$$f_n = \left( e^{ik_n x} / \sqrt{L}, f \right) = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L/2}^{L/2} dx e^{-ik_n x} f(x). \quad (7.9)$$

Da

$$e^{ik_n x} = \cos(k_n x) + i \sin(k_n x) \quad (7.10)$$

gilt, findet man sofort eine alternative, rein reelle Basis:

$$\left\{ e^{ik_n x} / \sqrt{L}, n \in \mathbb{Z} \right\} \quad \longrightarrow \quad \{1; \cos(k_n x); \sin(k_n x); n \in \mathbb{N}\}. \quad (7.11)$$

Diese Basis ist immer noch orthogonal. Wir überlassen es dem Leser, sie zu normieren.

Durch eine Linearkombination dieser Basis mit reellen Koeffizienten kann man reelle Funktionen bequem als

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(k_n x) + \sum_{n=1}^{\infty} s_n \sin(k_n x) \quad (7.12)$$

schreiben. Bitte bestimmen Sie selbst die Formeln für  $c_n, s_n$ , indem Sie beide Seiten der obigen Gleichung mit  $\cos / \sin$  multiplizieren und integrieren.

Oft ist es auch nützlich, Fourier-Reihen für Funktionen mit bestimmten Randbedingungen auf Intervallen zu benutzen, z.B.

$$f(x); \quad x \in [0, L/2]; \quad f(0) = f(L/2) = 0 \quad \text{oder} \quad f'(0) = f'(L/2) = 0 \quad \text{etc.} \quad (7.13)$$

Finden Sie selbst die relevanten Basen.

## 7.2 Fourier-Transformation

Um den Raum der Funktionen auf ganz  $\mathbb{R}$  zu beschreiben, betrachten wir den Limes  $L \rightarrow \infty$  der obigen  $S^1$ -Analyse. Dazu schreiben wir

$$f(x) = \sum_{k_n} f_n e^{ik_n x} / \sqrt{L} = \sum_{k_n} \frac{2\pi}{L} \frac{1}{2\pi} f_n \sqrt{L} e^{ik_n x} = \sum_{k_n} \Delta k_n \frac{1}{2\pi} \tilde{f}(k_n) e^{ik_n x} \quad (7.14)$$

wobei

$$2\pi/L \equiv \Delta k_n \quad \text{und} \quad \tilde{f}(k_n) \equiv f_n \sqrt{L}. \quad (7.15)$$

Diese Notation ist so gewählt, dass man ohne Weiteres den Übergang von der Summe über die  $k_n$  zum Integral über eine kontinuierliche Variable  $k$  ablesen kann:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \tilde{f}(k). \quad (7.16)$$

Vor dem Limes gilt nach unseren bisherigen Überlegungen außerdem

$$f_n = \int_{-L/2}^{L/2} dx e^{-ik_n x} / \sqrt{L} f(x). \quad (7.17)$$

Im Limes wird daraus die **Fourier-Transformation**

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x). \quad (7.18)$$

Vor dem Limes gilt die Orthogonalitäts-Relation

$$(e^{ik_n x}, e^{ik_m x}) = L \delta_{mn} \quad (7.19)$$

Im Limes ist das vollständige Funktionensystem kontinuierlich und wird ohne "L" definiert. Um dies besser zu verstehen, haben wir (7.19) in Abb. 28 illustriert. Wir erwarten, dass hier im Limes so etwas, wie eine  $\delta$ -Funktion entsteht. Das kann man in der Tat zeigen:

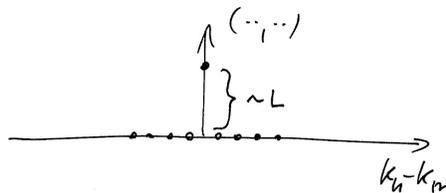


Abbildung 28: Illustration der Abhängigkeit des Skalarprodukts in (28) von  $k_n - k_m$ .

Ein einfacher Weg, die relevante Formel zu gewinnen, besteht darin, direkt mit der  $\delta$ -Funktion zu starten und die Fourier-Transformation anzuwenden:

$$f(x) \equiv \delta(x - y) \quad \longrightarrow \quad \tilde{f}(k) = \int dx e^{-ikx} \delta(x - y) = e^{-iky}. \quad (7.20)$$

Da uns die Umkehrtransformation, vgl. (7.16), zu  $f(x)$  zurückbringen muss, gilt

$$\delta(x - y) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} e^{-iky} \quad (7.21)$$

bzw.

$$\int dk e^{ik(x-y)} = 2\pi\delta(x - y). \quad (7.22)$$

Also gilt auch

$$(e^{ikx}, e^{ik'x}) = \int dx e^{i(k'-k)x} = 2\pi\delta(k - k') \quad (7.23)$$

Man sagt auch, dass diese Basis  $\delta$ -**Funktions-normiert** ist.

Das Ganze geht völlig analog in  $d$  Dimensionen:

$$\tilde{f}(\vec{k}) = \int d^d x e^{-i\vec{k}\vec{x}} f(\vec{x}), \quad f(\vec{x}) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\vec{k}\vec{x}} \tilde{f}(k). \quad (7.24)$$

Zur expliziten Herleitung kann man von der Fourier-Reihe auf dem Raum  $(S^1)^d$  ausgehen, mit der Basis:

$$e^{i\vec{k}\vec{n}\vec{x}} / L^{d/2} \quad \text{und} \quad k^i = \frac{2\pi n^i}{L}, \quad \vec{n} \in \mathbb{Z}^d, \quad i \in \{1, \dots, d\}. \quad (7.25)$$

Dann wiederholt man die obige Analyse.

### 7.3 Greensche Funktion im Fourier-Raum

Die Greensche Funktion im  $\mathbb{R}^d$  ist durch die Gleichung

$$\Delta G(\vec{x} - \vec{y}) = -\delta^d(\vec{x} - \vec{y}) \quad (7.26)$$

oder, einfacher, durch

$$\Delta G(\vec{x}) = -\delta^d(\vec{x}) \quad (7.27)$$

definiert. Wir ersetzen  $G$  und die  $\delta$ -Funktion jeweils durch Ihre Fourier-Transformierten, im letzteren Fall die Eins, und finden

$$\Delta \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\vec{k}\vec{x}} \tilde{G}(\vec{k}) = - \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\vec{k}\vec{x}} \cdot 1. \quad (7.28)$$

Jetzt vertauschen wir links die Reihenfolge von Integration und Differentiation und lassen anschließend auf beiden Seiten die Integration weg. Dieser letzte Schritt ist erlaubt, weil  $e^{i\vec{k}\vec{x}}$  eine Basis im Raum der Funktionen darstellt und die Koeffizienten bzgl. einer Basis eindeutig sind. Es folgt

$$-\vec{k}^2 \tilde{G}(\vec{k}) = -1 \quad \text{bzw.} \quad \tilde{G}(\vec{k}) = \frac{1}{\vec{k}^2}. \quad (7.29)$$

Grob gesagt entspricht der Laplace-Operator im Fourier-Raum der Multiplikation mit  $-\vec{k}^2$  und die Greensche Funktion ist minus das Inverse dazu, also  $1/\vec{k}^2$ . Die Greensche Funktion im eigentlichen Raum ist also

$$G(\vec{x}) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\vec{k}\vec{x}} \frac{1}{\vec{k}^2}. \quad (7.30)$$

Diese Integral hängt wegen der  $O(d)$ -Symmetrie nur von  $|\vec{x}|$  ab. Eine Reskalierung der Integrations-Variablen,

$$\vec{k} \longrightarrow \frac{\vec{k}}{|\vec{x}|}, \quad (7.31)$$

liefert

$$G(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}|^{d-2}} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\vec{k}\hat{e}} \frac{1}{k^2}, \quad (7.32)$$

wobei  $\hat{e}$  ein Einheitsvektor ist. Wir reproduzieren also die uns schon bekannte Abhängigkeit von  $\vec{x}$ . Man könnte durch genaue Analyse dieses formal sehr divergenten Integrals den konstanten Faktor bestimmen, aber wir wollen dies nicht tun. Wir kennen die Normierung durch den Gaußschen Satz.

## 7.4 Fourier-Reihe und Polarkoordinaten

Betrachten wir ein E-Dynamik-Problem mit Translationssymmetrie in  $z$ -Richtung oder schlicht die Poisson-Gleichung in  $d = 2$ :

$$\Delta\phi(\vec{x}) = -\rho(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^2. \quad (7.33)$$

Dabei ist

$$\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 = \frac{1}{r}\partial_r r \partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2. \quad (7.34)$$

Wir überlassen das Prüfen der letzten Gleichheit dem Leser bzw. den Übungen.

Es ist sinnvoll, sich hier die Ebene als Produkt von  $\mathbb{R}^+$  und der  $S^1$  zu denken. Der Laplace-Operator auf der  $S^1$  ist  $\Delta_\varphi \equiv \partial_\varphi^2$ , so dass

$$\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 = \frac{1}{r}\partial_r r \partial_r + \frac{1}{r^2}\Delta_\varphi. \quad (7.35)$$

Wir schreiben  $\phi = \phi(r, \varphi)$ , wobei  $\varphi \in S^1$  bzw.  $\varphi \in [0, 2\pi)$ . Durch unser Studium der Fourier-Reihe wissen wir, dass

$$\phi(r, \varphi) = \sum_n \phi_n(r) e^{in\varphi} / \sqrt{2\pi}. \quad (7.36)$$

Wir haben benutzt, dass im vorliegende Fall  $L = 2\pi$  gilt.

Mit einem analogen Ansatz für  $\rho$  haben wir

$$\Delta \sum_n \phi_n(r) e^{in\varphi} = - \sum_n \rho_n(r) e^{in\varphi} \quad (7.37)$$

bzw.

$$\left( \frac{1}{r}\partial_r r \partial_r - \frac{n^2}{r^2} \right) \phi_n(r) = -\rho_n(r). \quad (7.38)$$

Hier haben wir  $\Delta_\varphi \exp(in\varphi) = -n^2 \exp(in\varphi)$  benutzt.

Die entscheidene Lehre, die wir daraus ziehen, ist folgende: Aufgrund der Verwendung des vollständigen Funktionensystems  $e^{in\varphi}$  auf der  $S^1$  hat sich das Problem zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung für jedes  $n$  vereinfacht. Wir wollen dies hier nicht weiter verfolgen sondern gehen gleich zum analogen und praktisch wichtigeren  $3d$ -Fall über.

## 7.5 Kugelflächenfunktionen (KFF)

Wir haben eben gelernt und ausgenutzt, dass  $e^{im\varphi}$  ein vollständiges Funktionensystem auf  $S^1$  ist, welches den Operator  $\Delta_\varphi = \partial_\varphi^2$  diagonal macht. Auf der  $S^2$  gibt es ein entsprechendes Funktionensystem (die "KFF"), welches sich aus Physiker-Sicht besonders einfach mit den Methoden der Quantenmechanik gewinnen lässt. Wir verweisen deshalb für die Ableitung auf das kommende Semester (siehe auch Jackson, oder mein QM-Skript, oder viele andere Skripte und QM/EM-Bücher). Wir wissen jetzt genug über vollständige Funktionensysteme, um die KFF auch ohne Ableitung gewinnbringend zu benutzen.

Zunächst erinnern wir an die Kugelkoordinaten (vgl. Abb. 29):

$$x = r \sin \theta \cos \varphi; \quad y = r \sin \theta \sin \varphi; \quad z = r \cos \theta. \quad (7.39)$$

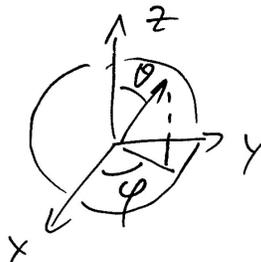


Abbildung 29: Illustration zur Definition der Kugelkoordinaten.

Der Laplace-Operator nimmt in Kugelkoordinaten die Form

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \partial_r + \frac{1}{r^2} \Delta_{\varphi, \theta} \quad (7.40)$$

an, wobei

$$\Delta_{\theta, \varphi} = \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta) \partial_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 \quad (7.41)$$

den Laplace-Operator auf der Sphäre beschreibt. Die Eigenfunktionen zu letzterem, also die **KFF**, sind in vielen Büchern, z.B. in [6], diskutiert. Man bezeichnet sie als

$$Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad \text{wobei } l = 0, 1, 2, \dots \quad \text{und für jedes } l: \quad m = -l, -l + 1, \dots, l - 1, l. \quad (7.42)$$

Sie sind explizit gegeben durch

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) \equiv \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (7.43)$$

wobei die **zugeordnete Legendre-Polynome**

$$P_l^m(z) \equiv (-1)^m (1-z^2)^{m/2} \partial_z^m P_l(z) \quad (m \geq 0) \quad (7.44)$$

benutzt werden. Für negatives  $m$  sind diese durch

$$P_l^{-m}(z) \equiv (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(z) \quad (7.45)$$

definiert. Diese Formeln benutzen wiederum die **Legendre-Polynome**

$$P_l(z) = \frac{1}{2^l l!} \partial_z^l (z^2 - 1)^l. \quad (7.46)$$

Letztere stellen ein Orthogonalsystem für Funktionen von  $z \in [-1, +1]$  dar. Wir verweisen erneut auf die schöne Zusammenfassung in [6].

Orthonormalität gilt bezüglich der Integration über die Sphäre, mit Flächenelement  $d\Omega = d\varphi d(\cos \theta)$ :

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d(\cos \theta) Y_{l'm'}^*(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (7.47)$$

Die Eigenwerte des Laplace-Operators sind gegeben durch

$$\Delta_{\theta, \varphi} Y_{l,m} = -l(l+1) Y_{l,m}. \quad (7.48)$$

## 7.6 Poisson-Gleichung in Kugelkoordinaten und sphärische Multipolentwicklung

Die Poisson-Gleichung  $\Delta\phi = -\rho$  nimmt in Kugelkoordinaten die Form

$$\left( \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \partial_r + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta, \varphi} \right) \phi = -\rho \quad (7.49)$$

an. Wir können die Winkelabhängigkeit von  $\phi, \rho$  durch KFFs beschreiben:

$$\phi = \sum_{l,m} \phi_{lm}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad \rho = \sum_{l,m} \rho_{lm}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (7.50)$$

wodurch die Poisson-Gleichung zu

$$\sum_{lm} \left( \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \partial_r - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \phi_{lm} Y_{lm} = - \sum_{lm} \rho_{lm} Y_{lm} \quad (7.51)$$

wird. Da die KFFs eine Basis bilden, gilt damit für jedes Indexpaar  $l, m$

$$\left( \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \partial_r - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \phi_{lm} = -\rho_{lm}. \quad (7.52)$$

Da es uns um eine alternative Form der Multipolentwicklung gehen soll, wollen wir annehmen, dass unsere Ladungsverteilung in der Nähe des Ursprungs lokalisiert ist. Es sei also z.B.  $\rho = 0$  für  $r > r_{\max}$ . Dann gilt für solche großen Radien

$$(\partial_r r^2 \partial_r - l(l+1)) \phi_{lm} = 0. \quad (7.53)$$

Wir machen den Ansatz  $\phi_{lm} \sim r^k$  und finden

$$k(k+1) - l(l+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad k = l \quad \text{oder} \quad k = -(l+1). \quad (7.54)$$

Die erste dieser beiden Lösungen können wir wegen ihrer Divergenz bei  $r \rightarrow \infty$  als unphysikalisch ausschließen. Zusammenfassend haben wir also bisher gefunden, dass unsere gesuchten Funktionen  $\phi_{lm}$  die Gleichungen

$$\left( \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \partial_r - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \phi_{lm} = -\rho_{lm} \quad (7.55)$$

erfüllen und bei  $r > r_{\max}$  explizit durch

$$\phi_{lm} = C_{lm}/r^{l+1} \quad (7.56)$$

gegeben sind. Wir wollen nun die  $C_{lm}$  bestimmen.

Die entscheidende Idee besteht nun darin, die Gleichung (7.55) in solch einer Weise über  $r$  zu integrieren, dass die linke Seite  $C_{lm}$  liefert. Dies wird funktionieren, wenn wir vor der Integration noch mit  $r^{l+2}$  multiplizieren. Wir finden so die Beziehung

$$\int dr r^l (\partial_r r^2 \partial_r - l(l+1)) \phi_{lm} = - \int dr r^{l+2} \rho_{lm}. \quad (7.57)$$

Partielle Integration des ersten Terms auf der linken Seite liefert

$$r^{l+2} \partial_r \phi_{lm} \Big|_0^\infty - \int dr [l r^{l-1} r^2 \partial_r + l(l+1) r^l] \phi_{lm} = - \int dr r^{l+2} \rho_{lm}. \quad (7.58)$$

Nochmalige partielle Integration, angewandt auf des ersten Term unter dem links verbleibenden Integral, gibt schließlich

$$(r^{l+2} \partial_r - l r^{l+1}) \phi_{lm} \Big|_0^\infty + \int dr [l(l+1) - l(l+1)] r^l \phi_{lm} = - \int dr r^{l+2} \rho_{lm}. \quad (7.59)$$

Entscheidend ist zunächst, dass das Integral links wegfällt. Außerdem wird bei hinreichend glattem  $\rho$  das Potential und damit der Koeffizient  $\phi_{lm}$  für  $r \rightarrow 0$  nicht stark genug divergieren, um die  $(r^{l+1})$ -Unterdrückung zu überwinden. Also wird der  $r = 0$  Randterm links verschwinden. Es bleibt also nur der  $r = \infty$  Randterm, für dessen Auswertung wir die Relation  $\phi_{lm} = C_{lm}/r^{l+1}$  nutzen können. Es folgt

$$-(2l+1)C_{lm} = - \int dr r^{l+2} \rho_{lm}. \quad (7.60)$$

Wir können nun  $\rho_{ml}$  aus  $\rho$  gewinnen, indem wir auf den Basisvektor  $Y_{lm}$  projizieren. Da wir es bei den KFF mit der Basis eines komplexen Vektorraums zu tun haben (vgl. (7.47)), müssen wir dabei die zu  $Y_{lm}$  komplex-konjugierte Funktion benutzen. Es gilt demnach

$$C_{lm} = \frac{1}{2l+1} \int dr r^{l+2} \int d\Omega Y_{lm}^*(\Omega) \rho(r, \Omega). \quad (7.61)$$

Wir benutzen hier auch die übliche Abkürzung  $\Omega = (\theta, \varphi)$  für die Position auf der Einheitssphäre und das Integrationsmaß  $d\Omega = d\varphi d(\cos \theta)$ .

Schließlich nutzen wir noch die Beziehung  $d^3r = r^2 dr d\Omega$  und finden

$$C_{lm} = \frac{1}{2l+1} \int d^3r r^l \rho(\vec{r}) Y_{lm}^*(\Omega). \quad (7.62)$$

Es ist üblich, die **sphärischen Multipolmomente** als

$$q_{lm} \equiv \int d^3r r^l \rho(\vec{r}) Y_{lm}^*(\Omega) \quad (7.63)$$

zu definieren. Damit können wir zu unserem Ansatz (7.50) für  $\phi$  zurückkehren und bei großem  $r$  ( $r > r_{\max.}$ ) die Beziehung (7.56) nutzen. Wenn wir schließlich noch von  $C_{lm}$  zu  $q_{lm}$  übergehen, finden wir

$$\phi = \sum_{lm} \phi_{lm} Y_{lm} = \frac{q_{lm}}{(2l+1)r^{l+1}} Y_{lm}. \quad (7.64)$$

Zusammenfassend haben wir damit die **sphärische Multipolentwicklung**

$$\phi(r, \Omega) = \sum_{lm} \frac{Y_{lm}(\Omega)}{(2l+1)r^{l+1}} q_{lm} \quad (7.65)$$

mit den sphärischen Multipolmomenten

$$q_{lm} \equiv \int d^3r' r'^l Y_{lm}^*(\Omega') \rho(\vec{r}'). \quad (7.66)$$

Dies ist vollkommen analog zu unserer obigen kartesischen Formel (6.81) für den Fall  $\vec{x}_0 = 0$ . Man beachte die übereinstimmende Zahl der unabhängigen Koeffizienten in der Ordnung  $l$ :  $2l+1$ .

## 7.7 Greensche Funktion in Kugelkoordinaten und sphärische Multipolentwicklung

Es gibt einen eleganteren Weg zu den letzten, entscheidenden Formeln, welcher allerdings mehr mathematisches Vorwissen erfordert. Dazu beginnen wir nochmal mit der allgemeinen Formel für  $\phi$ ,

$$\phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (7.67)$$

und schreiben die darin vorkommende Greensche Funktion wie folgt um (siehe Fig. 30):

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \alpha}} = \frac{1}{r\sqrt{1 + (r'/r)^2 - 2(r'/r) \cos \alpha}}. \quad (7.68)$$

Jetzt implementieren wir eine Taylor-Entwicklung in  $(r'/r)$ ,

$$\frac{1}{r\sqrt{1 + (r'/r)^2 - 2(r'/r) \cos \alpha}} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \alpha) \left(\frac{r'}{r}\right)^l. \quad (7.69)$$

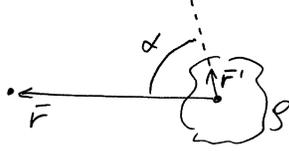


Abbildung 30: Illustration zur Darstellung der Greenschen Funktion in (7.68).

Es ist hierbei ein nicht offensichtlicher aber prinzipiell leicht nachzurechnender Fakt, dass sich die mit  $r^l$  einhergehenden verschiedenen Potenzen von  $\cos \alpha$  gerade zum Legendre-Polynom  $P_l$  kombinieren.

Die entscheidende, nichttriviale Aussage, die wir nun benutzen wollen, lautet

$$P_l(\cos \alpha) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (7.70)$$

Hierbei ist  $\alpha$  der Winkel zwischen den Richtungen  $(\theta', \varphi')$  und  $(\theta, \varphi)$ . Diese Gleichheit ist auch als **Additionstheorem für KFF** bekannt.

Nun setzen wir (7.70) in (7.69) und dies wiederum in (7.67) ein. Führt man die  $d^3r'$ -Integration aus, so erkennt man sofort unser vorheriges Resultat für die sphärische Multipolentwicklung. Wir überlassen das dem Leser.

Abschließend bemerken wir noch, dass sich viel mehr interessantes Material zu Multipolentwicklung und KFFs z.B. in [3, 4, 6, 7] sowie auf Wikipedia findet. Besondere Beachtung verdient die sehr ausführliche und präzise Diskussion in [7].

## 8 Magnetostatik

### 8.1 Grundgleichungen, Poisson-Gleichung für Vektor-Potential

Wir erinnern zunächst an die Maxwell-Gleichungen,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (8.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\dot{\vec{B}}}{c} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\vec{j}}{c} + \frac{\dot{\vec{E}}}{c}, \quad (8.2)$$

aus denen wir die Elektrostatik im Limes  $c \rightarrow \infty$  gewonnen haben.

Wir können aber alternativ auch den kombinierten Grenzprozess  $c \rightarrow \infty$  und  $\vec{j} \rightarrow \infty$  betrachten, wobei  $\vec{j}/c$  endlich bleiben soll. Das ist physikalisch durchaus sinnvoll, da wir es bei makroskopischen Strömen tatsächlich mit sehr vielen Ladungen zu tun haben. Es folgt dann

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (8.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\vec{j}}{c}. \quad (8.4)$$

Wir haben hier links die beiden Grundgleichungen der Elektrostatik und rechts die der Magnetostatik, wobei wir uns zusätzlich noch auf zeitunabhängige Lösungen einschränken. Die Magnetostatik-Gleichungen müssen durch die technisch und physikalisch entscheidende Konsistenzbedingung

$$\vec{\nabla} \vec{j} = 0 \quad (8.5)$$

ergänzt werden.

Wir bemerken noch, dass ein etwas anderer logischer Weg auch zur Magnetostatik führt: Man beruft sich einfach auf das Wort “Statik” und setzt somit in den Maxwell-Gleichungen  $\vec{E}, \vec{B} = 0$ . Es folgen die Gleichungen der Elektro- und Magnetostatik.

Wir wissen noch, dass immer  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  gilt. Damit ist die Gleichung  $\vec{\nabla} \vec{B} = 0$  schon gelöst. Hinzu kommt dann noch die Gleichung

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{j}/c, \quad (8.6)$$

woraus mit der Konvention  $c = 1$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \vec{j} \quad (8.7)$$

folgt.

Wir erinnern uns, dass  $\vec{A}$  nur bis auf Eichtransformation definiert ist. Mit anderen Worten, die Transformation

$$\vec{A} \longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi \quad (8.8)$$

ändert nichts an der Physik. Eine für uns bequeme Eichung, genauer gesagt eine Wahl der Eichung, besteht darin,

$$\vec{\nabla} \vec{A}' = 0 \quad (8.9)$$

zu fordern. Man nennt dies die **Coulomb-Eichung**.

Diese Wahl ist immer möglich, da

$$0 = \vec{\nabla} \vec{A}' = \vec{\nabla} \vec{A} + \Delta \chi \quad (8.10)$$

äquivalent ist zu

$$\Delta \chi = -\vec{\nabla} \vec{A}. \quad (8.11)$$

Diese Gleichung ist immer lösbar, weil sie von der gleichen mathematischen Form wie  $\Delta \phi = -\rho$  ist. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung im  $\mathbb{R}^3$  haben wir weiter oben gefunden.

Nach Umbenennung  $A' \rightarrow A$  haben wir also letztendlich nur die folgende **vektorielle Form der Poisson-Gleichung** zu lösen:

$$\Delta \vec{A} = -\vec{j}. \quad (8.12)$$

Dies geschieht mit der aus der Elektrostatik bekannten Greenschen Funktion: Falls  $\vec{j}$  im Unendlichen schnell genug abfällt, so ist

$$\vec{A}(\vec{x}) = \int \frac{d^3 y}{4\pi} \frac{\vec{j}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}. \quad (8.13)$$

Man prüft leicht nach, dass das so definierte Vektorpotential (8.12) löst.

Die Rotation von (8.13) lautet

$$\vec{B}(\vec{x}) = \int \frac{d^3y}{4\pi} \vec{\nabla}_x \times \frac{\vec{j}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} = - \int \frac{d^3y}{4\pi} \frac{(\vec{x} - \vec{y}) \times \vec{j}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|^3}. \quad (8.14)$$

Dies ist das **verallgemeinertes Biot-Savart-Gesetz**.

## 8.2 Helmholtz-Theorem (M)

Wir haben einige interessante Aussagen mit dem Gradienten-Operator kennengelernt:

- Jedes  $\vec{E}$  mit  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$  lässt sich als  $-\vec{\nabla}\phi$  schreiben.
- Jedes  $\vec{B}$  mit  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  lässt sich als  $\vec{\nabla} \times \vec{A}$  schreiben.
- In der Gleichung  $\vec{A}$  mit  $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$  kann man  $\vec{A}$  durch  $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$  ersetzen. Die Gleichung bleibt gültig, also  $\vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{B}$ , weil (offensichtlicherweise)  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\chi) = 0$ .

All diesen Aussagen liegt zu Grunde, dass Vektorfelder einen Anteil haben, der sich als Gradient auffassen lässt, und einen zweiten Anteil, der sich als Rotation auffassen lässt. In diesem Sinne kann man diese Aussagen als Spezialfälle des **Helmholtz-Theorems** auffassen, das in größerer Ausführlichkeit z.B. in [1] und auf Wikipedia diskutiert wird. Wir formulieren das Theorem wie folgt:

Gegeben das allgemeine Vektorfeld  $\vec{F}$ , definieren wir seine Divergenz

$$D = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \quad (8.15)$$

und seine Rotation

$$\vec{R} = \vec{\nabla} \times \vec{F}. \quad (8.16)$$

Es gilt

$$\vec{F} = \vec{\nabla} A + \vec{\nabla} \times \vec{B}, \quad (8.17)$$

wobei

$$A = - \int \frac{d^3y}{4\pi} \frac{D(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad \text{und} \quad \vec{B} = \int \frac{d^3y}{4\pi} \frac{\vec{R}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}. \quad (8.18)$$

In Worten kann man also formulieren: Jedes Vektorfeld (das im Unendlichen schnell genug abfällt) lässt sich eindeutig in einen divergenzfreien Teil (explizit gegeben durch  $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ ) und einen rotationsfreien Teil (explizit gegeben durch  $\vec{\nabla} A$ ) zerlegen.

Zur Begründung erinnern wir zunächst an die uns schon bekannte Tatsache, dass bei hinreichend schnellem Abfall

$$\Delta\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi = 0. \quad (8.19)$$

Das überträgt sich sofort auf Vektorfelder:

$$\Delta\vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = 0. \quad (8.20)$$

Wenn nun  $\vec{\nabla}(\vec{F} - \vec{F}') = 0$  und  $\vec{\nabla} \times (\vec{F} - \vec{F}') = 0$ , so folgt wegen der bekannten Beziehung "rot rot = grad div - Laplace",

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \dots = \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \dots - \Delta \dots, \quad (8.21)$$

dass auch

$$\Delta (\vec{F} - \vec{F}') = \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot (\vec{F} - \vec{F}') \right) - \vec{\nabla} \times \left( \vec{\nabla} \times (\vec{F} - \vec{F}') \right) = 0 \quad (8.22)$$

Damit hat man also  $\vec{F} = \vec{F}'$ . Mit anderen Worten: Wenn zwei Vektorfelder die gleiche Divergenz und Rotation haben, so sind sie gleich. Oder noch einfacher: **Ein Vektorfeld ist durch seine Divergenz und Rotation eindeutig bestimmt.**

Um die Gültigkeit von (8.17) zu zeigen, müssen wir also nur zeigen, dass die Rotation und Divergenz beider Seiten der Gleichung übereinstimmen. Dazu müssen nachrechnen, dass  $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}A) = \vec{\nabla}\vec{F}$  und  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \times \vec{F}$ .

Das Erste ist fast offensichtlich:

$$\Delta A = D = \vec{\nabla}\vec{F}. \quad (8.23)$$

Hierbei folgt die erste Gleichheit aus den Eigenschaften der Greenschen Funktion, die zweite gilt per Definition.

Die Gleichheit der Rotationen folgt auch relativ mühelos: Es gilt

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\Delta \vec{B} + \vec{\nabla} \int \frac{d^3y}{4\pi} \vec{\nabla}_x \cdot \frac{\vec{R}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}, \quad (8.24)$$

und außerdem

$$-\Delta \vec{B} = \vec{R} = \vec{\nabla} \times \vec{F}. \quad (8.25)$$

Wir müssen also nur noch zeigen, dass der zweite Term in (8.24) rechts verschwindet. Dies folgt gemäß

$$\int \frac{d^3y}{4\pi} \vec{\nabla}_x \cdot \frac{\vec{R}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} = \int \frac{d^3y}{4\pi} \left( -\vec{\nabla}_y \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) \cdot \vec{R}(\vec{y}) = \int \frac{d^3y}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \vec{\nabla}_y \cdot \vec{R}(\vec{y}) = 0. \quad (8.26)$$

Hier folgt die vorletzte Gleichheit, indem wir die Produktregel in der Form  $(\vec{\nabla} f) \cdot \vec{g} = \vec{\nabla} \cdot (f\vec{g}) - f\vec{\nabla} \cdot \vec{g}$  anwenden und den ersten Term rechts mit Gauß in ein Oberflächenintegral im Unendlichen umwandeln. Letzteres können wir dann wegen des angenommenen hinreichend schnellen Abfalls von  $R$  weglassen. Die letzte Gleichheit in (8.26) folgt, weil schlicht

$$\vec{\nabla}_y \cdot \vec{R}(\vec{y}) = 0 \quad (8.27)$$

gilt, was sich wiederum wegen  $\vec{R} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$  ergibt.

### 8.3 Magnetische Multipolentwicklung und Dipolmoment

Unser bisheriges Hauptresultat zur Magnetostatik lautet

$$\vec{A}(\vec{x}) = \int \frac{d^3y}{4\pi} \frac{\vec{j}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}, \quad (8.28)$$

wobei wir das zugehörige  $B$ -Feld als  $\vec{\nabla} \times \vec{A}$  gewinnen können. Falls nun  $\vec{j}$  in der Nähe von einem Punkt  $\vec{x}_0$  lokalisiert ist, und  $\vec{x}$  weit entfernt, so ist es sinnvoll,

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0 - (\vec{y} - \vec{x}_0)|} \quad (8.29)$$

zu schreiben und in  $\vec{y} - \vec{x}_0$  zu Taylor-entwickeln. Wir wollen zur Vereinfachung und O.B.d.A.  $\vec{x}_0 = \vec{0}$  setzen. Dann entwickeln wir also schlicht in  $\vec{y}$  und es folgt

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}|} \int \frac{d^3y}{4\pi} \vec{j}(\vec{y}) + \frac{1}{|\vec{x}|^3} \int \frac{d^3y}{4\pi} (\vec{x} \cdot \vec{y}) \vec{j}(\vec{y}) + \dots \quad (8.30)$$

Dies ist völlig analog zur Multipolentwicklung der Elektrostatik. Wir haben nur den Monopolterm und den Dipolterm hingeschrieben. Die Auslassungszeichen stehen für den Quadrupol und alle höheren Terme.

Ein wichtiger Unterschied zur Elektrostatik besteht darin, dass der Monopolterm verschwindet. Physikalisch heißt dies, dass eine Stromdichte keinen magnetischen Monopol erzeugt. Technisch begründet sich das wie folgt:

Zunächst einmal können wir jede Komponente des Stroms als Divergenz schreiben:

$$j^i(\vec{y}) = \vec{\nabla} \cdot (y^i \vec{j}(\vec{y})) \equiv \partial_k (y^i j^k(\vec{y})) \quad (8.31)$$

Die Richtigkeit dieser Behauptung folgt durch Anwendung der Produktregel und Benutzung von  $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ :

$$\partial_k (y^i j^k) = (\partial_k y^i) j^k + y^i \partial_k j^k = (\partial_k y^i) j^k = j^i \quad (8.32)$$

Die Behauptung folgt dann durch Anwendung des Gaußschen Satzes für ein Gebiet mit Rand im Unendlichen.

Also können wir uns, wenn wir in (8.30) Quadrupol und höhere Terme weglassen, ganz auf den zweiten Term konzentrieren. Diesen schreiben wir um als

$$A^k = \frac{x^i}{4\pi|\vec{x}|^3} \int d^3y y^i j^k(y) \quad (8.33)$$

Wir behaupten, dass das darin vorkommende Integral in  $i, k$  antisymmetrisch ist. Man sieht dies wie folgt:

$$\int d^3y y^i j^k = \int d^3y y^i \vec{\nabla} \cdot (y^k \vec{j}) = \int d^3y \vec{\nabla} \cdot (y^i y^k \vec{j}) - \int d^3y \vec{\nabla} \cdot (y^i) \vec{j} y^k = - \int d^3y y^k j^i \quad (8.34)$$

Hier haben wir im letzten Schritt den Gaußschen Satz (bei verschwindendem Oberflächenintegral im Unendlichen) und die Identität  $\partial_l (y^i) = \delta_l^i$  benutzt.

Wir können den Integranden in (8.33) also wie folgt ersetzen:

$$y^i j^k = \frac{1}{2} (\delta^i_l \delta^k_m - \delta^i_m \delta^k_l) y^l j^m = \frac{1}{2} \epsilon^{ikr} \epsilon_{rlm} y^l j^m = \frac{1}{2} \epsilon^{ikr} (\vec{y} \times \vec{j})_r \quad (8.35)$$

Es folgt

$$A^k = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi|\vec{x}|^3} x^i \epsilon^{ikr} \int d^3y (\vec{y} \times \vec{j})_r \quad (8.36)$$

An dieser Stelle definieren wir das **magnetische Dipolmoment** als

$$\vec{m} \equiv \frac{1}{2} \int d^3y \vec{y} \times \vec{j}(\vec{y}) \quad (8.37)$$

Falls man nicht mit  $c = 1$  arbeitet, ist in dieser Formel  $j$  durch  $j/c$  zu ersetzen.

Damit ergibt sich schließlich

$$\vec{A} = \frac{\vec{m} \times \vec{x}}{4\pi|\vec{x}|^3}. \quad (8.38)$$

Wir können daraus natürlich auch das  $\vec{B}$ -Feld des Dipols berechnen:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \left( \frac{\vec{m} \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^3} \right). \quad (8.39)$$

Eine etwas andere Form des gleichen Feldes lautet

$$\vec{B} = -\frac{1}{4\pi} (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}. \quad (8.40)$$

Wir überlassen es dem Leser, die Gleichheit dieser beiden Ausdrücke zu zeigen.

Zum Abschluss zeigen wir noch, dass ein magnetisches Moment immer dann auftritt, wenn ein geladenes Teilchen einen Drehimpuls trägt. Dazu erinnern wir uns an die mikroskopische Formel für die Stromdichte:

$$\vec{j} = \sum_A q_A \vec{v}_A \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_A). \quad (8.41)$$

Wir setzen dies in (8.37) ein und finden

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \sum_A q_A \int d^3x \vec{x} \times \vec{v}_A \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_A) = \frac{1}{2} \sum_A q_A \vec{x}_A \times \vec{v}_A = \frac{1}{2} \sum_A \left( \frac{q_A}{m_A} \right) \vec{L}_A. \quad (8.42)$$

Die entsprechende Formel für ein einzelnes Teilchen und mit  $c \neq 1$  lautet

$$\vec{m} = \frac{q}{2mc} \vec{L}. \quad (8.43)$$

Wie wir sehen, steht  $\vec{m}$  in engem Zusammenhang mit dem Drehimpuls und dem Ladungs-Massen-Verhältnis des betreffenden Teilchens. Man bezeichnet  $|\vec{m}|/|\vec{L}| = q/2mc$  als das **gyromagnetische Verhältnis**, genauer das gyromagnetische Verhältnis für den Bahndrehimpuls. Richtig interessant wird es, wenn man die entsprechende Analyse für den Spin und dessen Drehimpuls durchführt. Dann versagt die obige klassische Relation nämlich, was beweist, dass man den Spin des Elektrons nicht durch Rotation einer klassischen Ladungswolke beschreiben kann. Mehr dazu werden Sie in der Quantenmechanik und vor allem in der Quantenfeldtheorie lernen.

## 8.4 Dünne Leiter und Biot-Savart

Wir wollen jetzt noch dem praktisch sehr wichtigen Fall dünner, stromdurchflossener Leiter betrachten, siehe Abb. 31. Pro Intervall  $d\eta$  liege in diesem Leiter eine mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegte Ladung  $dq$  vor. Dann lautet die Stromdichte

$$\vec{j} = \int_{\Gamma} d\eta \left( \frac{dq}{d\eta} \right) \vec{v} \cdot \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0(\eta)). \quad (8.44)$$

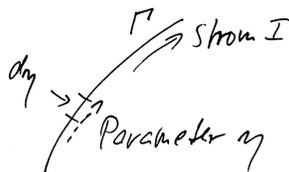


Abbildung 31: Dünner, stromdurchflossener Leiter, parametrisiert durch die Variable  $\eta$ .

Die Funktion  $\vec{x}_0(\eta)$  beschreibt dabei die Lage des Leiters.

Das Vektorpotential berechnen wir zu

$$\vec{A}(\vec{x}) = \int \frac{d^3y}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}|} \vec{j}(\vec{y}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{d^3y}{|\vec{x} - \vec{y}|} \int_{\Gamma} dq \vec{v} \delta^3(\vec{y} - \vec{x}_0(\eta)) = \int_{\Gamma} dq \frac{\vec{v}}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}_0|}. \quad (8.45)$$

Mit

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}_0}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{dq}{dt} = I \quad (8.46)$$

wird daraus

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{I}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{d\vec{x}_0}{|\vec{x} - \vec{x}_0|}. \quad (8.47)$$

Berechnen wir davon noch die Rotation, so erhalten wir das **Biot-Savart-Gesetz**:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{I}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{d\vec{x}_0 \times (\vec{x} - \vec{x}_0)}{|\vec{x} - \vec{x}_0|^3}. \quad (8.48)$$

## 8.5 Beispiele

Wir schließen das Thema der Elektro- und Magnetostatik mit einigen einfachen aber lehrreichen Beispielen. Sowohl in der Elektro- wie auch in der Magnetostatik ist das Integrieren mit Hilfe der Greenschen Funktion oft nicht der effizienteste Weg zu  $\vec{E}$  oder  $\vec{B}$ . Oft führen Symmetrieargumente zusammen mit den Integral-Formen der Maxwell-Gleichungen auf einfachere Art zum Ziel.

Zum Beispiel können wir das Feld einer Punktladung oder auch einer sphärisch symmetrischen Ladungsverteilung am einfachsten unter Ausnutzung der  $SO(3)$ -Symmetrie zusammen mit der Maxwell-Gleichung

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{f} = Q \quad (8.49)$$

bestimmen, vgl. Abb.32.

Ganz analog folgt das  $B$ -Feld eines unendlichen geraden Leiters aus  $SO(2)$ -Symmetrie, Translationssymmetrie, und der (für den statischen Fall vereinfachten) Maxwell-Gleichung

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = I, \quad (8.50)$$

siehe Abb. 33. Wir überlassen die Durchführung der entsprechenden Analysen den Übungen.

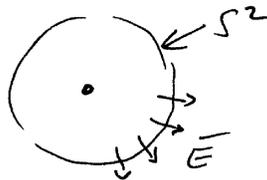


Abbildung 32: Sphärisch symmetrisches Feld einer Punktladung.

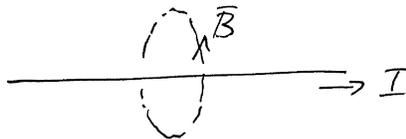


Abbildung 33:

Statt dessen wollen wir hier ein wichtiges Beispiel besprechen, dass nicht ganz so einfach ist, wie es scheint: die lange Spule:

Die Grundidee besteht wie schon beim Draht die Anwendung von (8.50). Entscheidend ist die Wahl einer passenden Integrationskontur  $\Gamma$ , vgl. Abb. 34.

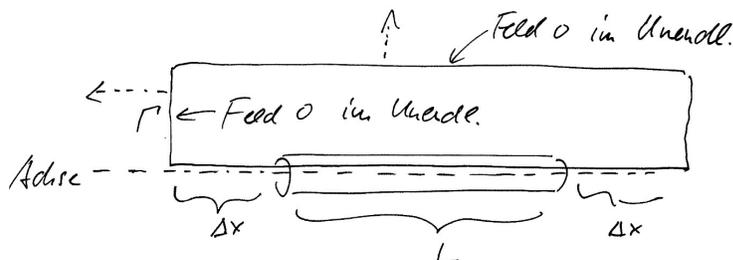


Abbildung 34: Lange Spule mit Integrationskontur  $\Gamma$  zur Berechnung des  $B$ -Feldes im Inneren. Es ist angedeutet, dass man den oberen horizontalen sowie die beiden senkrechten Abschnitte von  $\Gamma$  ins Unendliche schiebt, wo das Feld verschwindet.

Die eigentliche Rechnung ist elementar: Wenn man annimmt, dass der wesentliche Beitrag aus dem inneren der Spule kommt, wo das  $B$ -Feld homogen ist, findet man

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = |\vec{B}| \cdot L = N \cdot I = n \cdot L \cdot I, \quad (8.51)$$

wobei  $N$  die Gesamtwindungszahl und  $n$  die Zahl der Windungen pro Länge ist. Es folgt

$$|\vec{B}| = n \cdot I \quad (8.52)$$

im Inneren der Spule.

Die entscheidende noch zu klärende Frage ist: Können wir den Beitrag aus den Bereichen  $\Delta x$  wirklich vernachlässigen? Wir müssen uns überzeugen, dass diese Beiträge im Grenzwert  $L \rightarrow \infty$  klein sind gegen den Beitrag aus dem Inneren der Spule. Dazu betrachten wir eine weitere Abbildung, Abb. 35, die das Augenmerk auf den rechten Randbereich der Länge  $\Delta x$  lenken soll. Wir wollen, wie im Bild dargestellt, zunächst  $B$  an einem Punkt in der Entfernung  $y$  vom Ende der Spule abschätzen. Wir behaupten, dass dies durch das Integral

$$B(y) \sim \int_y^{L+y} \frac{dx}{x^3} \quad (8.53)$$

geschehen kann, wobei wir uns die Spule in viele kleine Ringe der Dicke  $dx$  zerlegt denken und diese vom rechten Ende der Spule bis zum linken Ende der Spule summieren. Entscheidend ist, dass der Beitrag der entfernter liegenden Ringe mit  $1/x^3$  unterdrückt ist. Dies folgt, weil jeder Ring als magnetische Dipol aufgefasst werden kann, vgl. (8.39)

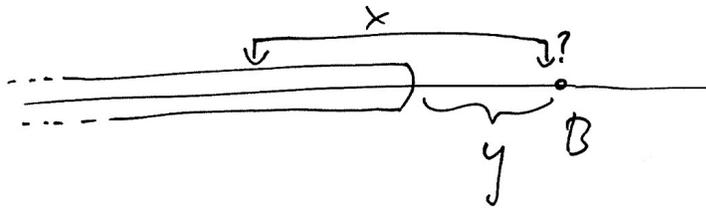


Abbildung 35: Zur Berechnung des  $B$ -Feldes auf der Symmetrieachse außerhalb der Spule.

Das Integral über  $x$  ist also von kleinen  $x$  dominiert. Es wird nur größer, wenn wir den oberen Rand,  $L + y$  durch Unendlich ersetzen. Das ist uns recht, weil wir ja eine obere Schranke suchen. Wir haben also

$$B(y) \lesssim \frac{1}{y^2} \quad (8.54)$$

bei hinreichend großen  $y$ . Beim Kontur-Integral ist dieses  $B$  wiederum über  $y$  zu integrieren. Wegen des starken Abfalls  $1/y^2$  ist das Resultat endlich. Es kann also nicht mit dem Beitrag aus dem Inneren der Spule, welcher mit  $L$  linear wächst, konkurrieren. Also hält das oben naiv hingeschriebene Resultat auch einer genaueren Analyse stand.

## 9 Elektrisch-Magnetische Dualität

### 9.1 Symmetrie zwischen $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ ohne Ladungen

Wir erinnern an die Maxwell-Gleichungen in Abwesenheit von Ladungen:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (9.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \dot{\vec{E}} \quad (9.2)$$

Diese sind offensichtlich invariant unter der Ersetzung

$$\{\vec{B}, \vec{E}\} \longrightarrow \{\vec{E}, -\vec{B}\} \quad (9.3)$$

bzw.

$$\vec{B} \longrightarrow \vec{E}; \quad \vec{E} \longrightarrow -\vec{B}. \quad (9.4)$$

Wir erinnern uns weiterhin, dass dies in der kovarianten Formulierung gerade der Ersetzung

$$F^{\mu\nu} \longrightarrow \tilde{F}^{\mu\nu}, \quad \tilde{F}^{\mu\nu} \longrightarrow -F^{\mu\nu} \quad (9.5)$$

entspricht. Als Nebenbemerkung wollen wir an dieser Stelle betonen, dass die Theorie ohne Ladungen keineswegs uninteressant ist: Sie hat elektromagnetische Wellen als Lösungen, die wir noch ausführlich diskutieren werden (vgl. auch die kurze Diskussion zu Wellen des Skalarfelds in Kap. 4.3). Zusammenfassend stellen wir noch einmal fest: Ohne Ladungen sind  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  völlig gleichberechtigt.

Der eben diskutierte Austausch von  $E$  und  $B$  stellt eine diskrete Symmetrie-Transformation dar. Interessanterweise können wir diese als Element einer größeren, kontinuierlichen Symmetrie-Gruppe  $SO(2)$  auffassen. Diese wirkt gemäß

$$\begin{pmatrix} \vec{B}' \\ \vec{E}' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \vec{B} \\ \vec{E} \end{pmatrix}, \quad \text{mit } R = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (9.6)$$

und lässt die Maxwell-Gleichungen ohne Ladungen ebenfalls invariant. Sie beschreibt Drehungen in einer abstrakten Ebene, die durch  $E$  und  $B$  aufgespannt wird.

Unsere obige diskrete Symmetrie-Transformation ist ein Element von  $\mathbb{Z}_4 \subset SO(2)$ . Die Gruppe  $\mathbb{Z}_4$  wird von einer 90-Grad-Drehung erzeugt und ihre drei nichttrivialen Elemente dieser sind

$$\varphi = +\frac{\pi}{2} : \quad \vec{B} \rightarrow \vec{E}, \quad \vec{E} \rightarrow -\vec{B} \quad (9.7)$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} : \quad \vec{B} \rightarrow -\vec{E}, \quad \vec{E} \rightarrow \vec{B} \quad (9.8)$$

$$\varphi = \pi : \quad \vec{B} \rightarrow -\vec{B}, \quad \vec{E} \rightarrow -\vec{E}. \quad (9.9)$$

Man kann die  $SO(2)$ -Symmetrie auch schon an der Wirkung erkennen: Man überlegt sich zunächst, dass die  $SO(2)$ -Symmetrie  $F$  in  $\tilde{F}$  rotiert:

$$\begin{pmatrix} F' \\ \tilde{F}' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} F \\ \tilde{F} \end{pmatrix}. \quad (9.10)$$

Die infinitesimale Version dazu folgt für  $\varphi \ll 1$  und lautet

$$F \longrightarrow F + \varphi \tilde{F}, \quad \tilde{F} \longrightarrow \tilde{F} - \varphi F. \quad (9.11)$$

Der Lagrangian transformiert also gemäß

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^2 \longrightarrow \mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^2 - \frac{1}{2}\varphi F\tilde{F}. \quad (9.12)$$

Der neu hinzukommende Term hat explizit die Form

$$F\tilde{F} \equiv F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} = F^{\mu\nu}\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma} = \partial_\mu J^\mu. \quad (9.13)$$

Hier haben wir im letzten Schritt ohne Beweis festgestellt, dass es sich um eine totale Ableitung handelt. Man kann das hierfür erforderliche  $J^\mu$  mit wenig Mühe finden. Wir wollen dies jedoch nicht tun, weil dies später, mit mächtigeren Methoden, offensichtlich werden wird. Auf jeden Fall ist damit klar, dass  $SO(2)$  tatsächlich die Wirkung invariant lässt.

## 9.2 Ladungen und Dualität

Die obige  $\mathbb{Z}_4$  oder sogar  $SO(2)$ -Symmetrie ist natürlich in der realen Welt gebrochen. Grund ist das Fehlen magnetischer Ladungen, sogenannter **magnetischer Monopole**. Gäbe es solche, so würden sie eine Ladungsdichte  $\rho_m$  und Stromdichte  $\vec{j}_m$  erzeugen und die kovarianten Maxwell-Gleichungen würden die Form

$$\partial_\mu F^{\nu\mu} = j_e^\nu, \quad \partial\tilde{F}^{\nu\mu} = -j_m^\nu \quad (9.14)$$

annehmen. Das Minus in der zweiten Gleichung ist eine von uns gewählte Konvention, die sicherstellt, dass man im magnetischen Coulomb-Gesetz kein Minus bekommt. Die entsprechenden nichtkovarianten Gleichungen sind

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \rho_e \quad \vec{\nabla}\vec{B} = \rho_m \quad (9.15)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{j}_e + \dot{\vec{E}} \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\vec{j}_m - \dot{\vec{B}}. \quad (9.16)$$

Es scheint, als könnte man so eine perfekte Austausch-Symmetrie zwischen  $E$  und  $B$  wiederherstellen. Aber dem ist nicht so:

Selbst wenn es magnetische Monopole gäbe, so erzwingt die Quantenmechanik, dass Teilchen ein diskretes, **quantisiertes Ladungsspektrum** haben. Es gibt also z.B. Elektronen mit Masse  $m_e$  und Ladung  $e_e$  sowie Monopole mit Masse  $m_m$  und Ladung  $e_m$ . Es gibt keine Teilchen für beliebige, reelle Werte dieser Parameter. Eine perfekte Austausch-Symmetrie zwischen elektrischen und magnetischen Größen wird sich deshalb i.A. nicht ergeben.

Zusammenfassend stellen wir fest, dass es ohne Ladungen eine perfekte elektrisch-magnetische Symmetrie gibt – diskret oder sogar kontinuierlich. Man spricht in diesem Zusammenhang manchmal von Dualität oder Dualitäts-Symmetrie, aber das Wort Dualität ist hier genau genommen nicht angemessen. Wir werden diesen Begriff gleich anders definieren.

Falls Ladungen vorhanden sind, gibt es i.A. keine elektrisch-magnetische Symmetrie mehr. Aber immer noch eine **elektrisch-magnetische Dualität**. Unter einer **Dualität** versteht man dabei die Existenz von zwei verschiedenen mathematischen Formulierungen der gleichen Theorie.

Im vorliegenden Fall sind dies die Beschreibung mit dem fundamentalen Feld  $F$  und die Beschreibung mit dem fundamentalen Feld  $\tilde{F}$ . Genauer:

**1) Elektrische Formulierung:** Die fundamentale Feldstärke ist  $F^{\mu\nu}$ . Sie erfüllt Bewegungsgleichung

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j_e^\mu. \quad (9.17)$$

Außerdem gilt die Bianchi-Identität:

$$\partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = -j_m^\mu \quad \text{mit} \quad \tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}. \quad (9.18)$$

Auf der rechten Seite der Bianchi-Identität steht keine Null, wie in der bisherigen experimentellen Realität, sondern die (vielleicht noch zu findende) magnetische Stromdichte.

**2) Magnetische Formulierung:** Die fundamentale Feldstärke ist  $\tilde{F}^{\mu\nu}$ . Sie erfüllt die Bewegungsgleichung

$$\partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = -j_m^\mu. \quad (9.19)$$

Die Bianchi-Identität lautet

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j_e^\mu \quad \text{mit} \quad F^{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \tilde{F}_{\rho\sigma}. \quad (9.20)$$

Man könnte denken, das Obige sei reine Semantik – es gehe um eine reine Umbenennung des fundamentalen Feldstärketensors in den dualen Feldstärketensor und umgekehrt. Aber wenn man die Theorie durch ihre Wirkung beschreibt (und dies ist, wie Sie noch lernen werden, für der Quantisierung entscheidend), dann erkennt man, dass die beiden Formulierungen tatsächlich verschieden sind.

### 9.3 Dualität und Wirkung

Um eine Wirkung zu formulieren, braucht man zwingend das Vektorpotential  $A_\mu$ . Dies ist nämlich das Feld, welches variiert werden muss, um die Bewegungsgleichungen zu gewinnen. Man braucht es auch, um die Theorie an Ladungen zu koppeln. In der Wirkungsformulierung haben wir also

**1) Elektrische Formulierung:**

$$S = \int_{\mathbb{R}^4} \left( -\frac{1}{4} F^2 \right) + \int_{\text{WL}} j_e A \quad \text{mit} \quad F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (9.21)$$

Es gilt jetzt aber automatisch die ‘triviale’ Bianchi-Identität  $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$ , was mit magnetischen Ladungen unverträglich ist. Ihr Einbau in diese Formulierung ist erschwert. Wir wollen dies hier nur verbal andeuten: An dem Ort magnetischer Ladungen muss man in dieser Formulierung einen Punkt (oder eine kleine Kugel) aus dem Raum entfernen, in dem Sinne, dass dort  $A_\mu$  nicht definiert ist. Stattdessen kann man aber gewisse Randbedingungen auf der Oberfläche der fehlenden Kugel festlegen, welche die Information kodieren, dass sich darin eine magnetische Ladung befindet.

**2) Magnetische Formulierung:**

$$S = \int_{\mathbb{R}^4} \left( -\frac{1}{4} \tilde{F}^2 \right) + \int_{\text{WL}} j_m \tilde{A} \quad \text{mit} \quad \tilde{F}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \tilde{A}_\nu - \partial_\nu \tilde{A}_\mu. \quad (9.22)$$

Jetzt ist in völliger Analogie die Ankopplung elektrischer Ladungen erschwert.

Hat man tatsächlich beide Arten von Ladungen, so ist es am einfachsten, jeweils in der Nähe elektrischer Ladungen die erste Formulierung und in der Nähe der magnetischer Ladungen die

zweite zu benutzen. Im Bereich dazwischen hat man die Wahl. Noch schwieriger wird es, wenn man Teilchen hat, die sowohl elektrisch als auch magnetisch geladen sind – sogenannte **Dyonen**

**Fortgeschrittener Kommentar:**

Man könnte hoffen, dass all diese interessanten Diskussionen irrelevant sind, weil magnetische Monopole nicht nur schwer sind (weswegen man sie noch nicht gefunden hat), sondern es sie überhaupt nicht gibt. Doch das ist aus theoretischer Sicht ausgeschlossen, denn es gibt schwarze Löcher, und diese können geladen sein: elektrisch oder magnetisch, vgl. Abb. 36.

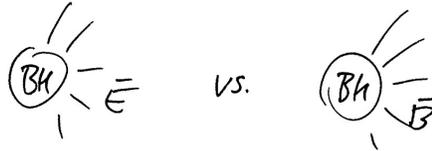


Abbildung 36: Elektrisch oder magnetisch geladene schwarze Löcher sind Lösungen der gekoppelten Einstein-Gleichungen und Maxwell-Gleichungen, welche außerhalb des Horizonts (in den man nicht hineinsehen kann) ein elektrisches bzw. magnetisches Feld haben, wie es zu einer entsprechenden Ladung im Inneren gehört.

Da es nun prinzipiell unmöglich ist, hinter den Horizont des schwarzen Lochs zu sehen, können wir die magnetische Variante nicht mit dem Argument verbieten, es gäbe keinen magnetischen Monopol. Beide Varianten des geladenen schwarzen Lochs sind gleichberechtigte Lösungen der fundamentalen Gleichungen.

Mehr noch, wir können in der Quantentheorie sogar ein Paar geladener schwarzer Löcher durch Streuung erzeugen, vgl. Abb. 37. Die theoretisch vollständige Formulierung der Elektrodynamik schließt also auf alle Fälle magnetische Ladungen ein. Aber für alle praktischen Zwecke bleibt es natürlich z.Z. bei der Aussage  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ . Ein Lehrbuch mit relativ detaillierter Diskussion der elektrisch-magnetischen Dualität und der Monopole ist das von Lechner [8].

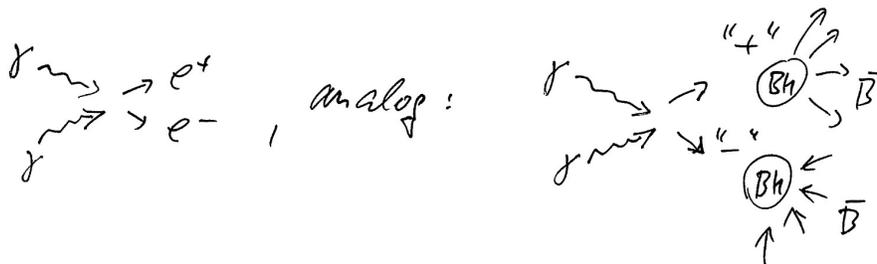


Abbildung 37: Links: Paarerzeugung einer Elektrons und einer Positron durch Kollision zweier Photonen. Rechts: Analoger Prozess mit Erzeugung zweier entgegengesetzt magnetisch geladener schwarzer Löcher.

# 10 Elektrodynamik in Differentialformen

Ihre natürlichste und eleganteste Formulierung findet die Elektrodynamik in der mathematischen Sprache der Differentialformen. Darüberhinaus stellen Differentialformen ein grundlegendes Werkzeug und eine Sprache dar, die aus der modernen theoretischen Physik schlicht nicht mehr wegzudenken ist – siehe z.B. [9, 10].

## 10.1 Tangentialraum und Vektorfelder

Sei  $M$  eine  $d$ -dimensionaler Raum. Wir wollen darunter eine Menge  $M$  von Punkten, die sich durch  $d$  reelle Koordinaten parametrisieren lässt. Dabei ist es möglich, dass man die Koordinaten wechseln muss, um die Menge  $M$  vollständig zu erfassen. Der korrekte mathematische Begriff für Räume von diesem Typ ist der der **differenzierbaren Mannigfaltigkeit**. Aber wir wollen die präzise Definition dieses Begriffs der Mathematik bzw. der allgemeinen Relativitätstheorie überlassen und uns mit ein paar Beispielen begnügen:

- 1) Der  $\mathbb{R}^d$  mit Koordinaten  $\{x^1, \dots, x^d\}$ .
- 2) Untermengen davon, z.B. die durch  $(x^1)^2 + \dots + (x^d)^2 < R^2$  definierte Kugel.
- 3) Der  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  mit den uns schon bekannten Kugelkoordinaten  $\{r, \theta, \varphi\}$ . Wir bemerken, dass dieses Koordinatensystem bei  $\vec{x} = 0$  singulär ist. Wir mussten also den Ursprung entfernen, wenn wir mit diesem einen Koordinatensystem auskommen wollen. Natürlich können wir auch den Ursprung hinzunehmen, müssen aber dann in dessen Umgebung z.B. zu kartesischen Koordinaten wechseln.
- 4) Die  $S^1$  mit den beiden Koordinatensystemen  $\varphi \in (0, 2\pi)$  und  $\chi \in (-\pi, \pi)$ . Wie in Abb. 38 illustriert, können wir in diesem Fall nicht mit einem einzigen Koordinatensystem auskommen. Das Problem der Beschreibung durch  $\varphi$  ist, dass 0 und  $2\pi$  den gleichen Punkt beschreiben. Wir müssen diesen Punkt bei der Beschreibung durch  $\varphi$  entfernen. Die Beschreibung durch  $\chi$  hat bei  $\chi = \phi = 0$  kein Problem, aber es tritt eine analoge Schwierigkeit am Punkt  $\varphi = \pi$  auf.

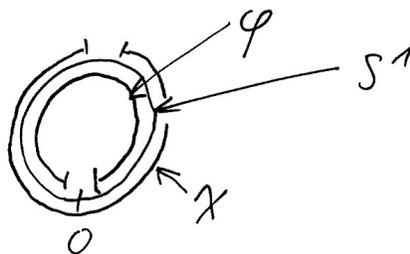


Abbildung 38: Illustration zur Parametrisierung der  $S^1$ .

- 5) Die Sphäre  $S^2 \setminus \{N, S\}$  mit den Winkeln  $(\theta, \varphi)$ . Die Parametrisierung ist die von den Kugelkoordinaten wohlbekannte. Um Nord- und Südpol einzuschließen, bräuchte man extra Koordinatensystem in deren Umgebung, vgl. Abb. 39.

Dies sind vorerst genug Beispiele.

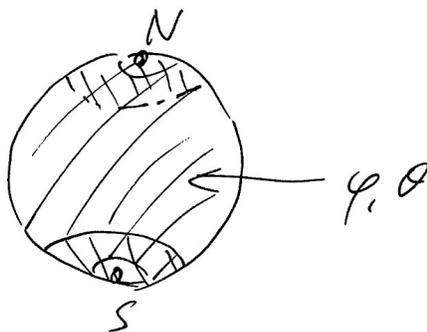


Abbildung 39: Illustration zur Parametrisierung der  $S^2$ .

Beachten Sie bitte, dass die Koordinatenwahl nie eindeutig ist. Es gibt immer viele verschiedene Koordinatensysteme zum gleichen Raum, siehe z.B. Abb. 40. Wir werden stets voraussetzen, dass der Koordinatenwechsel durch beliebig oft differenzierbare Funktionen beschrieben wird. Wichtig ist weiterhin, dass  $M$  selbst so etwas wie eine ‘mathematische Realität’ darstellt. Es gibt den Raum (bzw. präziser die Mannigfaltigkeit) unabhängig von der Koordinatenwahl.

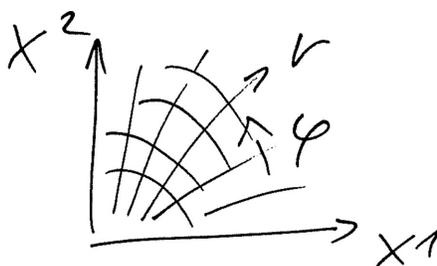


Abbildung 40: Der obere rechte Quadrant der Ebene kann kartesisch oder durch Polarkoordinaten beschrieben werden.

Wir kommen nun zu Vektorfeldern auf  $M$ . Die einfachste Definition die über die Komponenten: Gegeben ein Koordinatensystem, ist ein Vektorfeld schlicht ein Satz von Funktionen – eine für jede Koordinate. Diese Funktionen sind die Komponenten des Vektorfeldes.

Als einfaches Beispiel betrachten wir den ersten Quadranten des  $\mathbb{R}^2$  mit den Koordinaten  $r, \varphi$ . Das Vektorfeld

$$v(r, \varphi) = \{v_r = 1, v_\varphi = 0\} \tag{10.1}$$

ist in Abb. 41 illustriert. Es ‘zeigt’ überall in die radiale Richtung. Der Betrag ist überall gleich. Eine äquivalente Beschreibung in den kartesischen Koordinaten  $x^1, x^2$  lautet

$$v(x^1, x^2) = \left\{ \frac{x^1}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}}, \frac{x^2}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}} \right\}. \tag{10.2}$$

Das ist anschaulich klar. Eine präzise Vorschrift zur Umrechnung folgt in Kürze.

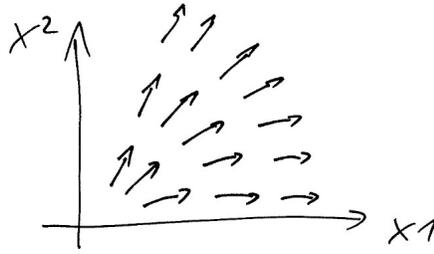


Abbildung 41: Radiales Vektorfeld mit konstantem Betrag.

Ein entscheidende Einsicht ist die Folgende: Auch Vektorfelder auf  $M$  sind real, unabhängig von den Koordinaten. Anschaulich ist dies natürlich klar, aber um dies formal zu sehen, ist es nützlich, eine koordinatenunabhängige Definition eines Vektorfeldes zu geben:

Ein **Vektorfeld** ist ein Differentialoperator 1. Ordnung:

$$D : f \mapsto Df. \quad (10.3)$$

Hierbei ist  $f$  eine Funktion auf  $M$ . Um dies explizit zu machen, können wir natürlich Koordinaten benutzen:

$$D = v^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}; \quad Df = v^i(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x^i}, \quad (10.4)$$

wobei

$$x = \{x^1, \dots, x^d\}. \quad (10.5)$$

Wir haben hier die schon beim Minkowski-Raum benutzte Konvention angewendet, mit  $x$  die Gesamtheit der Koordinaten  $x^1, \dots, x^d$  abzukürzen. Obwohl wir zur expliziten Angabe Koordinaten brauchen, ist die Abb.  $f \mapsto Df$  koordinatenunabhängig definiert. Dies ist deshalb der Fall, weil der Begriff einer Funktion auf  $M$  auch keine Koordinaten braucht. Eine Funktion ordnet einfach Punkten aus der Menge  $M$  Zahlen zu.

Ungeachtet dieser koordinatenunabhängigen Definition kann man  $D$ , wie oben getan, explizit in Koordinaten aufschreiben. Dabei werden die **Komponenten**  $v^i$  des zu  $D$  gehörigen **Vektorfeldes**  $v$  eingeführt.

Man kann Koordinaten wechseln. Dann muss gelten

$$D = v^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{und ebenso} \quad D = v'^i(x') \frac{\partial}{\partial x'^i}. \quad (10.6)$$

Zum Beispiel könnten  $x^1, x^2$  die üblichen kartesischen Koordinaten der Ebene sein und  $x'^1 = r, x'^2 = \varphi$ . Mit der Kettenregel ergibt sich die Umrechnungsformel:

$$v^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \left( v^i \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x'^j} = v'^j \frac{\partial}{\partial x'^j}. \quad (10.7)$$

Es gilt also

$$v'^i = \left( \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \right) v^j. \quad (10.8)$$

Wir geben noch eine zweite koordinatenunabhängige Definition eines Vektorfeldes. Dazu definieren wir zunächst koordinatenunabhängig, was ein Vektor an einem Punkt  $x_0 \in M$  ist:

Betrachte alle parametrisierten Kurven durch  $x_0$ :

$$\lambda \mapsto x(\lambda) \in M \quad \text{mit} \quad x(\lambda = 0) = x_0. \quad (10.9)$$

Um ein paar Beispiele zu haben, wollen wir  $M = \mathbb{R}^2$  und  $x_0 = \{0, 0\}$  wählen und die Kurven  $K_A$ ,  $K_B$ ,  $K_C$  und  $K_D$  durch  $x_0$ , wie in Abb. 42, vorgeben. Die expliziten Formeln in kartesischen Koordinaten lauten

$$K_A = K_A(\lambda) = \{\lambda, 0\} \quad (10.10)$$

$$K_B = K_B(\lambda) = \{2\lambda, 0\} \quad (10.11)$$

$$K_C = K_C(\lambda) = \{\lambda, \lambda^2\} \quad (10.12)$$

$$K_D = K_D(\lambda) = \{\lambda, \lambda\}. \quad (10.13)$$

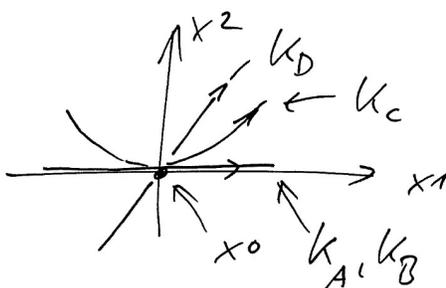


Abbildung 42: Verschiedene Kurven durch den Ursprung.

Wir definieren nun eine Äquivalenzrelation auf der Menge solcher Kurven: Zwei Kurven sind äquivalent, falls die Komponenten der Ableitung nach  $\lambda$ , also  $\{\dot{K}^i|_{x_0}\}$  in einem Koordinatensystem gleich sind. (Man kann zeigen, dass sie dann auch in allen anderen Koordinatensystemen gleich sind.)

Für unsere Beispielkurven gilt

$$\dot{K}_A = \{1, 0\} \quad (10.14)$$

$$\dot{K}_B = \{2, 0\} \quad (10.15)$$

$$\dot{K}_C = \{1, 0\} \quad (10.16)$$

$$\dot{K}_D = \{1, 1\}. \quad (10.17)$$

Hier sind also nur  $K_A$  und  $K_C$  äquivalent.  $K_A$  und  $K_B$  sind nicht äquivalent, obwohl sie im Bild nicht zu unterscheiden sind. Anschaulich bedeutet die Äquivalenz, dass zwei Kurven die gleiche Geschwindigkeit am Punkt  $x_0$  haben, wenn man  $\lambda$  als Zeit auffasst.

Wir definieren damit weiterhin: Ein **(Tangential-)Vektor** an einem Punkt  $x_0$  ist eine Äquivalenzklasse von Kurven durch  $x_0$ . Die Komponenten des Vektors sind gerade die Ableitungen jeder der Komponenten der Kurve (beschrieben in einem gewissen Koordinatensystem) nach dem Parameter, der die Kurve definiert.

Des Weiteren ist der **Tangentialvektorraum**  $T_p$  an einem Punkt  $p \in M$  die Menge aller Tangentialvektoren.  $T_p$  ist ein Vektorraum (vgl. Abb. 43). Man muss natürlich die Axiome prüfen, aber dass diese erfüllt sind, ist relativ anschaulich, wenn man an die Interpretation als Geschwindigkeiten denkt.

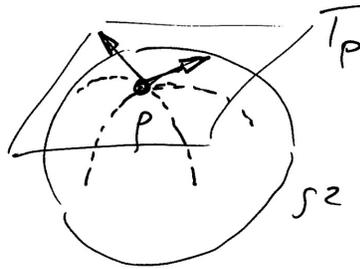


Abbildung 43: Zur Anschauung der Tangentialraums: Illustration der Tangentialebene an einem Punkt der  $S^2$ .

Ein **Vektorfeld** ist nun eine Abbildung, welche jedem Punkt in  $M$  einen Vektor im Tangentialraum an diesem Punkt zuordnet:

$$M \ni p \xrightarrow{v} v(p) \in T_p \quad \text{für alle } p. \quad (10.18)$$

Die obigen Definitionen von Vektorfeldern  $v$  über Differentialoperatoren und über Kurven sind äquivalent. Unsere ausführliche Diskussion dieser Definitionen dient primär der Anschauung. Praktisch brauchen wir nur die Beschreibung durch Komponenten,

$$v = \{v^i(x)\}, \quad \text{mit der Umrechnungsvorschrift } v^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} v^j. \quad (10.19)$$

Bezugnehmend auf die Definition über Differentialoperatoren kann man auch sagen: Die speziellen Differentialoperatoren  $\partial/\partial x^i|_p \equiv \partial_i|_p$  bilden eine Basis von  $T_p$  für jedes  $p$ . Wir schreiben  $D_v$  für den zum Vektorfeld  $v$  gehörigen Differentialoperator und haben somit

$$D_v = v(x) = v^i(x) \partial_i. \quad (10.20)$$

Hier haben wir also das Vektorfeld  $v$  zerlegt in die Basis der partiellen Ableitungen  $\partial_i$ . Die Funktionen  $v^i(x)$  fassen die Komponenten in der Basis  $\partial_i$  für alle Punkte  $x \in M$  zusammen.

Eine in diesem Zusammenhang gebräuchliche, etwas formal anmutende aber trotzdem intuitive Sprechweise ist: Die Menge der  $T_p$  ( $p \in M$ ) ist das Tangentialbündel. Vektorfelder sind Schnitte im Tangentialbündel. Dies ist in Abb. 44 illustriert.

## 10.2 Kotangentialraum und 1-Formen

Für jedes  $p \in M$  ist  $(T_p)^*$  (der Dualraum zu  $T_p$ ) der Kotangentialraum. Elemente von  $T_p^* \equiv (T_p)^*$  sind Kotangentialvektoren oder kurz Kovektoren. 1-Formen sind eine andere Bezeichnung für Kovektorfelder, also Abbildungen

$$M \ni p \xrightarrow{\omega} \omega(p) \in T_p^* \quad \forall p \in M. \quad (10.21)$$

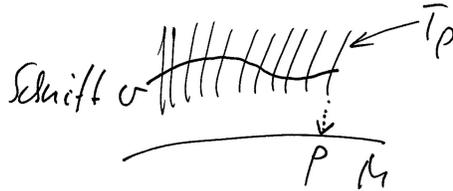


Abbildung 44: Die Menge der Tangentialräume ist durch vertikale Linien, eine über jedem Punkt von  $M$ , illustriert. Ein Vektorfeld ist ein Schnitt darin, also ein Punkt auf jeder der Linien.

In völliger Analogie zum Tangentialraum sagen wir: Die Kotangentialräume  $T_p^*$  bilden zusammen das Kotangentialbündel. 1-Formen oder Kovektorfelder sind Schnitte im Kotangentialbündel.

Es ist bequem, die **duale Basis**  $\{dx^i\}$  des  $T_p^*$  zur früher definierten Basis  $\{\partial_i\}$  des  $T_p$  einzuführen. Die  $dx^i$  sind also abstrakt definierte Elemente des Kotangentialraums, so dass

$$dx^i(\partial_j) = \delta^i_j \quad \text{mit} \quad \partial_i \in T_p, \quad dx^i \in T_p^*. \quad (10.22)$$

Wir erinnern, dass in ausführlicherer Notation

$$\partial_j \equiv \frac{\partial}{\partial x^j}. \quad (10.23)$$

Ein allgemeiner Kovektor an einem Punkt  $p$  kann somit als

$$\omega(p) = \omega_i dx^i \Big|_p \quad (10.24)$$

geschrieben werden. Ein Kovektorfeld bzw. eine 1-Form: ist dann durch

$$\omega = \omega_i(x) dx^i \quad (10.25)$$

gegeben.

Die Anwendung einer 1-Form auf ein Vektorfeld liefert eine Funktion:

$$\omega(v) = \omega_i dx^i (v^j \partial_j) = \omega_i v^j \delta^i_j = \omega_i v^i = \omega_i(x) v^i(x). \quad (10.26)$$

Wir haben hier im letzten Ausdruck die Abhängigkeit vom Punkt im  $M$ , charakterisiert durch die Koordinaten  $\{x^i\}$ , explizit gemacht.

Es sei noch angemerkt, dass man eine Metrik, falls es sie gibt, als Abbildung von den Vektorfeldern auf die 1-Formen auffassen kann:

$$v \xrightarrow{g} \omega = \omega_i dx^i \quad \text{mit} \quad \omega_i = g_{ij} v^j. \quad (10.27)$$

Das folgende ist ein zentrales Beispiel für 1-Formen: Zu jeder Funktion  $f$  gehört natürlicherweise die 1-Form  $\omega = df$ , welche definiert ist durch

$$df(v) = v^i \partial_i(f) = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}. \quad (10.28)$$

Äquivalent dazu ist folgende Definition: Gegeben ein Vektorfeld  $v$ , wollen wir mit  $D_v$  den zugehörigen Differentialoperator bezeichnen. Dann ist  $df$  definiert durch  $df(v) = D_v f$ .

Wir behaupten, dass die Komponenten von  $df$  in der Basis der  $dx^i$  gerade die partiellen Ableitungen sind, also

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i. \quad (10.29)$$

Die Begründung erfolgt durch Anwendung von  $df$  auf ein Vektorfeld  $v$  und Ausnutzung der Linearität:

$$df(v) = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i (v^j \partial_j) = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}. \quad (10.30)$$

Der letzte Ausdruck entspricht gerade unserer ersten Definition.

### 10.3 Höhere p-Formen

In völliger Analogie zu Vektorfelder und 1-formen sind **höhere p-Formen** Felder, welche Werte in  $(T_q^*)^{\otimes p}$  annehmen, und zwar für alle  $q \in M$ . (Wir bezeichnen Punkte in  $M$  ab jetzt mit  $q$ , weil wir Verwechslungen mit dem Grad  $p$  der Form vermeiden wollen.) Hierbei ist  $(T_q^*)^{\otimes p}$  der total antisymmetrische Unterraum von  $(T_q^*)^{\otimes p}$ . In Komponentensprache ist eine  $p$ -Form also einfach nur ein total antisymmetrischer Tensor-Felder vom Rang  $p$ .

Sprechen wir zunächst einmal nur über Tensorfelder (noch ohne Antisymmetrisierung) und betrachten wir zum Beispiel  $p = 2$ : Der Tensorproduktraum

$$T_q^* \otimes T_q^* \quad (10.31)$$

hat die Basis

$$dx^i \otimes dx^j \quad \text{mit} \quad i, j \in 1 \cdots d. \quad (10.32)$$

Seine Elemente sind also alle Linearkombinationen dieser Basiselemente.

Formaler definiert man  $T_q^* \otimes T_q^*$  als Raum der bilinearen Funktionale auf  $T_q$ . Unsere obige Basis, angewendet auf die Basiselemente von  $T_q$ , gibt

$$(dx^i \otimes dx^j) (\partial_k, \partial_l) \equiv dx^i (\partial_k) \cdot dx^j (\partial_l) = \delta_k^i \delta_l^j. \quad (10.33)$$

Ein allgemeines Element von  $(T_q^*)^{\otimes 2}$  kann als

$$\omega = \omega_{ij} dx^i \otimes dx^j \quad (10.34)$$

gegeben werden. Die Anwendung auf zwei Vektoren aus  $T_q$  ist wegen der Linearität eindeutig definiert:  $\omega(v_1, v_2) = \omega_{ij} v_1^i v_2^j$ .

Für  $p > 2$  haben wir entsprechend

$$\omega = \omega_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_p}. \quad (10.35)$$

Wir wollen die obigen Formeln nicht alle wiederholen – es funktioniert alles vollkommen analog, nur mit mehr Indizes.

Jetzt gehen wir über zu  **$p$ -Formen**. Die für  $p$ -Formen entscheidende extra Forderung ist die **totale Antisymmetrisie** d.h.

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji} \quad (10.36)$$

oder, für allgemeines  $p$ ,

$$\omega_{i_1 \dots i_p} = \text{sgn}(\sigma) \omega_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(p)}}. \quad (10.37)$$

Es ist üblich, für die jetzt relevanten antisymmetrischen Unterräume der Tensorprodukträume eine spezielle Basis zu nutzen:

$$dx^i \wedge dx^j \equiv dx^i \otimes dx^j - dx^j \otimes dx^i \quad (10.38)$$

oder, für allgemeines  $p > 2$ ,

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \equiv \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) dx^{i_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes dx^{i_{\sigma(p)}} \quad (10.39)$$

Damit kann man die allgemeine 2-Form als

$$\omega^2(x) = \frac{1}{2} \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j \quad (10.40)$$

schreiben und die allgemeine  $p$ -Form als

$$\omega^p(x) = \frac{1}{p!} \omega_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}. \quad (10.41)$$

Hier haben wir den Grad der Form als oberen Index explizit gemacht. Man kann dies auch weglassen, wenn klar ist, mit welchem Grad man es zu tun hat. Der Vorfaktor  $1/p!$  ist notwendig, um mit der obigen Normierung allgemeiner Tensorfelder konsistent zu sein.

In jeder Dimension  $d$  von  $M$  gibt es sogenannte **Top-Formen** mit  $p = d$ . Bei  $d = 3$  hat man z.B.

$$\omega^3 = \frac{1}{3!} \omega_{ijk} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k = \omega_{123} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \quad (10.42)$$

Zur besseren Intuition kann man sich überlegen, dass die 3-Form im  $\mathbb{R}^3$  mit  $\omega_{123} = 1$  durch den Ausdruck  $\omega^3(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  gerade das Volumen des Parallelepipedes aus  $\vec{a}, \vec{b}$  und  $\vec{c}$  misst, wenn man die euklidische Metrik zu Grunde legt.

Die Anwendung auf Vektoren bzw. Vektorfelder funktioniert genauso, wie bei 1-Formen: Seien  $v = v^i \partial_i$  und  $w = w^i \partial_i$  gegeben. Dann gilt z.B. für eine 2-Form  $\omega$ :

$$\omega^2(v, w) = \frac{1}{2} \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j (v^k \partial_k, w^l \partial_l) = \omega_{ij} v^i w^j. \quad (10.43)$$

## 10.4 Äußeres Produkt, Äußere Ableitung und Hodge-Operator

Man kann  $p$ -Formen multiplizieren. Dabei handelt es sich dabei um eine bilineare Abbildung, welche einem Paar von Elementen aus dem Raum der  $p$ -Formen und der  $k$ -Formen eine  $(p+k)$ -Form zuordnet:

$$(\omega^p, \omega^k) \longmapsto \omega^{p+k} \equiv \omega^p \wedge \omega^k. \quad (10.44)$$

Man nennt dies das **äußeres Produkt**. Es ist dem Tensorprodukt sehr ähnlich, bei dem man aus einem Tensor vom Rang  $p$  und einem Tensor vom Rang  $k$  durch Multiplikation der Komponenten einen Tensor vom Rang  $(p+k)$  macht:  $(t^{i_1 \dots i_p}, s^{j_1 \dots j_k}) \rightarrow u^{l_1 \dots l_{p+k}} \equiv t^{l_1 \dots l_p} s^{l_{p+1} \dots l_{p+k}}$ . Aber die detaillierte Definition hat einen anderen Vorfaktor:

$$\omega_{i_1 \dots i_{p+k}}^{p+k} \equiv \frac{(p+k)!}{p!k!} \omega_{[i_1 \dots i_p}^p \omega_{i_{p+1} \dots i_{p+k}]^k}. \quad (10.45)$$

Dieser Vorfaktor ist notwendig, um mit dem schlichten Nebeneinanderschreiben von Formen mit einem Wedge ( $\wedge$ ) konsistent zu sein. So möchte man natürlich, dass das äußere Produkt von  $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p$  mit  $dx^{p+1} \wedge \dots \wedge dx^{p+k}$  gleich

$$dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{p+k} \quad (10.46)$$

ist, und entsprechend für beliebige Indizes. Man kann das äußere Produkt auch axiomatisch durch die Forderungen der Assoziativität, Distributivität und Antisymmetrie definieren. Wir wollen das nicht weiter analysieren.

Ein weiteres zentrales Konzept im Zusammenhang mit Formen ist das der **äußere Ableitung**. Es ist dies eine lineare Abbildung, die den Grad der Form um Eins erhöht:

$$d: \omega^p \mapsto \omega^{p+1} = d\omega^p. \quad (10.47)$$

Sie ist explizit definiert durch

$$d(\omega_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}) = \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \omega_{i_1 \dots i_p} \right) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}. \quad (10.48)$$

Da man 0-Formen mit Funktionen identifiziert, ist das einfachste Beispiel

$$d(f) = \partial_i f dx^i = (df)_i dx^i = df. \quad (10.49)$$

Der letzte Ausdruck soll dabei die oben definierte spezielle 1-Form darstellen, die es zu jeder Funktion  $f$  gibt.

Aus unserer obigen Definition folgt die **Produktregel**. Sie lautet:

$$d(\omega^p \wedge \omega^k) = d\omega^p \wedge \omega^k + (-1)^p \omega^p \wedge d\omega^k. \quad (10.50)$$

Der Leser möge dies selbst herleiten oder wenigstens an einem einfachen Beispiel prüfen.

Eine wichtige Eigenschaft der äußeren Ableitung besteht darin, dass ihre zweifache Anwendung stets Null gibt:

$$d(d\omega) = 0. \quad (10.51)$$

Man rechnet dies leicht nach. Es liegt an der Symmetrie der zweifachen partiellen Ableitung im Zusammenspiel mit der Antisymmetrie von  $dx^i \wedge dx^j$ . Wir merken noch an, dass man die äußere Ableitung auch axiomatisch, ohne Bezug auf die explizite Komponentendarstellung definieren kann. Dazu muss man  $d(f) = df$ ,  $d^2 = 0$  und die Produktregel als Eigenschaften fordern.

Unsere zentrale physikalische Anwendung besteht darin, dass das 4-er Vektorpotential natürlicherweise eine 1-Form ist:

$$A = A_\mu dx^\mu. \quad (10.52)$$

Ihre äußere Ableitung

$$dA = \partial_\mu A_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (10.53)$$

ist gerade der uns schon vertraute Feldstärketensor, aufgefasst als 2-Form:

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (10.54)$$

Es gilt also

$$F = dA. \quad (10.55)$$

Es ist ein wichtiger Fakt, dass all dies keiner Metrik bedarf. Es funktioniert ganz allgemein auf Räumen, die lokal wie  $\mathbb{R}^d$  aussehen – also auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Hat man aber auch noch eine Metrik  $g_{ij}$ , so gibt es zusätzliche die natürliche Abbildung des Hodge-Star oder **Hodge-Operator**, welcher einer Form vom Grad  $p$  eine Form vom Grad  $d - p$  zuordnet:

$$\star : \omega^p \longrightarrow (\star\omega^p) = \omega^{d-p}. \quad (10.56)$$

Die Definition der neuen Form in Komponenten (und damit des Hodge-Operators) lautet

$$(\star\omega^p)_{i_1 \dots i_{d-p}} \equiv \frac{\sqrt{|\det g|}}{p!} (\omega^p)^{j_1 \dots j_p} \epsilon_{j_1 \dots j_p i_1 \dots i_{d-p}}. \quad (10.57)$$

Hierbei wurden rechts die Indizes von  $\omega^p$  mittels der inversen Metrik  $g^{ij}$  gehoben. Es gibt eine elegantere Definition Hodge-Operators, welche nicht auf die Komponenten zurückgreift, aber dafür haben wir hier keine Zeit.

Für uns entscheidendes Beispiel ist die Anwendung des Hodge-Operators auf die Feldstärke 2-Form  $F$ . Die Komponenten der so definierten 2-Form  $\star F$  bilden gerade den von uns weiter oben definierten dualen Feldstärketensor  $\tilde{F}$ :

$$(\star F)_{\mu\nu} = \frac{\sqrt{|\det \eta|}}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma} = \tilde{F}_{\mu\nu}. \quad (10.58)$$

## 10.5 Integration von p-Formen

Man kann eine  $p$ -Form natürlicherweise über eine  $p$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit integrieren. Wir wollen dies hier nicht mathematisch sauber sondern eher anwendungsbezogen und aus der Anschauung heraus erläutern. Insbesondere begnügen wir uns mit einer sehr vereinfachten Erklärung zur Untermannigfaltigkeit: Für uns ist eine allgemeine Untermannigfaltigkeit  $C_p$  einer Mannigfaltigkeit  $M$  eine Untermenge, die durch eigene Koordinaten  $\xi^1 \dots \xi^p$  parametrisiert ist, und deren Lage in  $M$  durch glatte Funktionen  $x^1(\xi) \dots x^d(\xi)$  definiert wird.

Wir beginnen wir mit dem einfachen Beispiel einer 2-Form (also  $p = 2$ ) in  $d = 3$  Dimensionen. In diesem Fall ist unsere Untermannigfaltigkeit schlicht eine Fläche  $C_p = C_2$  in  $M$ . Wir nähern diese durch die Vereinigung vieler kleiner Parallelogramme an, vgl. Abb. 45.

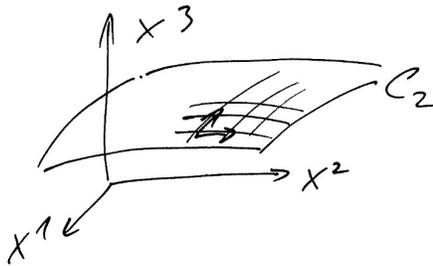


Abbildung 45: Hyperfläche  $C_2$ , approximiert durch viele kleine Parallelegramme.

Das Integral von  $\omega^2$  über  $C_2$  kann nun Limes sehr vieler sehr kleiner Parallelegramme wie folgt definiert werden:

$$\int_{C_2} \omega^2 \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \omega^2(\vec{v}_{i,1}, \vec{v}_{i,2}). \quad (10.59)$$

Hierbei haben wir rechts für jedes Parallelogramm  $i$  einfach die beiden Vektoren, die es aufspannen (vgl. Abb. 46) als Argumente in die Form  $\omega^2$  eingesetzt.

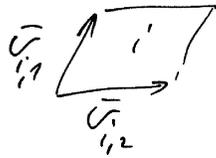


Abbildung 46: Skizze des  $i$ -ten Parallelegramms aus Abb. 45, aufgespannt durch die beiden Vektoren  $\vec{v}_{i,1}$  und  $\vec{v}_{i,2}$ .

Wir können auch noch expliziter werden, indem wir  $C_2$  durch Koordinaten  $\xi^1, \xi^2$  parametrisieren. Man denke dabei z.B. an die beiden Koordinaten  $\theta, \varphi$ , welche die Sphäre  $C_2 = S^2 \subset \mathbb{R}^3$  beschreiben. Wir wollen aber allgemein bleiben. Wir definieren unsere Parallelegramme angepasst an die Koordinaten, vgl. Abb. 47. Die Vektoren, welche die Parallelegramme aufspannen, sind dann explizit gegeben durch

$$v_{i,1} = \Delta \xi^1 \frac{\partial}{\partial \xi^1} \Big|_i, \quad v_{i,2} = \Delta \xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi^2} \Big|_i. \quad (10.60)$$

Hierbei soll das Symbol  $|_i$  andeuten, dass der Basisvektor jeweils an dem entsprechenden Eckpunkt des Parallelegramms  $i$  definiert ist.

Bevor wir diese Vektoren explizit in  $\omega^2$  einsetzen, müssen wir noch über ein kleines aber wichtiges Detail sprechen:  $\omega^2$  ist prinzipiell auf  $M$  definiert. Aber wenn wir es als 2-Form auf der Hyperfläche  $C_2$  auffassen wollen, dann müssen wir es dahin übertragen. Das geht anschaulich ganz einfach: Wenn uns jemand 2 Vektoren auf  $C_2$  gibt, dann können wir diese offensichtlich auch als Vektoren in  $M$  auffassen. Diesen Übergang nennt man ‘Pushforward.’ Jetzt, also auf  $M$ ,



Abbildung 47: Approximation einer Hyperfläche, parametrisiert durch  $\xi^1, \xi^2$  durch viele kleine Parallelogramme, welche kleinen Intervallen  $\Delta\xi_1, \Delta\xi^2$  der Koordinaten entsprechen.

kann man diese Vektoren in  $\omega^2$  einsetzen. Damit wissen wir also, wie  $\omega^2$  als bilineares Funktional auf den Vektoren auf  $C_2$  definiert ist. Dies nennt man den ‘Pullback’ von  $\omega^2$ . Jetzt haben wir mathematisch sauber unsere zu integrierende Top-Form auf  $C_2$ . Dieser Pullback funktioniert natürlich auch für allgemeines  $d$ -dimensionales  $M$  und  $C_p$  mit  $p \neq 2$ . Zur Vollständigkeit, obwohl wir es jetzt nicht brauchen, geben wir ohne Beweis die explizite Formel für den Pullback von  $\omega^2$  auf  $C_2$  an. Dazu seien  $x^\alpha, x^\beta$  usw. die Koordinaten auf  $M$  und  $\xi^i, \xi^j$  usw. die Koordinaten auf  $C_2$ . Es gilt

$$\omega_{ij}(\xi) = \omega_{\alpha\beta}(x(\xi)) \frac{\partial x^\alpha(\xi)}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^\beta(\xi)}{\partial \xi^j}. \quad (10.61)$$

Die Formel für  $p \neq 2$  is analog.

Jetzt können wir die Definition des Integral der Form über die Hyperfläche gemäß (10.59) ganz explizit auswerten:

$$\int_{C_2} \omega^2 = \lim \sum \frac{1}{2} \left[ \omega_{12} d\xi^1 \wedge d\xi^2 \left( \Delta\xi^1 \frac{\partial}{\partial \xi^1}, \Delta\xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi^2} \right) + \omega_{21} d\xi^2 \wedge d\xi^1 \left( \Delta\xi^1 \frac{\partial}{\partial \xi^1}, \Delta\xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi^2} \right) \right]. \quad (10.62)$$

Wir haben hier den Index  $i$  der verschiedenen Parallelogramme unterdrückt, um den Ausdruck nicht zu unübersichtlich zu machen. Man findet dann sofort

$$\int_{C_2} \omega^2 = \lim \sum \omega_{12} \Delta\xi^1 \Delta\xi^2 = \int d\xi^1 d\xi^2 \omega_{12}, \quad (10.63)$$

wobei wir im letzten Schritt die übliche Definition des Riemannsches Integrals benutzt haben.

Eine völlig analoge Diskussion kann man für beliebiges  $p$  und  $d$  führen. Dabei werden aus den kleinen Parallelogrammen natürlich kleine Parallelepipede, die aber immer noch durch  $p$  Vektoren aufgespannt werden, welche man als Argumente in  $\omega^p$  einsetzen kann. Es folgt

$$\int_{C_p} \omega^p = \int d\xi^1 \cdots d\xi^p \omega_{12 \dots p}(\xi^1, \dots, \xi^p). \quad (10.64)$$

Wir bemerken, dass unser  $\omega^p$  aus Sicht der  $p$ -dimensionalen Hyperfläche eine Top-Form ist. Wir müssen also immer nur Top-Formen integrieren. Top-Formen kann man immer als  $\omega_{i_1 \dots i_p} = \epsilon_{i_1 \dots i_p} \cdot f$  schreiben, wobei  $f$  eine Funktion ist. Diese wird am Ende einfach nur riemannsch integriert.

Schließlich wollen wir noch kurz die Koordinatenunabhängigkeit unserer Definition des Integrals von Formen über Hyperflächen diskutieren. Es gilt zunächst

$$\int d\xi^1 \cdots d\xi^p \omega_{1 \dots p} = \int d\xi'^1 \cdots d\xi'^p \left| \det \left( \frac{\partial \xi^i}{\partial \xi'^j} \right) \right| \omega_{1 \dots p}, \quad (10.65)$$

wobei wir einfach den bekannten Satz zum Koordinatenwechsel bei Mehrfachintegralen benutzt haben. Weiterhin haben wir gesehen, wie sich die Komponenten von Vektorfeldern unter Koordinatenwechsel transformieren. Die Komponenten von Formen müssen sich gerade entgegengesetzt transformieren, damit die Anwendung von Formen auf Vektoren invariant ist. Also:

$$\omega'_{i_1 \dots i_p} = \omega_{j_1 \dots j_p} \left( \frac{\partial \xi^{j_1}}{\partial \xi'^{i_1}} \right) \cdots \left( \frac{\partial \xi^{j_p}}{\partial \xi'^{i_p}} \right). \quad (10.66)$$

Da nun aber  $\omega^p$  eine Top-Form ist, gilt  $\omega_{j_1 \dots j_p}^p \sim \epsilon_{j_1 \dots j_p}$ , so dass man mit einer der bekannten Definitionen der Determinanten findet:

$$\omega'_{1 \dots p} = \left| \det \left( \frac{\partial \xi^i}{\partial \xi'^j} \right) \right| \omega_{1 \dots p}. \quad (10.67)$$

Setzen wir dies rechts in (10.65) ein, so sehen wir, dass unsere Integral-Definition in der Tat in jedem Koordinatensystem gilt.

Jetzt haben wir genug Vorarbeiten geleistet, um den folgenden zentralen Satz zu würdigen: Der **Verallgemeinerte Satz von Stokes** besagt, dass

$$\int_{\partial C_p} \omega^{p-1} = \int_{C_p} d\omega^{p-1}. \quad (10.68)$$

Dass heißt, das Integral einer  $(p-1)$ -Form über den Rand einer  $p$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeit ist gleich dem Integral der äußeren Ableitung dieser Form über die Untermannigfaltigkeit selbst, vgl. Abb. 48. Wie Sie zum Teil in den Übungen sehen werden, sind die Sätze von Gauß, Stokes und der Fundamentalsatz der Analysis Spezialfälle dazu. Eine einfache Herleitung findet sich z.B. in [10].

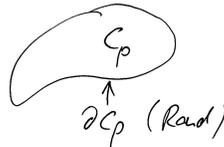


Abbildung 48: Illustration zum verallgemeinerten Satz von Stokes.

## 10.6 Wirkung der Elektrodynamik und Maxwellgleichungen

Jetzt kommen wir endlich zur Anwendung der Formensprache auf die Elektrodynamik. Wir können unsere Anfangs gegebene Herleitung der Wirkung wiederholen, aber noch kompakter und eleganter.

Unser Startpunkt war, dass Teilchen durch ihre Weltlinie charakterisiert sind. Eine Weltlinie ist eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit und es ist demnach natürlich, dass unser zum Teilchen gehöriges Feld eine 1-Form ist und die Wirkung die Form

$$S_{WW} = e \int_{WL} A \quad (10.69)$$

annimmt. Bei einer Transformation  $A \rightarrow A + d\chi$ , mit einer 0-Form  $\chi$ , ändert sich  $S_{WW}$  nur um Randterme:

$$\delta S_{WW} = e \int_i^f d\chi = e (\chi(x_f) - \chi(x_i)) . \quad (10.70)$$

Hier haben wir im zweiten Schritt den verallgemeinerten Satz von Stokes angewandt, wobei die Vereinigung von Anfangspunkt  $i$  und Endpunkt  $f$  der Weltlinie gerade deren Rand bildet. Das ‘Integral’ der 0-Form  $\chi$  über eine aus mehreren Punkten bestehende Untermannigfaltigkeit ist gerade die Summe der entsprechenden Funktionswerte, mit passenden relativen Vorzeichen. Klarerweise beeinflusst eine Variation der Weltlinie zwischen  $i$  und  $f$  den Wert von (10.70) nicht. Also bleiben die Bewegungsgleichungen unverändert.

Wir erklären jetzt  $A \rightarrow A + d\chi$  zur Eichsymmetrie.  $F \equiv dA$  ist die natürliche eichinvariante Größe zu  $A$ :

$$\delta F = d(d\chi) = 0 . \quad (10.71)$$

Wir erklären somit die 2-Form  $F$  zu unserer Feldstärke.

Die Wirkung für  $F$  soll die Form

$$S = \int_{\mathbb{R}^{1,3}} \mathcal{L}(F) \quad (10.72)$$

annehmen, wobei  $\mathcal{L}$  eine 4-Form sein muss. Dafür haben wir zwei naheliegende Optionen:  $F \wedge F$  und  $F \wedge \star F$ . In Komponenten ausgeschrieben entsprechen sie, bis auf Vorfaktoren, den Optionen  $F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$  und  $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ . Die vermeintliche dritte Option  $\star F \wedge \star F$  gibt es nicht, weil

$$\star F \wedge \star F \sim F \wedge F . \quad (10.73)$$

Dies kann man leicht explizit nachrechnen. Außerdem ist die erste Option eine totale Ableitung,

$$F \wedge F = dA \wedge dA = d(A \wedge dA) \quad (10.74)$$

und somit als Wirkung ungeeignet: Wir haben nämlich

$$\int F \wedge F = \int d(A \wedge dA) = \oint A \wedge dA , \quad (10.75)$$

wobei wir den  $3d$ -Rand im Unendlichen wählen können, so dass die Wirkung bei Variation des Feldes immer unverändert bleibt und wir keine Bewegungsgleichungen bekommen.

Also bleibt nur die Option  $\mathcal{L} \sim F \wedge \star F$ . Wir wollen jetzt explizit nachrechnen, dass dies der vertrauten Wahl  $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$  entspricht: Wir haben zunächst

$$F \wedge \star F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge \frac{1}{2} (\star F)_{\rho\sigma} dx^\rho \wedge dx^\sigma \quad (10.76)$$

und weiterhin

$$\frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge \frac{1}{2} (\star F)_{\rho\sigma} dx^\rho \wedge dx^\sigma = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} \frac{1}{2} \epsilon_{\rho\sigma\alpha\beta} F^{\alpha\beta} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma . \quad (10.77)$$

Wegen der totalen Antisymmetrie können wir gemäß

$$dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma = -\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} dx^0 \wedge \dots \wedge dx^3 \quad (10.78)$$

ersetzen. Dann benutzen wir

$$-\epsilon_{\rho\sigma\alpha\beta}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = 2(\delta_\alpha^\mu\delta_\beta^\nu - \delta_\alpha^\nu\delta_\beta^\mu), \quad (10.79)$$

wobei das negative Vorzeichen in den beiden letzten Gleichungen wegen des Hebens der Indizes von  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  mit der Lorentz-Metrik auftritt. Es folgt schließlich

$$F \wedge \star F = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} dx^0 \wedge \dots \wedge dx^3. \quad (10.80)$$

Nach unserer Erklärung des Integrals von Formen gilt

$$\int f dx^0 \wedge \dots \wedge dx^3 = \int d^4x f, \quad (10.81)$$

wobei  $f$  eine beliebige Funktion ist und rechts das Riemannsches Integral steht. Damit haben wir jetzt also ganz explizit nachgerechnet, dass unsere vertraute Wirkung der Elektrodynamik in Formensprache als

$$S = -\frac{1}{2} \int F \wedge \star F + e \int_{WL} A \quad \text{mit} \quad F = dA \quad (10.82)$$

geschrieben werden kann.

Der Übergang zur kontinuierlichen Ladungsverteilung liefert

$$S = \int \left( -\frac{1}{2} F \wedge \star F + A \wedge j^3 \right), \quad (10.83)$$

wobei die Stromdichte jetzt durch eine 3-Form  $j^3$  beschrieben wird. Sie hängt mit dem vertrauten 4-er Vektor der Stromdichte gemäß

$$j_{\mu\nu\rho}^3 \sim \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} j^\sigma \quad (10.84)$$

zusammen, wobei wir die Fixierung der Konstanten dem Leser überlassen.

Ab jetzt wollen wir den Index '3' weglassen,  $j^3 \rightarrow j$ , und im Folgenden das Symbol  $j$  immer als 3-Form deuten. Dass eine 3-Form  $j$  mathematisch die natürliche Größe ist, um eine Stromdichte zu beschreiben, sieht man wie folgt: Die Stromdichte  $j$  soll festlegen, wieviel Ladung in einem gegebenen Raumvolumen ist. Letzteres ist eine 3-Fläche in  $\mathbb{R}^{1,3}$ . Man sollte demnach  $j$  also natürlicherweise über eine 3-Fläche  $\Sigma$  integrieren können, um diese Ladung zu berechnen, vgl. Abb. 49. Explizit haben wir

$$Q = \int_{\Sigma} j \quad (10.85)$$

wobei  $j$  eine 3-Form und  $\Sigma$  eine 3d Untermannigfaltigkeit bzw. Hyperfläche ist.

Die Bewegungsgleichungen folgen wie immer durch Variation von

$$S = \int \left( -\frac{1}{2} F \wedge \star F + A \wedge j \right), \quad (10.86)$$

aufgefasst als Funktional von  $A$ . Man findet

$$\delta S = \int \left( -\frac{1}{2} [\delta F \wedge \star F + F \wedge \star \delta F] + \delta A \wedge j \right) \quad (10.87)$$



Abbildung 49: Stromdichte im  $\mathbb{R}^{1,3}$ . Die Ladung in einem Teil des Raumes zu einer gewissen Zeit wird durch ein Integral über die 3d Hyperfläche  $\Sigma$  berechnet.

wobei

$$\delta F \wedge \star F + F \wedge \star \delta F = 2\delta F \wedge \star F \quad (10.88)$$

Diese letzte Relation folgt daraus, dass man unsere obige Analyse von  $F \wedge \star F$  mit zwei verschiedenen Formen, also z.B. mit  $F \wedge \star G$  wiederholt. Dies liefert  $F \wedge \star G = F_{\mu\nu}G^{\mu\nu}/2$ , der Ausdruck ist also symmetrisch in  $F$  und  $G$ .

Wir finden somit

$$\delta S = \int (-\delta F \wedge \star F + \delta A \wedge j) = \int (-d\delta A \wedge \star F + \delta A \wedge j) = \int (-\delta A \wedge d\star F + \delta A \wedge j) , \quad (10.89)$$

wobei wir im letzten Schritt partiell integriert und den Randterm weggelassen haben. Das Vorzeichen hat nicht gewechselt, weil

$$d(\delta A \wedge \star F) = d\delta A \wedge \star F - \delta A \wedge d\star F , \quad (10.90)$$

vgl. die Produktregel für Formen. Damit haben wir schließlich

$$\delta S = \int \delta A \wedge (-d\star F + j) . \quad (10.91)$$

Es folgen die beiden Maxwell-Gleichungen bzw. die Maxwell-Gleichung und die Bianchi-Identität, welche sich aus  $d^2 = 0$  und  $F = dA$  ergibt:

$$d\star F = j , \quad dF = 0 . \quad (10.92)$$

Unter Einbeziehung magnetischen Ladungen haben wir

$$d\star F = j_e , \quad dF = j_m \quad (10.93)$$

oder, in der dualen, magnetischen Formulierung

$$d\tilde{F} = j_e , \quad d\star\tilde{F} = -j_m . \quad (10.94)$$

Wir erinnern, dass jetzt die Beziehung  $\tilde{F} = d\tilde{A}$  eigentlich  $j_e = 0$  erzwingt. Wir müssen also an der Stelle der elektrischen Ladungen ein ‘Loch’ lassen oder die Formulierung wechseln.

Viele Aussagen der Elektrodynamik lassen sich gewinnbringend mit Formen darstellen. Zum Beispiel können wir eine 1-Form  $E$  mit Komponenten  $E_i = (\vec{E})_i$  und eine 2-Form  $B$  mit Komponenten  $B_{ij} = \epsilon_{ijk}(\vec{B})^k$  einführen. Dann gilt

$$F = -dx^0 \wedge E + B . \quad (10.95)$$

Wir überlassen es den Übungen, das zu prüfen.

Des Weiteren kann man die Gleichung  $d \star F = j$  mit dem verallgemeinerten Satz von Stokes direkt über eine raumartige Hyperfläche mit Rand  $\Sigma$  integrieren. Es folgt

$$\oint_{\Sigma} \star F = Q. \quad (10.96)$$

Der Leser möge dies als Übung mit der gewöhnlichen Integralform der entsprechenden Maxwell-Gleichung in Verbindung bringen.

## 11 Dynamik geladener Teilchen und Energie-Impuls-Erhaltung

### 11.1 Bewegungsgleichungen für Teilchen im Feld

Wir wollen uns jetzt der Bewegung von Teilchen in einem fest vorgegeben (im Allgemeinen zeitabhängigen) elektromagnetischen Feld zuwenden. Dazu brauchen wir die reine Feldwirkung natürlich nicht – relevant sind nur die Wirkungsterme für die Materie, im einfachsten Fall ein Teilchen oder Massenpunkt, sowie für dessen Wechselwirkung mit dem Feld. Wir haben diese beiden Terme früher motiviert und diskutiert. Sie lauten

$$S = S_{WW} + S_{\text{Materie}} = e \int_{WL} A_{\mu} dx^{\mu} - m \int_{WL} ds = \int d\lambda \left( e A_{\mu} \dot{x}^{\mu} - m \sqrt{-\dot{x}^2} \right). \quad (11.1)$$

Hier haben wir der letzten Formulierung die Weltlinie ‘WL’ durch einen beliebigen Parameter  $\lambda$  parametrisiert. Der Punkt bezeichnet Ableitungen nach  $\lambda$ .

Wie üblich fordern wir das Verschwinden der Variation bezüglich  $x^{\mu}$ :

$$0 \stackrel{!}{=} \int d\lambda \left( e A_{\mu} \delta \dot{x}^{\mu} + e \partial_{\nu} A_{\mu} \delta x^{\nu} \dot{x}^{\mu} + m \frac{\dot{x}_{\mu} \delta \dot{x}^{\mu}}{\sqrt{-\dot{x}^2}} \right). \quad (11.2)$$

Wir können dies wie folgt umschreiben:

$$0 = \int d\lambda \left( -e \frac{d}{d\lambda} (A_{\mu}) \delta x^{\mu} + e \partial_{\mu} A_{\nu} \dot{x}^{\nu} \delta x^{\mu} - m \dot{x}_{\mu} \delta x^{\mu} \right). \quad (11.3)$$

Dabei haben wir im ersten Term partiell integriert und Beiträge vom Rand wegelassen. Im zweiten Term haben wir nur die Indizes vertauscht. Im dritten Term haben wir ebenfalls partiell integriert und außerdem benutzt, dass

$$u_{\mu} = \frac{dx_{\mu}}{d\tau} \quad \text{und} \quad d\tau = d\lambda \sqrt{-\dot{x}^2}. \quad (11.4)$$

Die Analyse dieses letzten Terms wiederholt im Wesentlichen das am Ende von Kap. 3.3 Gesagte.

Schließlich schreiben wir noch die Ableitung von  $A_{\mu}$  nach  $\lambda$  mit der Kettenregel weiter aus und finden

$$0 = \int d\lambda \left( -e (\partial_{\nu} A_{\mu}) \dot{x}^{\nu} \delta x^{\mu} + e (\partial_{\mu} A_{\nu}) \dot{x}^{\nu} \delta x^{\mu} - m \dot{x}_{\mu} \delta x^{\mu} \right). \quad (11.5)$$

Da  $\delta x^\mu$  beliebig ist, muss der Koeffizient davon verschwinden. Dies liefert

$$m\dot{u}_\mu = eF_{\mu\nu}\dot{x}^\nu. \quad (11.6)$$

Anders geschrieben, hat man also

$$m\frac{du_\mu}{d\tau} = eF_{\mu\nu}u^\nu \quad \text{oder auch} \quad \frac{dp^\mu}{d\tau} = eF^{\mu\nu}u_\nu. \quad (11.7)$$

Für die nichtrelativistische Formulierung müssen wir diese Vektorgleichung in ihre Teile mit  $\mu = 0$  und  $\mu = 1, 2, 3$  zerlegen. Für  $\mu = 0$  finden wir

$$\frac{d\varepsilon}{d\tau} = eF^{0i}u_i = e\vec{E}\gamma\vec{v}, \quad (11.8)$$

wobei wir die Energie des Teilchens mit  $\varepsilon$  bezeichnet haben, um sie nicht mit dem Betrag der Feldstärke  $E = |\vec{E}|$  zu verwechseln. Mit  $dt = \gamma d\tau$  können wir dies auch als

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = e\vec{E} \cdot \vec{v} \quad (11.9)$$

schreiben, was natürlich gerade die Energieerhaltung bei der Bewegung eines Teilchens im  $E$ -Feld beschreibt.

Der Anteil mit  $\mu = 1, 2, 3$  lautet

$$\left(\frac{d\vec{p}}{d\tau}\right)^i = eF^{i0}u_0 + eF^{ij}\gamma v_j, \quad (11.10)$$

wobei  $F^{i0} = (-\vec{E})^i$ ,  $u_0 = -\gamma$  und  $F^{ij} = \epsilon^{ijk}B_k$  (siehe Kap. 5.5). Damit ergibt sich weiterhin

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + e\vec{v} \times \vec{B} \equiv \vec{F}_L, \quad (11.11)$$

also die vermutlich schon aus der Experimentalphysik vertraute Gleichung für die **Lorentz-Kraft**. Die Formel mit  $c \neq 1$  folgt nach  $\vec{v} \rightarrow \vec{v}/c$ . Dies kann man auch daran ablesen,  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  die gleiche Einheit haben und der Relativkoeffizient deshalb dimensionslos sein muss.

Als wichtige Beobachtung aus der Form der Lorentz-Kraft halten wir fest: Der magnetische Anteil trägt nicht zur Energieänderung der Teilchen bei, weil  $(\vec{v} \times \vec{B}) \perp \vec{v}$ .

Zum Abschluss skizzieren wir noch eine alternative Herleitung: Man kann aus obigem  $S$  zunächst die Lagrange-Funktion gewinnen:

$$L = -m\sqrt{1 - \vec{v}^2} - e\phi + e\vec{A} \cdot \vec{v}. \quad (11.12)$$

Die gewohnten Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = 0 \quad (11.13)$$

geben dann direkt die eben diskutierte Formel für  $\vec{F}_L$ . Allerdings hatte unsere Herleitung den Vorteil, dass wir zunächst die kovariante Form gewonnen haben, welche uns später noch nützlich sein wird.

## 11.2 Beispiel: Homogene Felder

Wir wollen als Beispiel die Bewegung in homogenen Feldern analysieren.

Wir beginnen mit dem Fall  $\vec{B} = 0$  und  $\vec{E} = E\hat{e}_1$ . Die Anfangsbedingung sei  $\vec{v}(0) = 0$ . Wir haben es dann mit einem 1-dimensionalen Problem zu tun. Die entsprechende Differentialgleichung

$$\frac{dp}{dt} = eE \quad (11.14)$$

lässt sich sofort integrieren:

$$p(t) = eEt. \quad (11.15)$$

Mit

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2}} \quad (11.16)$$

nimmt (11.15) die Form

$$\frac{v}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{t}{l} \quad \text{an, wobei} \quad l \equiv \frac{m}{eE} \quad (11.17)$$

die typische Zeit bzw. Längenskala des Problems darstellt. Alle Parameter gehen nur über  $l$  in die Dynamik ein. Es ist deshalb naheliegend  $\hat{t} = t/l$  und  $\hat{x} = x/l$  zu definieren, so dass unsere Lösung die einfache Form

$$\frac{v}{\sqrt{1-v^2}} = \hat{t} \quad (11.18)$$

annimmt. Auflösen nach  $v$  liefert

$$v = \frac{\hat{t}}{\sqrt{1+\hat{t}^2}}. \quad (11.19)$$

Dies kann man als

$$d\hat{x} = \frac{\hat{t}d\hat{t}}{\sqrt{1+\hat{t}^2}} \quad (11.20)$$

umschreiben. Integration liefert

$$\hat{x} = \sqrt{1+\hat{t}^2} - 1. \quad (11.21)$$

Erwartungsgemäß findet man bei kleinen Zeiten das nichtrelativistische Verhalten  $\hat{x} \sim \hat{t}^2$ .

Die Leser\*innen mögen selbständig die Verbindung zur Übungsaufgabe mit dem linearen Potential (Blatt 3) herstellen sowie den Fall allgemeiner Anfangsbedingungen analysieren.

Jetzt wenden wir uns einem zweiten einfachen Spezialfall zu: Sei diesmal  $\vec{E} = 0$  sowie  $B_{1,2} = 0$ , aber  $B_3 = B \neq 0$ . Wir wollen außerdem mit  $v_3(0) = 0$  starten. In dieser Situation folgt zunächst aus

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{v} \times \vec{B}, \quad (11.22)$$

dass die Kraft keine Komponente in 3-Richtung besitzt. Also wird nur eine Bewegung in der 1-2-Ebene stattfinden. Es erweist sich als vorteilhaft, die Bewegung in der Ebene komplex zu parametrisieren. Wir ersetzen die 2d-Vektoren  $\vec{x}$  und  $\vec{v}$  gemäß

$$\vec{x} \rightarrow X \equiv x^1 + ix^2 \in \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2 \quad \text{sowie} \quad \vec{v} \rightarrow V \equiv v^1 + iv^2. \quad (11.23)$$

Des Weiteren betrachten wir den Ausdruck

$$\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)^i = \epsilon^{ijk} v^j B^k. \quad (11.24)$$

Wir wissen, dass wir uns auf  $i = 1, 2$  und  $j = 1, 2$  einschränken können. Damit folgt

$$\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)^i = \epsilon^{ij3} v^j B = B \begin{pmatrix} v^2 \\ -v^1 \end{pmatrix}^i. \quad (11.25)$$

Den im letzten Ausdruck auftretenden 2d Vektor können wir, wie oben  $\vec{x}$  und  $\vec{v}$ , komplex beschreiben:

$$\begin{pmatrix} v^2 \\ -v^1 \end{pmatrix}^i \rightarrow v^2 + i(-v^1) = -i(v^1 + iv^2) = -iV. \quad (11.26)$$

Nach dieser Vorarbeit nimmt (11.22) die einfache komplexe Form

$$\frac{d}{dt} \left( m \frac{V}{\sqrt{1 - |V|^2}} \right) = -iVB e \quad (11.27)$$

an. Weil sich die Energie nicht ändert, gilt  $|\vec{v}| = |V| = \text{const}$ . Dadurch können wir die Konstante (physikalisch die Kreisfrequenz)

$$\omega = \frac{eB\sqrt{1 - |V|^2}}{m} = \frac{eB}{\varepsilon} \quad (11.28)$$

definieren. Jetzt nimmt unsere Differentialgleichung die Form

$$\dot{V} = -i\omega V \quad (11.29)$$

an. Die Lösung ist

$$V = V_0 e^{-i\omega t}, \quad (11.30)$$

also eine Kreisbewegung in der Ebene, vgl. Abb. 50. Bei allgemeineren Anfangsbedingungen und Richtung von  $B$  ergibt sich eine spiralförmige Bewegung in der durch  $B$  vorgegebenen Richtung, vgl. Abb. 51. Ursache ist die Überlagerung einer gleichförmigen Bewegung parallel zu  $\vec{B}$ .



Abbildung 50: Kreisbewegung eines geladenen Teilchens in der zum  $B$ -Feld orthogonalen Ebene.

### 11.3 Energie-Impuls-Tensor eines Teilchenstroms

Wir erinnern uns an die Formel für die Dichte des elektrischen Stroms,

$$j^\mu = \rho v^\mu, \quad (11.31)$$



Abbildung 51: Allgemeine Bewegung eines geladenen Teilchens im Magnetfeld.

mit der Ladungsdichte  $\rho$ . Ganz analog können wir eine Teilchenzahldichte  $n$  und eine entsprechende Teilchenzahl-Stromdichte

$$j_n^\mu = n v^\mu \quad (11.32)$$

definieren. Die Formel für die Teilchenzahldichte ist

$$n = \frac{dN}{dV} = \frac{\gamma dN}{dV_r} = \gamma n_r, \quad (11.33)$$

wobei wir nach dem zweiten Gleichheitszeichen das infinitesimale Volumen  $dV_r$  im Ruhesystem des Stroms eingeführt haben. Im letzten Ausdruck benutzen wir schließlich die von uns als  $n_r$  bezeichnete Teilchendichte im Ruhesystem des Stroms.

Es gilt außerdem

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{dt} = \frac{dx^\mu}{\gamma d\tau} = u^\mu \frac{1}{\gamma}. \quad (11.34)$$

Damit gewinnen wir den Ausdruck

$$j_n^\mu = n_r u^\mu. \quad (11.35)$$

Bei all dem eben Gesagten wollen wir an einen homogenen Strom exakt parallel fliegender Teilchen denken, also mit verschwindenden Relativgeschwindigkeiten, siehe Abb. 52.



Abbildung 52: Homogener Teilchenstrom.

Wenn wir uns nicht für den Strom der Teilchenzahl oder Ladung sondern z.B. für den Strom der Impulskomponente  $p^\nu$  interessieren, dann müssen wir nur die Teilchenzahl-Stromdichte mit dieser Größe multiplizieren:

$$T^{\mu\nu} \equiv j_n^\mu p^\nu. \quad (11.36)$$

Dieses Objekt ist bekannt als der **Energie-Impuls-Tensor** und spielt in der Feldtheorie ganz allgemein eine enorme Rolle. Er ist ein Tensorfeld, weil er per Definition das Produkt zweier Vektorfelder ist. Im Moment sind diese beiden Felder,  $j_n^\mu$  und  $p^\nu$ , konstant, aber wir werden

natürlich auch Teilchenströme betrachten, bei denen Dichte und Impuls der einzelnen Teilchen in der Raumzeit langsam variieren.

Der Tensor  $T^{\mu\nu}$  ist also die Kombination von vier Stromdichten. Der ersten Index ist der Index der Stromdichte. Der zweite Index nummeriert die vier verschiedenen Stromdichten und damit die Größen, welche strömen: die Komponenten  $p^\nu$ , des von den Teilchen getragenen Impulses.<sup>3</sup> Mit

$$p^\nu = mu^\nu, \quad (11.37)$$

wobei wir Gleichheit aller Massen voraussetzen, gilt

$$T^{\mu\nu} = j_n^\mu p^\nu = n_r u^\mu m u^\nu = \rho_r u^\mu u^\nu. \quad (11.38)$$

Hier haben wir im letzten Schritt die Massendichte  $\rho_r$  im Ruhesystem eingeführt. Sie ist natürlich äquivalent zur Energiedichte.

Ladung und Teilchenzahl sind erhalten:

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad \partial_\mu j_n^\mu = 0. \quad (11.39)$$

Wegen Energie-/Impulserhaltung erwarten wir im kraftfreien Fall auch  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$  für jedes  $\nu$ . Doch das ändert sich, falls unser Strom einem (zur Einfachheit als homogenen angenommen) Kraftfeld ausgesetzt ist. Wir wollen als nächstes das Vektorfeld  $\partial_\mu T^{\mu\nu}$  berechnen. Natürlich können wir dies in jedem System tun und das Vektorfeld dann zurückboosten. Wir wählen zur Berechnung das Ruhesystem des Stroms. Wegen unserer Homogenitäts-Annahme finden wir

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \partial_t T^{0\nu} = \partial_t (n_r m u^0 u^\nu). \quad (11.40)$$

Es gilt

$$\partial_t u^0 = \partial_t \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{v \partial_t v}{\sqrt{1-v^2}^3} = 0. \quad (11.41)$$

Dies gilt selbst dann, wenn  $\partial_t v \neq 0$ , weil im Ruhesystem  $v = 0$  gilt. Damit finden wir

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = n_r u^0 \partial_t p^\nu = n_r \frac{dp^\nu}{dt} = f^\nu. \quad (11.42)$$

Hier haben wir benutzt, dass im Ruhesystem  $u^0 = 1$  gilt und im letzten Schritt die Kraftdichte  $f^\nu$  eingeführt oder, wenn man so will, definiert. Der Begriff ist angebracht, das es hier klarerweise um den Quotienten aus Kraft und Volumen handeln.

Jetzt kehren wir zurück zu einem beliebigen System. Dazu müssen wir nur eine Gleichung finden, welche kovariant ist und im Ruhesystem des Teilchenstroms mit (11.42) übereinstimmt. Eine solche Gleichung ist durch

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = n \frac{dp^\nu}{dt} = n_r \frac{dp^\nu}{d\tau} = f^\nu \quad (11.43)$$

---

<sup>3</sup>Unsere Konvention folgt der Standardliteratur der Quantenfeldtheorie, vgl. die Bücher von Peskin/Schröder und Weinberg. Allerdings ist die umgekehrte Konvention, bei der der zweite Index von  $T^{\mu\nu}$  der Stromdichte-Index ist, auch verbreitet.

gegeben. Wir bemerken noch, dass auch der zweite Ausdruck entgegen dem Anschein kovariant ist, weil  $n = dN/dV$  und das Produkt  $dVdt$  invariant ist. Alles Gesagte überträgt sich auch auf inhomogene Situationen, so lange die Längenskala der Inhomogenität groß gegen den Teilchenabstand ist. Es überträgt sich auch auf Gase mit nichtverschwindender Relativgeschwindigkeit zwischen den Teilchen, also mit  $T \neq 0$  und  $p \neq 0$ . Dann gilt allerdings ein anderer Ausdruck für den Energie-Impuls-Tensor:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) u^\mu u^\nu + p\eta^{\mu\nu}, \quad (11.44)$$

wobei  $p$  den Druck bezeichnet. Wir werden diese Formel nicht herleiten.

Als Abschlussbemerkung erinnern wir noch einmal, dass  $T^{\mu\nu}$  den Fluss der Impulsdichte durch die Raumzeit beschreibt. Im Festkörper tragen zu diesem Fluss vor allem auch Spannungen bei. Deshalb heißt  $T^{\mu\nu}$  oft auch Spannungstensor bzw. im Englischen Stress-Energy-Tensor.

## 11.4 Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes

Wir erinnern zunächst an die oben hergeleitete Bewegungsgleichung für ein Teilchen im Feld:

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = eF^{\mu\nu}u_\nu. \quad (11.45)$$

Eine äquivalente Formulierung ist

$$\frac{dp^\mu}{dt} = eF^{\mu\nu}v_\nu \quad \text{mit} \quad v_\nu = \frac{dx_\nu}{dt}. \quad (11.46)$$

Statt für ein einzelnes Teilchen können wir dies gleich für einen ganzen Teilchenstrom aufschreiben, indem wir beide Seiten mit  $dN/dV = n$  multiplizieren:

$$f^\mu = F^{\mu\nu}j_\nu. \quad (11.47)$$

Wenn wir den Strom rechts mittels Maxwell-Gleichungen ersetzen, finden wir weiterhin

$$f^\mu = -F^{\mu\nu}\partial^\rho F_{\rho\nu}. \quad (11.48)$$

Diese Gleichung sagt aus, dass die Kraftdichte durch das Feld verursacht wird. Wir wissen aber aus dem letzten Kapitel, dass man die Kraftdichte auch als Nichterhaltung bzw. als Quelle des Impulsstroms auffassen kann:

$$f^\mu = \partial_\nu T_{\text{Materie}}^{\nu\mu}. \quad (11.49)$$

Hier haben wir dem Energie-Impuls-Tensor den Index ‘Materie’ gegeben haben, da wir zusätzlich gleich ein analoges Objekt für das Feld definieren werden. Damit können wir auch schreiben

$$\partial_\nu T_{\text{Materie}}^{\nu\mu} + F^{\mu\nu}\partial^\rho F_{\rho\nu} = 0. \quad (11.50)$$

Wenn es uns nun gelingt, die rechte Seite in die Form  $-\partial_\nu T_{\text{Feld}}^{\nu\mu}$  zu bringen, dann haben wir insgesamt

$$\partial_\nu [T_{\text{Materie}}^{\nu\mu} + T_{\text{Feld}}^{\nu\mu}] = 0. \quad (11.51)$$

Dies würde bedeuten, dass die Nichterhaltung des Energie-Impuls-Tensors der Materie gerade durch die Nichterhaltung des Energie-Impuls-Tensors des Feldes kompensiert. Anders gesagt beschreibt (11.51) die Energie-Impuls-Erhaltung des Gesamtsystems.

Versuchen wir die gewünschte Form zu erreichen: Wir haben zunächst

$$F^{\mu\nu} \partial^\rho F_{\rho\nu} = \partial^\rho (F^{\mu\nu} F_{\rho\nu}) - \partial^\rho (F^{\mu\nu}) F_{\rho\nu}. \quad (11.52)$$

Den zweiten Term können wir wegen der Antisymmetrie von  $F_{\rho\nu}$  als

$$\partial^\rho (F^{\mu\nu}) F_{\rho\nu} = \frac{1}{2} (\partial^\rho (F^{\mu\nu}) F_{\rho\nu} - \partial^\nu (F^{\mu\rho}) F_{\rho\nu}) \quad (11.53)$$

umschreiben. Jetzt benutzen wir noch die homogenen Maxwell-Gleichungen, die Produktregel, und schreiben das Ergebnis schließlich als Divergenz um:

$$\frac{1}{2} (\partial^\rho (F^{\mu\nu}) F_{\rho\nu} - \partial^\nu (F^{\mu\rho}) F_{\rho\nu}) = \frac{1}{2} \partial^\mu (F^{\rho\nu}) F_{\rho\nu} = \frac{1}{4} \partial^\mu (F^{\rho\nu} F_{\rho\nu}) = \frac{1}{4} \partial^\rho (\delta_\rho^\mu F^{\sigma\nu} F_{\sigma\nu}). \quad (11.54)$$

Zusammenfassend lesen wir aus (11.52)-(11.54) also ab, dass

$$F^{\mu\nu} \partial^\rho F_{\rho\nu} = \partial_\rho T_{\text{Feld}}^{\rho\mu} \quad (11.55)$$

mit

$$T_{\text{Feld}}^{\rho\mu} \equiv F^\mu{}_\nu F^{\rho\nu} - \frac{1}{4} \eta^{\rho\mu} F^{\sigma\nu} F_{\sigma\nu}. \quad (11.56)$$

Dies ist der **Energie-Impuls-Tensor des EM Feldes** – ein wichtiges Ergebnis. Damit können wir insbesondere die Kraftdichte auf einen Teilchenstrom als

$$f^\mu = -\partial_\rho T_{\text{Feld}}^{\rho\mu} \quad (11.57)$$

erklären oder, äquivalenterweise, die Energie-Impuls-Erhaltung des Gesamtsystems aus Teilchen und Feld formulieren:

$$\partial_\rho (T_{\text{Feld}}^{\rho\mu} + T_{\text{Materie}}^{\rho\mu}) = 0. \quad (11.58)$$

Wir merken an, dass nach unserer Herleitung  $T_{\text{Feld}}^{\rho\mu}$  nicht eindeutig ist. Man könnte Terme  $\delta T^{\rho\mu}$  mit  $\partial_\rho \delta T^{\rho\mu} = 0$  addieren. Eindeutigkeit wird erreicht, wenn man zusätzlich zu der vorgegebenen Divergenz eine Symmetrie in  $\rho\mu$  verlangt. Ein solcher, per Definition symmetrischer Energie-Impuls-Tensor wird in der Allgemeine Relativitätstheorie eine zentrale Rolle spielen.

Ein anderer und fundamentalerer Zugang zum Energie-Impuls-Tensor besteht darin, das Noether-Theorem der Mechanik auf Feldtheorien erweitern. Dann folgen  $T_{\text{Feld}}^{\rho\mu}$  und  $T_{\text{Materie}}^{\rho\mu}$  sowie deren gemeinsame Erhaltung (also die Divergenzfreiheit des 4-er-Stroms  $T_{\text{gesamt}}^{\rho\mu}$ ) aus der Translationsinvarianz der Wirkung bzgl. der Koordinate  $x^\mu$ .

Wenn wir den zweiten Index des Energie-Impuls-Tensor gleich Null setzen, dann schränken wir uns auf die 4-er Energiestromdichte ein  $T_{\text{Feld}}^{\mu 0} = (j_E)^\mu$ . Die 0-te Komponente ist die eigentliche **Energiedichte**:

$$(j_E)^0 = T_{\text{Feld}}^{00} = \frac{1}{2} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2). \quad (11.59)$$

Die räumlichen Komponenten des 4-er Stroms  $j_E$  bilden den **Poynting-Vektor**

$$(j_E)^i = T_{\text{Feld}}^{i0} = (\vec{E} \times \vec{B})^i \equiv \vec{S}^i. \quad (11.60)$$

Das Nachrechnen der beiden expliziten Ausdrücke mit  $E$  und  $B$  in (11.59) und (11.60) überlassen wir dem Leser.

# 12 Elektromagnetische Wellen

## 12.1 Relativistische Herleitung

Wir starten mit den inhomogenen Maxwell-Gleichungen,

$$\partial_\mu F^{\nu\mu} = j^\nu, \quad (12.1)$$

setzen  $j^\nu = 0$  und ersetzen  $F^{\nu\mu}$  durch das 4-er Potential:

$$F^{\nu\mu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu. \quad (12.2)$$

es folgt

$$\partial^\nu(\partial A) - \partial^2 A^\nu = 0 \quad \text{mit} \quad \partial^2 = \partial^\mu \partial_\mu \equiv \square. \quad (12.3)$$

Diese Gleichung vereinfacht sich, wenn wir die **Lorenz-Eichung**

$$\partial A \equiv \partial_\mu A^\mu = 0 \quad (12.4)$$

wählen.

Wir kommentieren kurz die Möglichkeit dieser Wahl: Zunächst erinnern wir uns, dass wir über die Möglichkeit gesprochen hatten, die Coulomb-Eichung  $\vec{\nabla} \vec{A} = 0$  zu implementieren. Dazu mussten wir  $\Delta \chi = -\vec{\nabla} \vec{A}$  lösen. Dies war bei passenden Randbedingungen immer möglich und entsprach im Wesentlichen dem Auffinden des Inversen zum Operator  $\Delta$ , also der Greenschen Funktion. Ganz analog müssen wir jetzt  $\square \chi = -\partial A$  lösen. Bei passenden Randbedingungen ist dies, ebenso wie im Coulomb-Fall, immer möglich. Die entscheidende Idee ist wiederum das Auffinden der Greenschen Funktion zum Operator  $\square$ . Wir werden auf dieses Problem weiter unten zurückkommen.

Für den Moment nehmen wir an, dass die Lorenz-Eichung gewählt ist. Damit haben wir folgende einfache Form der **Wellengleichung für das elektromagnetische Feld** gefunden:

$$\square A^\mu = 0. \quad (12.5)$$

Die Analyse ist im Prinzip analog zum schon diskutierten skalaren Fall:

$$\square \varphi = 0. \quad (12.6)$$

Wir wollen diesen aber jetzt etwas allgemeiner diskutieren, mit der neuen Methode der Fourier-Transformation:

$$\varphi(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{\varphi}(k) e^{ikx}. \quad (12.7)$$

Hierbei ist  $kx \equiv k_\mu x^\mu$ . Wir finden somit

$$\square \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu \partial^\mu \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} k^2 \tilde{\varphi}(k) e^{ikx} = 0. \quad (12.8)$$

Wegen der Umkehrbarkeit der Fourier-Transformation folgt

$$k^2 \tilde{\varphi}(k) = 0 \quad \forall k. \quad (12.9)$$

Wir sehen: Nur Wellenzahlenvektoren  $k$  mit  $k^2 = 0$  tragen zur Fourier-Zerlegung von  $\varphi(x)$  bei. Anders gesagt:  $\tilde{\varphi}(k) \sim \delta(k^2)$ .

Dies geht vollkommen analog für das 4-er Potential. Wir setzen

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{A}^\mu(k) e^{ikx} \quad (12.10)$$

in

$$\square A^\mu = 0 \quad (12.11)$$

ein und finden wie oben  $\tilde{A}^\mu(k) \sim \delta(k^2)$ . Damit können wir festhalten, dass  $A^\mu$  eine Superposition von ebenen Wellen der Form

$$A^\mu(x) = \varepsilon^\mu(k) e^{ikx} \quad (12.12)$$

mit  $k^2 = 0$  ist. Man nennt  $\varepsilon^\mu$  den **Polarisationsvektor**. Natürlich muss das physikalische  $A^\mu$  reell sein. Dies ist aber leicht zu realisieren, indem man sich auf  $\Im(A^\mu)$  oder  $\Re(A^\mu)$  beschränkt.

Wir erinnern an einen wichtigen Fakt, der in völliger Analogie zum skaleren Fall weiter gilt:  $k^2 = 0$  impliziert, dass  $\omega \equiv k^0 = |\vec{k}|$ . Damit sind Gruppengeschwindigkeit und Phasengeschwindigkeit beide gleich Eins bzw. in Einheitensystemen mit  $c \neq 1$  gleich  $c$ . Es gibt somit keine Dispersion und beliebige Wellenpakete bewahren ihre Form.

## 12.2 Polarisation und Feldstärken

Im Gegensatz zum sonst sehr ähnlichen Fall von vier masselosen Skalaren  $\varphi^i(x)$ , sind die vier  $A^\mu(x)$  nicht unabhängig:

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad k_\mu \varepsilon^\mu(k) = 0. \quad (12.13)$$

Statt der naiv erwarteten vier haben wir also nur drei unabhängige Polarisationen.

Berechnen wir nun die Feldstärken in einer Welle der Form  $A^\mu(x) = \varepsilon^\mu(k) e^{ikx}$ :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} A^0 - \partial_t \vec{A} = \left[ -i\vec{k} \varepsilon^0(k) + ik^0 \vec{\varepsilon}(k) \right] e^{ikx} \quad (12.14)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = i\vec{k} \times \vec{\varepsilon}(k) e^{ikx}. \quad (12.15)$$

Als zentrale Behauptung halten wir fest: Für ebene Welle sind  $\vec{E}(x)$ ,  $\vec{B}(x)$  stets orthogonal zum (räumlichen Teil des) Wellenvektors:  $\vec{E}, \vec{B} \perp \vec{k}$ .

Für  $\vec{B}$  ist dies wegen  $\vec{B} \sim \vec{k} \times \vec{\varepsilon}$  offensichtlich. Für  $\vec{E}$  rechnen wir es nach:

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = \left( -i|\vec{k}|^2 \varepsilon^0 + ik^0 (\vec{\varepsilon} \cdot \vec{k}) \right) e^{ikx} = \left( -i|\vec{k}|^2 \varepsilon^0 + i(k^0)^2 \varepsilon^0 \right) e^{ikx} = 0. \quad (12.16)$$

Hier haben wir im zweiten Schritt benutzt, dass  $0 = \varepsilon k = -\varepsilon^0 k^0 + \vec{\varepsilon} \cdot \vec{k} = 0$  die Beziehung  $\vec{\varepsilon} \cdot \vec{k} = \varepsilon^0 k^0$  impliziert. Im letzten Schritt haben wir dann noch  $-(k^0)^2 + \vec{k}^2 = k^2 = 0$  ausgenutzt.

Wir zerlegen nun  $\vec{\varepsilon}$  bezüglich  $\vec{k}$  in seinen Parallel- und Orthogonal-Teil:

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_\perp + \vec{\varepsilon}_\parallel, \quad \text{wobei} \quad \vec{\varepsilon}_\perp \cdot \vec{k} = 0 \quad \text{und} \quad \vec{\varepsilon}_\parallel \parallel \vec{k}. \quad (12.17)$$

Wie eben gezeigt, trägt  $\vec{\varepsilon}_{\parallel}$  nicht zu  $\vec{E}, \vec{B}$  bei und kann o.B.d.A. zu Null gesetzt werden. Genauer gesagt ist es so, dass man nach Fixierung der Eichung  $\partial A = 0$  immer noch einen Rest von Eichfreiheit übrig hat. Diese auch als ‘Residual Gauge Freedom’ bekannte Freiheit kann man nutzen, um  $\vec{\varepsilon}_{\parallel} = 0$  zu wählen.

Mit der Wahl  $\vec{\varepsilon}_{\parallel} = 0$  haben wir also schließlich:

$$\vec{E} = ik^0 \vec{\varepsilon}_{\perp} e^{ikx}, \quad \vec{B} = i\vec{k} \times \vec{\varepsilon}_{\perp} e^{ikx}. \quad (12.18)$$

Jetzt wollen wir uns die Welle ganz explizit ansehen. Dazu konzentrieren wir uns auf  $\Im(\vec{E})$  und  $\Im(\vec{B})$ . Weiterhin wählen wir zunächst  $\vec{\varepsilon}_{\perp}$  reell. Zudem sei o.B.d.A.  $\vec{k} \parallel \hat{e}_z$  und  $\vec{\varepsilon}_{\perp} \parallel \hat{e}_x$ . Damit erhalten wir

$$\Im(\vec{E}) = \hat{e}_x k^0 |\vec{\varepsilon}_{\perp}| \cos(-\omega t + |\vec{k}|z) \quad \Im(\vec{B}) = \hat{e}_y k^0 |\vec{\varepsilon}_{\perp}| \cos(-\omega t + |\vec{k}|z). \quad (12.19)$$

Die relative Lage der Vektoren  $\vec{k}, \vec{E}$  und  $\vec{B}$  sowie die Welle selbst sind in Abb. 53 und 54 dargestellt. Aus Gründen, die gleich klar werden, nennt spricht man hier von linearer Polarisation.



Abbildung 53: Relative Lage der Vektoren  $\vec{k}, \vec{E}$  und  $\vec{B}$  in einer linear polarisierten Welle.



Abbildung 54: Skizze einer linear polarisierten Welle.

Im allgemeinen Fall ist  $\varepsilon_{\perp}$  komplex:

$$\vec{\varepsilon}_{\perp} = \begin{pmatrix} a_1 + ia_2 \\ b_1 + ib_2 \end{pmatrix} \quad (12.20)$$

Wir können immer noch o.B.d.A.  $\vec{k} \parallel \hat{e}_z$  wählen, aber die Achsen so auszurichten, dass  $\vec{\varepsilon}_{\perp} \parallel \hat{e}_x$ , wird nicht mehr möglich sein. Wir finden jetzt

$$\Im(\vec{E}) = k^0 \begin{pmatrix} a_1 \cos \alpha - a_2 \sin \alpha \\ b_1 \cos \alpha - b_2 \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad \text{wobei} \quad \alpha = -\omega t + |\vec{k}|z \quad (12.21)$$

ein Parameter ist, der entlang der Welle wächst. Wir können  $\vec{E}$  in der  $\vec{k}_{\perp}$ -Ebene als vektorielle Funktion dieses Parameters  $\alpha$  ansehen. Dies ist in Abb. 55 illustriert:

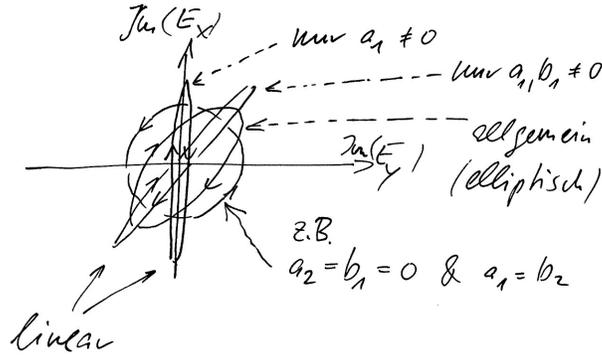


Abbildung 55: Skizze zu den verschiedenen möglichen Polarisierungen. Dargestellt sind die durch  $\alpha$  parametrisierten Kurven  $\Im(\vec{E}) = \Im(\vec{E}(\alpha))$ .

Dargestellt sind: (1) Einfachster linear polarisierter Fall, bei dem nur  $a_1 \neq 0$ . (2) Ein allgemeiner linear polarisierter Fall bei dem nur  $a_1 \neq 0$  und  $b_1 \neq 0$ . (3) Der völlig allgemeine elliptisch polarisierte Fall. (4) Ein zirkulär polarisierter Fall, wie er sich z.B. mit  $a_2 = b_1 = 0$  und  $a_1 = b_2$  ergibt. Allgemeiner erhält man zirkuläre Polarisation auch dann, wenn man  $\Re(\vec{\epsilon}_\perp) \perp \Im(\vec{\epsilon}_\perp)$  wählt und beiden den gleichen Betrag gibt.

Man kann bei der Beschreibung elektromagnetischer Wellen auch ganz ohne komplexe  $\vec{\epsilon}_\perp$  auskommen und elliptisch polarisierte Wellen als Linearkombination phasenverschobener linear polarisierter Wellen auffassen.

Der Energiefluss in der Welle lässt sich mit dem Poynting-Vektor leicht analysieren. Dazu notieren wir zunächst, dass aus unserer obigen Diskussion

$$\vec{E} \sim \vec{\epsilon}_\perp \quad \text{und} \quad \vec{B} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \times \vec{E} \quad (12.22)$$

folgt. Damit ergibt sich

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B} = \vec{E} \times \left( \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \times \vec{E} \right) = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \cdot |\vec{E}|^2, \quad (12.23)$$

wobei wir im letzten Schritt die Beziehung

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \quad (12.24)$$

sowie  $\vec{E} \perp \vec{k}$  benutzt haben.

### 12.3 Nichtkovariante Herleitung der Wellengleichung

Zur Vollständigkeit skizzieren wir noch die nichtkovariante Herleitung der Wellengleichung. Mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen im Vakuum finden wir zunächst

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \dot{\vec{E}} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \times \dot{\vec{E}} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \Delta \vec{B} = \partial_t (\vec{\nabla} \times \vec{E}). \quad (12.25)$$

Da außerdem  $\vec{\nabla} \vec{B} = 0$  und  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$  gilt, folgt daraus

$$-\Delta \vec{B} = -\partial_t^2 \vec{B} \quad \text{bzw.} \quad \square \vec{B} = 0. \quad (12.26)$$

Analoge Herleitung führt zu  $\square \vec{E} = 0$ . Jetzt muss man zusätzlich die Beziehungen  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \dot{\vec{E}}$  und  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$  benutzen, um zu sehen, dass die Wellen von  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  nicht unabhängig sind. Man findet schnell genau die gleichen Lösungen, die wir direkt aus  $\square A^\mu = 0$  und den Definitionen von  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  abgeleitet hatten.

Da die Problemstellung zutiefst relativistisch ist und die relativistische Analyse einfacher und klarer ist, wollen wir uns die detaillierte Durchführung der nichtrelativistischen Analyse sparen.

## 13 Felder bewegter Ladungen

### 13.1 Relativistische Greensche Funktion

Wir starten mit der inhomogenen Maxwell-Gleichung

$$\partial_\mu F^{\nu\mu} = j^\nu \quad (13.1)$$

und gewinnen daraus mit der Definition  $F^{\nu\mu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu$  und der Lorenz-Eichung  $\partial A = 0$  die Formel

$$\square A^\mu = -j^\mu. \quad (13.2)$$

Analog zur Poisson-Gleichung  $\Delta\phi = -\rho$  aus der Elektrostatik ist dies ein Fall für die Methode der Greenschen Funktionen: Die Aufgabe besteht also darin, eine Funktion  $G(x, y)$  zu finden, so dass

$$\square_x G(x, y) = -\delta^4(x - y). \quad (13.3)$$

Ist dies gelungen, so können wir für jedes  $j$  die Lösung  $A$  sofort angeben:

$$A^\mu(x) = \int d^4y G(x, y) j^\mu(y). \quad (13.4)$$

Wegen Translationsinvarianz haben wir

$$G(x, y) \equiv G(x - y). \quad (13.5)$$

Wir können also o.B.d.A.  $y = 0$  setzen und uns auf die Lösung der Gleichung

$$\square_x G(x) = -\delta^4(x) \quad (13.6)$$

konzentrieren. Dazu gehen wir in den Fourier-Raum, indem wir beide Seiten der Gleichung mit  $\exp(-ikx)$  multiplizieren und über den  $\mathbb{R}^{1,3}$  integrieren. Da

$$\tilde{G}(k) = \int d^4x e^{-ikx} G(x) \quad (13.7)$$

gilt, finden wir

$$-k^2 \tilde{G}(k) = -1 \quad \text{bzw.} \quad \tilde{G}(k) = 1/k^2. \quad (13.8)$$

Die Rücktransformation liefert

$$G(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ikx}}{k^2}. \quad (13.9)$$

Soweit ist dies sehr ähnlich zum (euklidischen) 3d-Fall, wo wir

$$G(\vec{x}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}\vec{x}}}{\vec{k}^2} = \frac{1}{4\pi|\vec{x}|} \quad (13.10)$$

gefunden hatten. Doch ab jetzt wird die Analyse wesentlich anders. Wir wollen eine kurze Diskussion einschieben, die die konzeptionellen Ursachen dafür zumindest kurz erläutert:

Unser Differentialoperator im 3d euklidischen Fall war  $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ . Alle Vorzeichen der Ableitungsterme sind hier positiv – man spricht deshalb von einem elliptischen Differentialoperator. Die Vorgabe der gesuchten Lösungsfunktion am Rand des Gebietes (hier bei  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ ) bestimmt in solchen Fällen die Lösung eindeutig.

Jetzt hingegen ist unser Differentialoperator  $\square = -\partial_t^2 + \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ . Eines der Vorzeichen ist negativ und man nennt den Operator deshalb hyperbolisch. Bei derartigen Operatoren wird die Lösung eindeutig bestimmt durch die Vorgabe der Lösungsfunktion und deren ersten Ableitung auf einer sogenannten Cauchy-Fläche. Dies ist eine raumartige Hyperfläche, siehe Abb. 56.

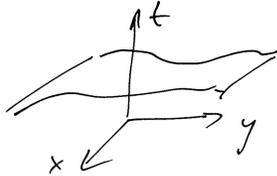


Abbildung 56: Cauchy-Fläche.

Wir dürfen aber nur Randbedingungen auf *einer* solchen Cauchy-Fläche vorgeben. Deshalb können wir die Lösungsfunktion nicht überall im Unendlichen zu Null setzen. Dadurch verlieren wir die Eindeutigkeit der Lösung zu  $\square G = -\delta$ , weil wir  $G = 0$  entweder bei  $t \rightarrow +\infty$  oder  $t \rightarrow -\infty$  fordern, aber nicht beides.

Zur expliziten Berechnung führen wir zunächst den Winkelanteil der  $d^3 k$ -Integration durch. Dazu gehen wir im durch  $\vec{k}$  parametrisierten  $\mathbb{R}^3$  zu Kugelkoordinaten über:

$$G(x) = \int \frac{dk^0}{(2\pi)^4} \int |\vec{k}|^2 d|\vec{k}| d(\cos \theta) d\varphi \frac{e^{-ik^0 t + i\vec{k}\vec{x}}}{-k_0^2 + |\vec{k}|^2}. \quad (13.11)$$

Es gilt

$$\cos \theta \in [-1, 1] \quad \text{und} \quad \vec{k}\vec{x} = |\vec{k}||\vec{x}| \cos \theta, \quad (13.12)$$

weil wir o.B.d.A. die 3-Achse im  $\vec{k}$ -Raum parallel zu  $\vec{x}$  gewählt haben. Nach Ausführung der Winkelintegrationen haben wir

$$G(x) = \int \frac{dk^0}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{|\vec{k}|^2 d|\vec{k}|}{-k_0^2 + |\vec{k}|^2} \cdot \frac{e^{-ik^0 t}}{i|\vec{k}||\vec{x}|} \left( e^{i|\vec{k}||\vec{x}|} - e^{-i|\vec{k}||\vec{x}|} \right). \quad (13.13)$$

Um die Notation zu vereinfachen, setzen wir jetzt  $|\vec{k}| \equiv k$  sowie  $|\vec{x}| \equiv r$  und  $k^0 \equiv E$ . Es folgt

$$G(x) = i \int_0^\infty \frac{k dk}{(2\pi)^3 r} (e^{-ikr} - e^{ikr}) \int \frac{dE e^{-iEt}}{-E^2 + k^2}, \quad (13.14)$$

wobei wir den Nenner des letzten Integranden noch gemäß

$$\frac{1}{-E^2 + k^2} = \frac{-1}{(E - k)(E + k)} = \frac{1}{2k} \left( \frac{1}{E + k} - \frac{1}{E - k} \right) \quad (13.15)$$

vereinfachen können. Man erkennt sofort, dass die  $E$ -Integration wegen der Pole bei  $E = \pm k$  divergent ist. Dies hängt mit der oben erwähnten Uneindeutigkeit von  $G$  zusammen.

Um das für unsere Zwecke relevante  $G$  zu ermitteln, betrachten wir den Ausdruck

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dE \left( \frac{1}{E + k} - \frac{1}{E - k} \right) e^{-iEt} \quad (13.16)$$

als Integral entlang der reellen Achse in der **komplexen  $E$ -Ebene**, vgl. Abb. 57. Wir können die formal divergente Integration wohldefiniert machen, indem wir die Pole um  $\pm i\epsilon$  verschieben, die Integration durchführen, und schließlich zum Limes  $\epsilon \rightarrow 0$  übergehen. Wie in Abb. 58 illustriert, gibt es dabei vier verschiedene Möglichkeiten.

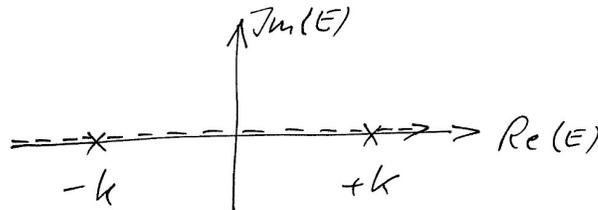


Abbildung 57: Integrationskurve in der komplexen  $E$ -Ebene mit Polen bei  $E = \pm k$ .



Abbildung 58: Vier Möglichkeiten, die beiden Pole zu verschieben.

Um die richtige Wahl zu treffen, benötigen wir eine physikalische Annahme. Diese besteht in der **Kausalität**, welche impliziert, dass

$$G(x) = 0 \quad \text{für} \quad x^0 = t < 0. \quad (13.17)$$

Man erreicht dieses Verhalten von  $G$  durch Verschiebung beider Pole nach unten, vgl. Abb. 59. Wir ersetzen (13.16) also durch

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int dE \left( \frac{1}{E + k + i\epsilon} - \frac{1}{E - k + i\epsilon} \right) e^{-iEt}. \quad (13.18)$$

Eine intuitive Begründung dieser Wahl ist die Folgende: Die kleine Verschiebung der Pole nach unten ist äquivalent zu einer kleinen Verschiebung der Integrationskurve nach oben. Letzteres entspricht der Substitution  $E \rightarrow E + i\delta$  im Integranden. Das bedeutet

$$e^{-iEt} \quad \longrightarrow \quad e^{-i(E+i\delta)t} = e^{-iEt} e^{t\delta}. \quad (13.19)$$

Da nun  $e^{t\delta} \rightarrow 0$  bei  $t \rightarrow -\infty$ , ist dies mit unserer obigen Kausalitätsforderung zumindest konsistent. Besser ist es natürlich, das Integral einfach auszurechnen und das gewünschte Verhalten von  $G$  so explizit zu verifizieren. Dazu brauchen wir den Residuensatz.

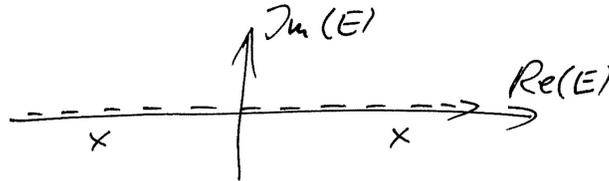


Abbildung 59: Durch Kausalität motivierte Verschiebung beider Pole nach unten.

## 13.2 Residuensatz (M)

Betrachten wir eine komplexe Funktion

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}; \quad z \longmapsto f(z). \quad (13.20)$$

Man kann diese auch als Abbildung  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  auffassen, wobei

$$z = x^1 + ix^2, \quad (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2. \quad (13.21)$$

Schreiben wir nun also  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  als Taylor-Reihe:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{i_1} \cdots x^{i_n} \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_n} f(\vec{0}). \quad (13.22)$$

Mit

$$x^1 = \frac{(z + \bar{z})}{2} \quad \text{und} \quad x^2 = \frac{(z - \bar{z})}{2i} \quad (13.23)$$

kann man diese auch als Reihe in  $z, \bar{z}$  auffassen, also

$$f(z) = \sum_{k,l=0}^{\infty} c_{k,l} z^k \bar{z}^l. \quad (13.24)$$

Von besonderem Interesse sind Funktionen  $f$ , für welche in dieser Reihe nur  $z$  vorkommt und nicht  $\bar{z}$ . Mit anderen Worten, es soll  $c_{k,l} = 0$  gelten für  $l \neq 0$ . Man nennt man solche Funktionen  $f$  **holomorph** (im Konvergenzradius der Reihe). Man schreibt dann  $f = f(z)$ , im Gegensatz zur Schreibweise  $f = f(z, \bar{z})$  für eine allgemeine Funktion  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .

Wir können natürlich auch um andere Punkte als den Ursprung entwickeln:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \quad (13.25)$$

Die Funktion ist immer noch holomorph, wenn in dieser Entwicklung kein  $\bar{z}$  vorkommt. Jetzt wollen wir die uns interessierende Funktionenklasse erweitern und auch die Entwicklung um Punkte zulassen, an denen  $f$  singularär ist:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \quad (13.26)$$

Man bezeichnet dies als **Laurent-Reihe**. Falls es in dieser Reihe nur endlich viele von Null verschiedene  $c_n$  mit  $n < 0$  gibt, spricht man von einer Polstelle. Wenn alle Singularitäten einer Funktion Polstellen, sind heißt die Funktion **meromorph**.

Betrachte wir nun das Linienintegral

$$I = \int_{\gamma} f(z) dz \equiv \lim \sum_i f(z_i) \Delta z_i \quad (13.27)$$

einer meromorphen Funktion entlang einer Kurve  $\gamma$ , vgl. Abb. 60. Man kann  $I$  als Linienintegral des komplexen Vektorfeldes

$$\vec{v}_f = \begin{pmatrix} f \\ if \end{pmatrix} \quad (13.28)$$

im

$$\mathbb{R}^2 \ni \vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \quad (13.29)$$

auffassen. Dies gilt aufgrund der Identität

$$f(z) dz = f(z) (dx^1 + idx^2) = \begin{pmatrix} f \\ if \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \end{pmatrix} = \vec{v}_f \cdot d\vec{x}. \quad (13.30)$$



Abbildung 60: Eine Kurve  $\gamma$  in  $\mathbb{C}$ .

Als entscheidende Beobachtung stellen wir nun fest: Wenn  $f$  holomorph ist, dann ist  $\vec{v}_f$  rotationsfrei. Um dies einzusehen, bemerken wir zunächst, dass  $\vec{v}_f$  per Definition keine 3-Komponente hat und nicht von  $x^3$  abhängt. Also gilt

$$\left( \vec{\nabla} \times \vec{v}_f \right)_{1,2} = 0. \quad (13.31)$$

Des Weiteren findet man

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{v}_f\right)_3 = \partial_1(if) - \partial_2(f) = if'(z)\frac{\partial z}{\partial x^1} - f'(z)\frac{\partial z}{\partial x^2} = if'(z) \cdot 1 - f'(z) \cdot i = 0. \quad (13.32)$$

Damit ist unsere Beobachtung verifiziert.

Mit dem Satz von Stokes können wir nun also  $\gamma$  beliebig deformieren, ohne  $I$  zu ändern:

$$I(\gamma) - I(\gamma') = \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{v}_f) \cdot d\vec{a} = 0. \quad (13.33)$$

Hierbei steht  $d\vec{a}$  für ein infinitesimales Flächenelement des  $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ . Natürlich dürfen wir  $\gamma$  dabei nicht über eine Singularität schieben, d.h.  $f$  muss überall in der Fläche  $A$  in Abb. 61 definiert und holomorph sein.



Abbildung 61: Deformation der Kurve  $\gamma$  zur Kurve  $\gamma'$ .

Betrachten wir jetzt eine geschlossene Integralkurve  $\gamma$  um eine Singularität, in deren Nähe eine Beschreibung durch die Laurent-Reihe gültig ist, vgl. Abb. 62. Gemäß dem eben Gesagten dürfen wir diese Kurve zu einem kleinen Kreis  $\gamma(\epsilon)$  mit Radius  $\epsilon$  deformieren, welcher sein Zentrum bei  $z_0$  hat:

$$I = \oint_{\gamma} f(z)dz = \oint_{\gamma(\epsilon)} f(z)dz. \quad (13.34)$$



Abbildung 62: Integrationskurve um Singularität bei  $z = z_0$

Es sei nun O.B.d.A. sei  $z_0 = 0$ , so dass

$$f(z) = \sum_n c_n(z - z_0)^n = \sum_n c_n z^n \quad (13.35)$$

und

$$I = \sum_n I_n \quad \text{mit} \quad I_n = c_n \oint_{\gamma(\epsilon)} z^n dz. \quad (13.36)$$

Wir parametrisieren  $\gamma(\epsilon)$  gemäß

$$z(\varphi) = \epsilon e^{i\varphi} \quad \text{mit} \quad \varphi \in (0, 2\pi]. \quad (13.37)$$

Es folgt

$$I_n = c_n \int_0^{2\pi} d(\epsilon e^{i\varphi}) (\epsilon e^{i\varphi})^n = c_n i \epsilon^{n+1} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i\varphi(n+1)} \quad (13.38)$$

und somit

$$I_n = \begin{cases} 2\pi i c_n & \text{für } n = -1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (13.39)$$

Eine analoge Rechnung kann für mehrere Singularitäten innerhalb von  $\gamma$  durchgeführt werden, vgl. Abb. 63.



Abbildung 63: Deformation einer Integrationskurve, die mehrere Singularitäten ergibt, zu kleinen Kreisen.

Damit haben wir den sogenannten **Residuensatz** hergeleitet:

$$I \equiv \oint_{\gamma} dz f(z) = \sum_{k=1}^N 2\pi i \text{Res}(f, z_k). \quad (13.40)$$

Dabei wird  $\gamma$  im positiven Drehsinn durchlaufen und  $f$  ist meromorph, mit einer endlichen Zahl von Singularitäten an Orten  $z_k$  im Inneren von  $\gamma$ . Per Definition sind die sogenannten **Residuen**  $\text{Res}(f, z_k) \equiv c_{-1}$  die Koeffizienten der Terme  $\sim 1/(z - z_k)$  aus den Laurent-Reihen bei  $z_k$ .

### 13.3 Relativistische Greensche Funktion - Fortsetzung

Jetzt setzen wir die Rechnung des vorletzten Kapitels fort, wobei wir den Leser an Abb. 59 und das entsprechende Kurvenintegral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dE \left( \frac{1}{E + k + i\epsilon} - \frac{1}{E - k + i\epsilon} \right) e^{-iEt} \quad (13.41)$$

in der komplexen  $E$ -Ebene erinnern. Falls  $t < 0$  wirkt  $e^{-iEt}$  bei  $\text{Im}(E) > 0$  als exponentieller Unterdrückungsfaktor. Demnach können wir unsere Integrationskurve in der oberen Halbebene schließen, ohne den Betrag des Integrals zu ändern, vgl. Abb. 64. Da es im Inneren dieser Kurve keine Pole gibt, ist das Integral per Residuensatz gleich Null.

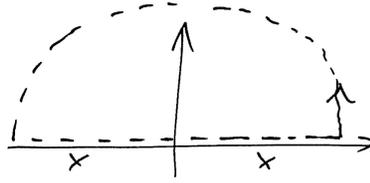


Abbildung 64: Schließen der Integrationskurve in der oberen Halbebene.

Falls  $t > 0$  können wir die Kurve analog in der unteren Halbebene schließen, vgl. Abb. 65. Diesmal liegen beide Pole im inneren der geschlossenen Kurve und der Residuensatz liefert

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int dE e^{-iEt} \left( \frac{1}{E+k+i\epsilon} - \frac{1}{E-k+i\epsilon} \right) = -2\pi i \left[ \text{Res} \left( \frac{e^{-iEt}}{E+k}, -k \right) - \text{Res} \left( \frac{e^{-iEt}}{E-k}, k \right) \right]. \quad (13.42)$$

Das negative Vorzeichen folgt aus der Orientierung der Kurve.

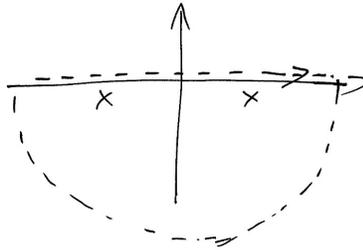


Abbildung 65: Schließen der Integrationskurve in der unteren Halbebene.

Bevor wir die Residuen im konkreten Fall bestimmen, wollen wir etwas allgemeiner Funktionen der Form

$$f(z) = \frac{g(z)}{z - z_0} \quad (13.43)$$

mit  $g(z)$  holomorph betrachten. Wir Taylor-entwickeln  $g$  bei  $z_0$  und finden

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0} [g(z_0) + (z - z_0)g'(z_0) + \dots], \quad (13.44)$$

woraus wir sofort

$$\text{Res}(f, z_0) = c_{-1} = g(z_0) \quad (13.45)$$

ablesen können.

In unserem speziellen Fall ist nun  $z = E$  und  $z_0 = \pm k$ , also z.B.

$$\text{Res} \left( \frac{e^{-iEt}}{E+k}, -k \right) = e^{+ikt}. \quad (13.46)$$

Hinzunahme des zweiten Pols liefert

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int dE e^{-iEt} \left( \frac{1}{E+k+i\epsilon} - \frac{1}{E-k+i\epsilon} \right) = -2\pi i (e^{ikt} - e^{-ikt}). \quad (13.47)$$

Wenn wir uns an (13.14) und (13.15) erinnern, ergibt sich für  $t > 0$

$$G(x) = i \int_0^\infty \frac{dk}{(2\pi)^3 2r} (e^{-ikr} - e^{ikr}) (-2\pi i) (e^{ikt} - e^{-ikt}) \quad (13.48)$$

$$= \frac{1}{2(2\pi)^2 r} \int_0^\infty dk [e^{-ik(r-t)} - e^{-ik(r+t)} - e^{ik(r+t)} + e^{ik(r-t)}] \quad (13.49)$$

$$= \frac{1}{2(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^\infty dk [e^{ik(r-t)} - e^{ik(r+t)}] \quad (13.50)$$

$$= \frac{1}{4\pi r} [\delta(r-t) - \delta(r+t)] \quad (13.51)$$

Die zweite  $\delta$ -Funktion kann weggelassen werden, weil  $r+t$  (außer am Ursprung) immer positiv ist. Damit können wir das Resultat für alle  $t$  als

$$G(x) = \frac{1}{4\pi r} \delta(t-r) \theta(t) \quad (13.52)$$

schreiben, wobei wir daran erinnern, dass  $t = x^0$  und  $r = |\vec{x}|$  gilt.

Die äquivalente kovariante Formel, also unser **Haupt-Resultat**, lautet

$$G(x) = \frac{1}{2\pi} \delta(x^2) \theta(x^0). \quad (13.53)$$

Um die Äquivalenz zu (13.52) zu sehen, schreiben wir (für  $t > 0$ )

$$\delta(x^2) = \delta(-x^2) = \delta((t+r)(t-r)) = \frac{\delta(t-r)}{2r}. \quad (13.54)$$

Hierbei haben wir im letzten Schritt die bekannte Identität

$$\delta(f(x)) = \frac{\delta(x-a)}{|f'(a)|} \quad (13.55)$$

für Funktionen  $f(x)$  mit Nullstelle bei  $x = a$  benutzt. Wir bemerken, dass in unserem Fall  $f'(a) = d[(t-r)(t+r)]/dt|_{t=r} = 1/2r$  gilt. Damit haben wir

$$\frac{1}{2\pi} \delta(x^2) \theta(x^0) = \frac{1}{2\pi} \delta((t+r)(t-r)) \theta(t) = \frac{1}{4\pi r} \delta((t-r) \theta(t)), \quad (13.56)$$

wie behauptet.

Wir betonen, dass der Faktor  $\theta(x^0)$  in (13.53) entgegen dem Anschein nicht die Kovarianz bezüglich der eigentlich-orthochronen Lorentz-Gruppe bricht. Dies liegt daran, dass  $\delta(x^2)$  nur auf dem Lichtkegel<sup>4</sup> von Null verschieden ist, vgl. Abb. 66. Die Lorentz-Gruppe bildet den Lichtkegel auf sich selbst ab. Da man nun aber einen Vektor aus dem oberen Lichtkegel-Teil nicht kontinuierlich in einen Vektor aus dem unteren Lichtkegel-Teil deformieren kann, ohne ihn Null werden zu lassen, kann die eigentlich-orthochrone Lorentz-Gruppe so eine Abbildung auch nicht realisieren. Unser  $G$  ist gerade auf dem oberen Lichtkegel-Teil ungleich Null und damit invariant bzgl. der  $SO^+(1, 3)$ .

---

<sup>4</sup>Wir meinen hier und im folgenden immer die Mantelfläche des Lichtkegels, sprechen der Kürze halber aber vom Kegel.

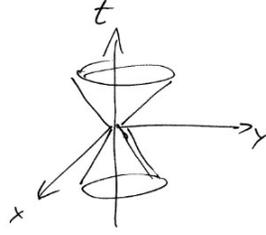


Abbildung 66: Lichtkegel.

Zum Abschluss fassen wir nochmal die wichtigsten qualitativen Resultate zusammen: Die von uns physikalisch benötigte Greensche Funktion nennt man **retardierte** Greensche Funktion. Grund des Namens ist die **Retardierung** des Effekts der Quelle aufgrund der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts. Technisch haben wir das durch die Forderung des Verschwindens bei  $t > 0$  implementiert. Nur der Vollständigkeit halber erwähnen wir, dass es auch **avancierte** und **Feynman-Greensche** Funktionen gibt, die vor allem in der Quantenfeldtheorie eine große Rolle spielen.

Wenn wir beide Argumente explizit machen, also  $G = G(x - y)$  schreiben, so ist diese Funktion bei festgehaltenem  $x$  nur an Punkten  $y$  ungleich Null, welche auf dem **rückwärtigem Lichtkegel** von  $x$  liegen. Dies sieht an der Formel

$$G(x - y) = \frac{1}{2\pi} \delta((x - y)^2) \theta(x^0 - y^0) , \quad (13.57)$$

vgl. auch Abb. 67.

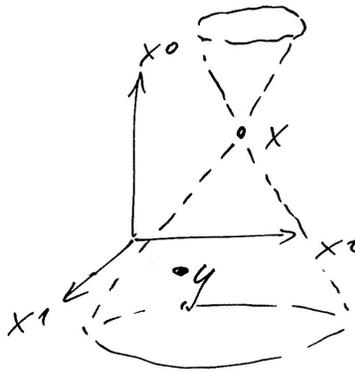


Abbildung 67: Punkt  $y$  auf der Mantelfläche des rückwärtigen Lichtkegels von  $x$ .

### 13.4 Feld einer bewegten Punktladung (Liénard-Wiechert)

Wie wir aus Kapitel 5.3 wissen, verursacht eine Punktladung die 4-er Stromdichte

$$j^\mu(x) = q \int d\lambda \delta^4(x - y(\lambda)) \dot{y}^\mu , \quad (13.58)$$

wobei  $y = y(\lambda)$  die Trajektorie charakterisiert und  $\dot{y}$  deren Ableitung nach  $\lambda$  bezeichnet. Wir setzen nun diese Stromdichte in

$$A^\mu(x) = \int d^4x' G(x - x') j^\mu(x') \quad (13.59)$$

ein, benutzen die relativistische Greensche Funktion aus dem letzten Kapitel und wählen außerdem  $\lambda$  als Eigenzeit, also  $\lambda = \tau$ . Dies liefert

$$A^\mu(x) = \int d^4x' \int d\tau \frac{q}{2\pi} \delta((x - x')^2) \theta(x^0 - x'^0) \delta^4(x' - y(\tau)) u^\mu(\tau) \quad (13.60)$$

$$= \frac{q}{2\pi} \int d\tau \delta((x - y(\tau))^2) \theta(x^0 - y^0(\tau)) u^\mu(\tau). \quad (13.61)$$

Das Integrand des letzten  $\tau$ -Integrals ist nur dann von Null verschieden, wenn  $\tau$  die Eigenzeit ist, zu der die Trajektorie den rückwärtigen Lichtkegel des Punktes  $x$  schneidet. Wir bezeichnen diese *retardierte* Eigenzeit mit  $\tau_r$ , vgl. Abb. 68. Des Weiteren sei  $R$  der 4-er Vektor, welcher diesen Schnittpunkt mit  $x$  verbindet:

$$R \equiv x - y(\tau_r) \in \mathbb{R}^{1,3}. \quad (13.62)$$

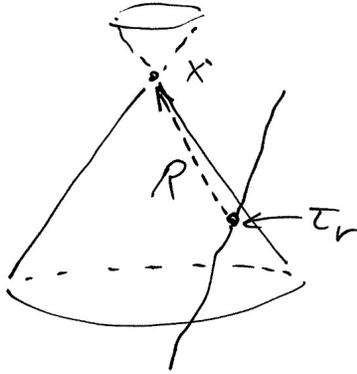


Abbildung 68: Die Trajektorie schneidet den rückwärtigen Lichtkegel von  $x$  zur Eigenzeit  $\tau_r$ .

Als Nächstes müssen wir das Integral der  $\delta$ -Funktion in (13.61) auswerten, wobei wir die allgemeine Formel

$$\delta(f(x)) = \delta(x - a) \frac{1}{|f'(a)|} \quad (13.63)$$

mit Nullstelle  $a$  benutzen. Explizit brauchen wir

$$\frac{d(x - y(\tau))^2}{d\tau} = -2(x - y(\tau)) \cdot u(\tau) = -2R \cdot u, \quad (13.64)$$

wobei wir zur Deutlichkeit einen Punkt benutzt haben, um die Kontraktion zweier 4-er Vektoren zu beschreiben:  $R \cdot u \equiv R^\mu u_\mu$ . Es folgt

$$A^\mu(x) = \frac{q}{4\pi} \cdot \frac{u^\mu(\tau_r)}{|R \cdot u(\tau_r)|} = \frac{q}{4\pi} \cdot \frac{v_r^\mu}{|R \cdot v_r|}. \quad (13.65)$$

Hier sind wir im letzten Schritt von der 4-er Geschwindigkeit zur 4-komponentigen gewöhnlichen Geschwindigkeit  $v^\mu = dx^\mu/dt$  übergegangen:

$$v_r^\mu = v^\mu(\tau_r) = \frac{u^\mu(\tau_r)}{\gamma}. \quad (13.66)$$

Der Index  $r$  von  $v_r$  besagt, dass es sich um die Geschwindigkeit zum retardierten Zeitpunkt  $\tau_r$  handelt. Es ist dies also die Geschwindigkeit des Teilchens in dem Moment, wenn es den rückwärtigen Lichtkegel von  $x$  kreuzt.

Unter Ausnutzung der Tatsachen, dass  $v_r^0 = 1$  und dass  $R$  lichtartig ist, also  $R^0 = |\vec{R}|$ , folgt

$$A^\mu(x) = \frac{q}{4\pi} \cdot \frac{v_r^\mu}{|\vec{R}| - \vec{R} \cdot \vec{v}_r} \quad (13.67)$$

Dies ist das berühmte **Liénard-Wiechert-Potential**. Detailliertere Diskussionen dazu sowie Beispiele und Anwendungen finden sich in vielen Quellen, z.B. [2, 4, 11]. Wir empfehlen insbesondere die konsequent kovariante Darstellung dieses und vieler anderer Themen in [11].

### 13.5 Feld einer geradlinig gleichförmig bewegten Ladung

Betrachten wir zur Illustration den Spezialfall

$$y(t') = \begin{pmatrix} t' \\ \vec{y}_0 + \vec{v} \cdot t' \end{pmatrix}. \quad (13.68)$$

Gesucht sei das Feld bei

$$x = \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix}. \quad (13.69)$$

Abstand des Beobachtungspunktes von der Ladung zum Zeitpunkt der Beobachtung ist

$$\vec{s} \equiv \vec{x} - \vec{y}(t). \quad (13.70)$$

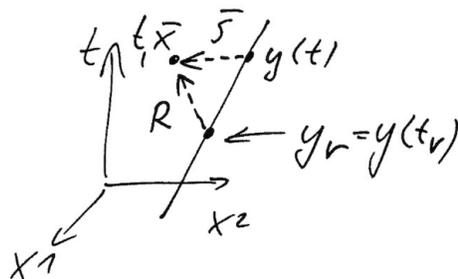


Abbildung 69: Zum Feld einer geradlinig bewegten Ladung.

Wir wollen nun die in der Liénard-Wiechert-Formel vorkommenden Größen  $|\vec{R}|$  und  $\vec{R} \cdot \vec{v}$  bestimmen. Dazu lesen wir zunächst aus Abb. 69 ab, dass

$$\vec{R} = (t - t_r) \vec{v} + \vec{s}. \quad (13.71)$$

Da nun  $t - t_r = R^0$  und  $R$  lichtartig ist, folgt  $t - t_r = |\vec{R}|$  und somit

$$\vec{R} = \vec{v}|\vec{R}| + \vec{s}. \quad (13.72)$$

Wir quadrieren,

$$|\vec{R}|^2 = v^2|\vec{R}|^2 + 2|\vec{R}|\vec{v} \cdot \vec{s} + \vec{s}^2, \quad (13.73)$$

und bringen die Gleichung in die Standard-Form einer quadratischen Gleichung für  $|\vec{R}|$ ,

$$|\vec{R}|^2 - \frac{2\vec{v} \cdot \vec{s}}{1 - v^2}|\vec{R}| - \frac{\vec{s}^2}{1 - v^2} = 0, \quad (13.74)$$

wobei  $v^2 \equiv \vec{v}^2$ . Die beiden Lösungen sind

$$|\vec{R}| = \frac{\vec{v} \cdot \vec{s}}{1 - v^2} \pm \sqrt{\frac{(\vec{v} \cdot \vec{s})^2}{(1 - v^2)^2} + \frac{\vec{s}^2}{1 - v^2}}, \quad (13.75)$$

wobei die mit dem Minus-Zeichen negativ und somit physikalisch irrelevant ist. Es folgt

$$|\vec{R}| = \frac{1}{1 - v^2} \left( \vec{v} \cdot \vec{s} + \sqrt{(\vec{v} \cdot \vec{s})^2 + \vec{s}^2(1 - v^2)} \right). \quad (13.76)$$

Multiplikation von 13.72 mit  $\vec{v}$  liefert außerdem

$$\vec{R} \cdot \vec{v} = |\vec{R}|v^2 + \vec{v}\vec{s}. \quad (13.77)$$

Damit haben wir explizite Ausdrücke für  $|\vec{R}|$  und  $\vec{R} \cdot \vec{v}$  und können (13.67) auswerten:

$$A^\mu(x) = \frac{qv_r^\mu}{4\pi} \cdot \frac{1}{|\vec{R}| - \left( |\vec{R}|v^2 + \vec{v} \cdot \vec{s} \right)} = \frac{qv_r^\mu}{4\pi} \cdot \frac{1}{|\vec{R}|(1 - v^2) - \vec{v} \cdot \vec{s}} \quad (13.78)$$

und schließlich

$$A^\mu(x) = \frac{qv_r^\mu}{4\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\vec{v} \cdot \vec{s})^2 + \vec{s}^2(1 - v^2)}}. \quad (13.79)$$

Man beachte, dass  $A^\mu$  von  $t, \vec{x}$  nur über  $\vec{s}$  abhängt. Dabei gilt  $\vec{s} = \vec{x} - \vec{y}_0 - \vec{v}t$ . Wir kennen die  $(t, \vec{x})$ -Abhängigkeit von  $A^\mu$  also explizit und können  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  leicht bestimmen.

## 13.6 Dipol-Strahlung

Die uns interessierende physikalische Situation eines oszillierenden Dipols ist in Abb. 70 skizziert, wobei wir im Gegensatz zu den Abbildungen der letzten Kapitel nur den  $\mathbb{R}^3$ , ohne Zeit, dargestellt haben.

Wir benutzen die bekannte Liénard-Wiechert-Formel für  $A^\mu$ , konzentrieren uns aber zunächst nur auf den 3-er Vektor-Anteil  $\vec{A}$ :

$$\vec{A} = \frac{q}{4\pi} \cdot \frac{\vec{v}_{r,1}}{|\vec{R}_1| - \vec{R}_1 \cdot \vec{v}_{r,1}} - \frac{q}{4\pi} \cdot \frac{-\vec{v}_{r,2}}{|\vec{R}_2| + \vec{R}_2 \cdot \vec{v}_{r,2}}. \quad (13.80)$$



In Vektor-Notation und bei Unterdrückung des Arguments von  $\vec{p}$  haben wir

$$\vec{B} = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{\ddot{\vec{p}} \times \vec{x}}{r^2} + \frac{\dot{\vec{p}} \times \vec{x}}{r^3} \right]. \quad (13.88)$$

Wenn wir schließlich noch den für das Fernfeld irrelevanten<sup>5</sup> zweiten Term weglassen, so ergibt sich

$$\vec{B} \simeq \frac{\ddot{\vec{p}} \times \vec{x}}{4\pi r^2}. \quad (13.89)$$

Kommen wir jetzt zu  $A^0$ . Es gilt

$$A^0 = \frac{q}{4\pi} \cdot \frac{1}{|\vec{R}_1| - \vec{R}_1 \cdot \vec{v}_r} - \frac{q}{4\pi} \cdot \frac{1}{|\vec{R}_2| + \vec{R}_2 \cdot \vec{v}_r}. \quad (13.90)$$

Wir könnten nun eine zur obigen Herleitung von  $\vec{A}$  völlig analoge Analyse durchführen. Diese wäre allerdings deutlich mühsamer. Grund ist die Tatsache, dass wir bei der oben benutzten Entwicklung in den kleinen Größen  $\vec{v}$  und  $\vec{y}$  in nullter Ordnung ein verschwindendes Resultat erhalten. Um ein nichttriviales Ergebnis zu finden, müssten wir die linearen Terme hinzuziehen. Im Gegensatz zur Analyse von  $\vec{A}$ , erfordert dies aber die Taylor-Entwicklung der  $\vec{R}_i$  im Nenner. Dies erfordert einige Arbeit.

Ein einfacherer Weg zu  $A^0$  ergibt sich, wenn wir die von uns ohnehin vorausgesetzte Lorentz-Eichbedingung  $\partial A = 0$  nutzen: Aus

$$\partial_t A^0 + \vec{\nabla} \vec{A} = 0 \quad (13.91)$$

folgt somit

$$A^0 = - \int dt \vec{\nabla} \left( \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\dot{\vec{p}}(t-r)}{r} \right) = - \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \frac{\vec{p}(t-r)}{r} + f(\vec{x}), \quad (13.92)$$

wobei  $f$  die i.A.  $\vec{x}$ -abhängige Integrationskonstante darstellt. Diese lasse wir zur Vereinfachung weg lassen, weil wir uns nur für die Dipol-Strahlung (also insbesondere den zeitabhängigen Anteil) interessieren. Dies ergibt

$$A^0 = - \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\dot{\vec{p}}(t-r)}{r} \left( -\vec{\nabla} r \right) + \dots \quad (13.93)$$

Hierbei stehen die Auslassungszeichen für den Term, der sich durch Wirkung von  $\vec{\nabla}$  auf  $1/r$  ergibt. Diesen können wir ebenfalls weglassen, da er im Fernfeld, also bei großem  $r$ , unterdrückt ist. Mit  $\vec{\nabla} r = \vec{x}/r$  folgt schließlich

$$A^0 = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\vec{x} \cdot \dot{\vec{p}}}{r^2} \quad (13.94)$$

sowie

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} A^0 - \partial_t \vec{A} = -\frac{1}{4\pi} \left( \vec{\nabla} \frac{\vec{x} \cdot \dot{\vec{p}}(t-r)}{r^2} + \partial_t \frac{\dot{\vec{p}}(t-r)}{r} \right) = -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{\vec{x} \cdot \ddot{\vec{p}}}{r^2} \left( -\vec{\nabla} r \right) + \frac{\ddot{\vec{p}}}{r} \right) + \dots \quad (13.95)$$

---

<sup>5</sup>Genauer gesagt braucht man  $r \gg 1/\omega$ , wenn die Oszillation eine typische Frequenz  $\omega$  hat.

Wiederum stehen die Auslassungszeichen für Terme, die im Fernfeld kleiner sind. Wir lassen diese weg und rechnen weiter:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\vec{x} \cdot \ddot{\vec{p}}}{r^2} (-\vec{\nabla} r) + \frac{\ddot{\vec{p}}}{r} \right) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{(\vec{x} \cdot \ddot{\vec{p}}) \vec{x}}{r^3} - \frac{\ddot{\vec{p}}}{r} \right) = \frac{1}{4\pi} \left( -\frac{\vec{x} \times (\ddot{\vec{p}} \times \vec{x})}{r^3} \right). \quad (13.96)$$

Hier haben wir im letzten Schritt die aus

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} \quad (13.97)$$

folgende Beziehung

$$\vec{x} \times (\ddot{\vec{p}} \times \vec{x}) = r^2 \ddot{\vec{p}} - (\vec{x} \cdot \ddot{\vec{p}}) \vec{x} \quad (13.98)$$

ausgenutzt. Wegen (13.88) gilt also

$$\vec{E} = \vec{B} \times \left( \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \right), \quad (13.99)$$

wie es in einer (im Fernfeld) ebenen Welle sein sollte.

Jetzt erinnern wir uns an unsere anfangs schon getroffene Wahl  $\vec{p} \parallel \vec{e}_z$  und berechnen aus

$$\vec{B} = \frac{\ddot{\vec{p}} \times \vec{x}}{4\pi r^2} \quad (13.100)$$

das Betragsquadrat des  $B$ -Feldes in einer durch  $\theta$  charakterisierten Abstrahlungsrichtung, vgl. Abb. 71. Da die Projektion von  $\vec{x}$  auf die 1-2-Ebene einen Faktor  $\sin \theta$  liefert, finden wir

$$|\vec{B}|^2 = \frac{1}{(4\pi)^2} \cdot \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{r^2} \cdot \sin^2 \theta. \quad (13.101)$$

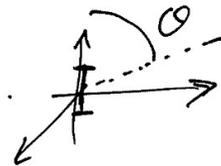


Abbildung 71: Polarwinkel  $\theta$  charakterisiert Abstrahlung eines senkrecht stehenden Dipols.

Wie wir an der letzten Formel weiterhin erkennen, fällt die durch  $|\vec{B}|^2$  charakterisierte Intensität invers mit der wachsenden Oberfläche der Sphären um den Ursprung ab. Dies erwarten wir natürlich aus Gründen der Energieerhaltung. Zur Vollständigkeit geben wir noch den Poynting-Vektor an,

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B} = |\vec{B}|^2 \cdot \left( \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \right), \quad (13.102)$$

wobei wir im letzten Schritt unsere expliziten Formeln für  $E$ - und  $B$ -Feld und insbesondere die Beziehung  $\vec{E} \perp \vec{B}$  benutzt haben. Wir bemerken schließlich noch, dass es keine Abstrahlung parallel zur Dipol-Achse gibt und die maximale Intensität bei  $\theta = \pi/2$  erreicht wird, vgl. Abb. 72.

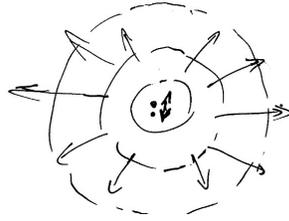


Abbildung 72: Dipolstrahlung mit maximaler Intensität bei  $\theta = \pi/2$ .

## 14 Felder in Materie

### 14.1 Dielektrische Verschiebung und magnetische Erregung

Erinnern wir uns an die Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \qquad (14.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{j} + \dot{\vec{E}} \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad (14.2)$$

und die Lorentz-Kraft

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}. \qquad (14.3)$$

Außerdem wollen wir uns zunächst auf das  $E$ -Feld konzentrieren. Man kann das  $E$ -Feld auf zwei verschiedene Weisen charakterisieren:

(1)  $\vec{E}$  wird durch  $Q$  erzeugt:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{f} = Q. \qquad (14.4)$$

(2)  $\vec{E}$  verursacht eine Kraft auf Ladungen  $q$ :

$$\vec{F} = q\vec{E}. \qquad (14.5)$$

Für uns ergeben sich (1) und (2) aus ein und der selben fundamentalen Wirkung. Beide gehen auf den selben Wechselwirkungs-Term zwischen Ladung und Feld zurück und sind somit untrennbar verbunden.

Es ist jedoch nützlich, sich folgende alternative (z.T. historische) Sichtweise vor Augen zu führen:

Wir benutzen (2) um eine lokale Messvorschrift für das  $E$ -Feld durch Probeladungen zu gewinnen. Wir definieren somit die Feldstärke durch

$$\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}}{q} \qquad (14.6)$$

und geben ihr die entsprechende Einheit

$$[\vec{E}] = \frac{\text{N}}{\text{C}} = \frac{\text{N}}{\text{As}}. \qquad (14.7)$$

Äquivalent dazu ist die Überlegung, dass ein durchs Feld bewegtes Teilchen Energie gewinnt:

$$q \cdot \vec{E} \cdot \vec{l} = \vec{F} \cdot \vec{l} \quad (14.8)$$

Die Maßeinheit der Ladung ist das Coulomb (C), die Maßeinheit von  $\vec{E} \cdot \vec{l}$  das Volt (V). Also gilt

$$C \cdot V = N \cdot m \quad \text{und damit} \quad [\vec{E}] = \frac{V}{m}. \quad (14.9)$$

Nun benutzen wir (1) zur Quantifizierung der Aussage, dass eine Ladung ein Feld erzeugt. A priori muss dies nicht unser  $E$ -Feld sein. Wir nennen das von der Ladung  $Q$  erzeugte Feld  $D$  (vgl. Abb. 73) und schreiben

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{f} = Q, \quad \text{so dass} \quad \Rightarrow \quad [\vec{D}] = \frac{C}{m^2}. \quad (14.10)$$

Man nennt  $\vec{D}$  die dielektrische Verschiebung oder elektrische Flussdichte oder elektrische Erregung (auf Englisch: electric field displacement oder electric induction).

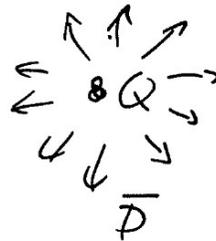


Abbildung 73: Ladung erzeugt Feld.

Die Verbindung zwischen (1) und (2) entsteht nun durch die Beobachtung, dass ein von Null verschiedenes  $D$ -Feld ein  $E$ -Feld nach sich zieht. Anders gesagt:  $\vec{D}$  ist durch Probeladungen  $q$  messbar. Dieser Zusammenhang ist in vielen Fällen linear, so dass wir

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \text{mit} \quad [\epsilon] = \frac{C/m^2}{V/m} = \frac{C}{Vm} = \frac{As}{Vm} \quad (14.11)$$

schreiben können. Im Vakuum gilt experimentell  $\epsilon = \epsilon_0 = 8.86 \cdot 10^{-12} C/Vm$ .

Jetzt führen wir eine analoge Betrachtung zum magnetischen Feld durch. Zunächst die beiden verschiedenen Sichtweisen des Feldes:

(1)  $\vec{B}$  wird durch  $I$  erzeugt:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = I. \quad (14.12)$$

(2)  $\vec{B}$  wirkt auf bewegte Ladungen:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (14.13)$$

Wir beginnen die Analyse wie auch im elektrischen Fall mit (2). Dabei nehmen wir zur Einfachheit rechte Winkel und arbeiten mit den Beträgen der relevanten Vektoren (vgl. Abb. 74). Dann gilt

$$F = q v B \quad (14.14)$$

und der Strom kann als

$$I = \frac{q v}{L} \quad (14.15)$$

erklärt werden, wobei  $L$  die Länge des betrachteten Leiterstücks ist. Es folgt

$$\frac{F}{L} = IB \quad \text{und damit} \quad [\vec{B}] = \frac{\text{N}}{\text{Am}}. \quad (14.16)$$

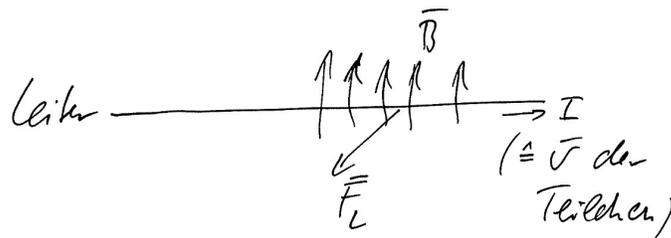


Abbildung 74: Auf einen stromdurchflossenen Leiter wirkt eine Lorentz-Kraft  $\vec{F} = \vec{F}_L$

Des Weiteren nehmen wir zunächst an, dass das laut (1) erzeugte Feld ist a priori eine andere Größe ist. Diese nennen wir  $\vec{H}$ , so dass gilt

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = I \quad \text{und damit} \quad [\vec{H}] = \frac{\text{A}}{\text{m}}. \quad (14.17)$$

Wir bezeichnen  $\vec{H}$  als magnetische Erregung und bemerken, dass die Bezeichnungsweise im Englischen leider verwirrend ist: In der theoretischen Physik spricht man in beiden Fällen vom magnetic field und unterscheidet  $B$ -field und  $H$ -field – in den Ingenieurwissenschaften wird aber oft  $H$  als magnetic field strength und  $B$  als flux density bezeichnet.

Wie im elektrischen Fall macht man nun die Beobachtung, dass  $\vec{H}$  zu  $\vec{B}$  führt und der Zusammenhang oft linear ist:

$$\vec{B} = \mu \vec{H}. \quad (14.18)$$

Man beachte, dass aus historischen Gründen der Proportionalitätskoeffizient  $\mu$  im Vergleich zum elektrischen Fall auf der anderen Seite steht und gewissermaßen invers zu  $\epsilon$  definiert ist. Seine Einheit ist

$$[\mu] = \frac{\text{N}}{\text{Am}} \cdot \frac{\text{m}}{\text{A}} = \frac{\text{VC} \cdot \text{s}}{\text{Am} \cdot \text{As}} = \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \quad (14.19)$$

und im Vakuum gilt  $\mu = \mu_0 \approx 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$ . Ehemals war die hier auftretende Zahl  $4\pi \cdot 10^{-7}$  aufgrund der Definition des Amperes exakt. Heute ist sie nur noch ein Messwert.

Um die letzte Bemerkung zu erklären, unternehmen wir eine kurze Abschweifung und sprechen über SI-Einheiten:

Sekunde: Wird über präzise Zeitmessungen in der Atomphysik definiert.

Meter: Folgt aus Sekunde und dem festen Wert der Lichtgeschwindigkeit  $c$ .

Kilogramm: Folgt analog aus Meter, Sekunde und dem festen Wert von  $\hbar$  ( $[\hbar] = \text{kg m}^2/\text{s}$ ).

Volt: Folgt auf Grund der Definition  $V = \text{Nm}/\text{C}$  analog aus Nm und  $C = \text{As}$ .

Ampere: Historisch wurde das Ampere so definiert, dass der oben angegebene Ausdruck für  $\mu_0$  exakt ist. Dann konnte man den Zahlenwert der Elementarladung  $e$  in SI-Einheiten experimentell bestimmen. Es hat sich aber in neuerer Zeit als besser erwiesen, die Elementarladung als Naturkonstante zu benutzen und das Ampere aus  $e$  und der Sekunde zu definieren. Dabei hat man allerdings eine entsprechend angepasste 'krumme' Zahl eingeführt, so dass der oben angegebene historische Zahlenwert für  $\mu_0$  zumindest näherungsweise respektiert wird.

Damit wollen wir unsere Abschweifung beenden.

Im Gauß-System (bzw. Heaviside-Gauß-System, welches sich nur durch  $4\pi$ -Faktoren unterscheidet) setzt man das theoretische Verständnis voraus, dass  $\vec{E}$  und  $\vec{D}$  sowie  $\vec{B}$  und  $\vec{H}$  fundamental das selbe sind. Es gilt also  $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$ .

Trotzdem sind, für die Elektrodynamik in Materie, die Felder  $\vec{D}$  und  $\vec{H}$  weiterhin nützlich: Es gilt nach wie vor

$$\vec{B} = \mu \vec{H}; \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}; \quad (14.20)$$

wobei  $\mu, \epsilon$  dimensionslose Zahlen sind, deren Abweichung von 1 den Materie-Effekt charakterisiert.

Der qualitative Grund ist folgender: Per Definition, also gemäß

$$\oint \vec{D} d\vec{f} = Q \quad \text{bzw.} \quad \oint \vec{H} d\vec{s} = I \quad (14.21)$$

nehmen zunächst  $\vec{D}$  und  $\vec{H}$  in Anwesenheit von Materie genau die gleichen Werte an wie ohne Materie, vorausgesetzt natürlich die Quelle bleibt gleich (vgl. Abb. 75 und Abb. 76). Allerdings lässt die Quelle die Materie i.A. elektromagnetisch reagieren, so dass die durch Probeladungen wirklich messbaren Felder  $\vec{E}$  bzw.  $\vec{B}$  **nicht** den Wert annehmen, wie ihn eine gegebene Quelle ( $Q$  oder  $I$ ) im Vakuum erzeugen würde. Dieser Unterschied wird durch von Eins verschiedene Werte  $\epsilon$  und  $\mu$  charakterisiert.

## 14.2 Maxwell-Gleichungen in Materie: Elektrostatik

Wir wollen das oben qualitative erklären nun in etwas größerem Detail analysieren, wobei wir uns zunächst auf die Elektrostatik konzentrieren. Ein  $E$ -Feld kann prinzipiell zu zwei verschiedenen Effekten führen:

**Erstens:** Das Feld kann Dipole, die in der Materie schon vorhanden sind, ausrichten (vgl. Abb. 77). Um das zu sehen, modellieren wir einen Dipol als einen kurzen Stab, charakterisiert durch eine Vektor  $\vec{l}$  mit fester Länge und zwei entgegengesetzten Ladungen an den Enden, vgl. Abb. 78. Das Dipolmoment ist

$$\vec{p} = q\vec{l}. \quad (14.22)$$



Abbildung 75: Eine Ladung  $Q$  in Materie erzeugt ein per Definition materieunabhängiges  $\vec{D}$ , z.B. auf der skizzierten Sphäre um  $Q$ . Der messbare Feldwert auf dieser Sphäre ist durch  $\vec{E} \neq \vec{D}$  charakterisiert.

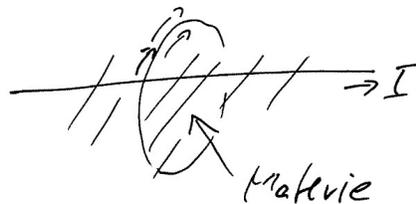


Abbildung 76: Ein stromdurchflossener Leiter in Materie erzeugt ein per Definition materieunabhängiges  $\vec{H}$ , z.B. auf dem skizzierten Kreis um  $I$ . Der messbare Feldwert auf diesem Kreis ist durch  $\vec{B} \neq \vec{H}$  charakterisiert.

Im Feld wirkt auf jede der Ladungen eine Kraft

$$\vec{F}_L = q\vec{E}. \quad (14.23)$$

Dadurch erhält der Dipol im Feld einerseits eine von der Richtung von  $\vec{p}$  abhängige Energie:

$$W = -\vec{p} \cdot \vec{E}, \quad (14.24)$$

andererseits erzeugen die Kräfte ein auf den Dipol wirkendes Drehmoment

$$\vec{M}_D = \vec{p} \times \vec{E}. \quad (14.25)$$

Beide Effekte führen dazu, dass sich die Dipole nach Möglichkeit parallel zu  $\vec{E}$  ausrichten werden.

**Zweitens:** Das Feld kann die Moleküle oder Atome der Materie polarisieren, also Dipole erzeugen, vgl. Abb. 79. Dies geschieht dadurch, dass positive Ladungen in  $\vec{E}$ -Richtung und negative Ladungen entgegengesetzt verschoben werden. Klarerweise haben damit die entstehenden Dipole automatisch die Tendenz, in  $\vec{E}$ -Richtung ausgerichtet zu sein. Dies führt zum gleichen Resultat wie bei 'Erstens'.



Abbildung 77: Feld richtet Dipole aus.

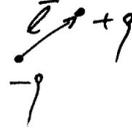


Abbildung 78: Elementares Modell für Dipol.

Wir definieren nun die **Polarisation** als

$$\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta V}, \quad (14.26)$$

wobei das Volumen  $\Delta V$ , über das wir die elementaren Dipole  $\vec{p}_i$  summieren, mikroskopisch sein soll aber doch groß genug, um sehr viele Dipole zu enthalten. Die Polarisation  $\vec{P}$  ist per Definition eine gemittelte Größe.

Betrachte wir nun ein makroskopisches Teilvolumen  $V$  mit Rand  $\partial V$ , in dem eine i.A. ortsabhängige Polarisation  $\vec{P}(x)$  vorliegt, vgl. Abb. 80. Wir behaupten, dass in dieser Situation die (atomare) Ladung im Volumen  $V$  gegeben ist durch

$$Q_a(V) = - \oint \vec{P} \cdot d\vec{f}. \quad (14.27)$$

Zur Begründung denke man sich zunächst alle positiven und negativen Ladungen der Materie paarweise exakt aufeinander, so dass  $P = 0$ . Dann sollen sie gemäß einem gemittelten Verschiebungsfeld  $\vec{l} = \vec{l}(\vec{x})$  getrennt werden, wodurch natürlich viele kleine Dipole mit Dipolmomenten  $\vec{p} = q\vec{l}$  entstehen. Nehmen wir zur Einfachheit an, dass dabei die negativen Ladungen an ihren Plätzen bleiben und nur die positiven Ladungen jeweils um  $\vec{l}(\vec{x})$  verschoben werden.

Wir wollen die Dichte der Ladungspaare im Körper mit  $\rho_p$  bezeichnen. Dann kann man sich mit elementarer Geometrie überlegen (vgl. Abb. 81), dass die Gesamtmenge positiver Ladungen, welche  $V$  verlassen, gegeben ist durch

$$\oint \rho_p \vec{l} \cdot d\vec{f} = \oint \vec{P} \cdot d\vec{f} = -Q_a(V). \quad (14.28)$$

Hierbei ist, wie aus der obigen Diskussion hervorgeht,  $\vec{P}(\vec{x}) = \rho_p(\vec{x}) \vec{l}(\vec{x})$  die Polarisation. Mit  $Q_a(V)$  bezeichnen wir die atomare Gesamtladung, welche nach 'Einschalten' des Verschiebungsfeldes  $\vec{l}$  im Volumen  $V$  enthalten ist.

Aufgrund des Satzes von Gauß kann nun die letzte Gleichheit in (14.28) auch in differentieller Form angegeben werden:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\rho_a. \quad (14.29)$$

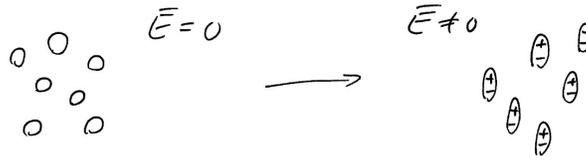


Abbildung 79: Feld polarisiert Atome oder Moleküle.



Abbildung 80: Gebiet mit Volumen  $V$  und ortsabhängiger Polarisation.

Hierbei ist  $\rho_a$  die atomare Ladungsdichte, deren Integral über  $V$  gerade  $Q_a$  ergibt.

Wenn es nun neben der aufgrund atomarer Dipole entstehenden atomaren Ladungsdichte  $\rho_a$  auch noch freie Ladungen und eine freie Ladungsdichte  $\rho_f$  gibt, dann erhält man für die Gesamt-Ladungsdichte:

$$\rho = \rho_f + \rho_a. \quad (14.30)$$

Aufgrund der Maxwell-Gleichungen der fundamentalen Vakuum-Theorie gilt dann

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho_f + \rho_a. \quad (14.31)$$

Mit  $\rho_a = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$  folgt

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} + \vec{P}) = \rho_f. \quad (14.32)$$

Jetzt definieren wir

$$\vec{D} \equiv \vec{E} + \vec{P}, \quad (14.33)$$

und haben damit unsere ersten beiden Maxwell-Gleichungen für den Fall mit Materie hergeleitet:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}. \quad (14.34)$$

Wir erinnern, dass in der ersten Gleichung beide Größen gemittelt sind. Die zweite Gleichung ist homogen und bleibt damit unbeeinflusst von der Materie. Ergänzt werden die Gleichungen durch die Beziehung

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad (14.35)$$

oder, äquivalenterweise,

$$\vec{P} = \chi_e \vec{E}, \quad (14.36)$$

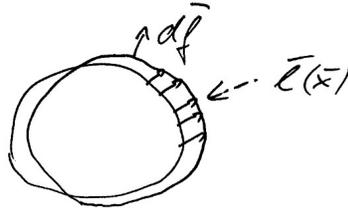


Abbildung 81: Das Einschalten eines Verschiebungsfeldes für positive atomare Ladungen führt zu einer Gesamtladung in  $V$ , welche durch ein Flächenintegral berechenbar ist.

wobei

$$\epsilon \equiv 1 + \chi_e \quad (14.37)$$

gilt. Wir betonen, dass (14.35) bzw. (14.36) für uns im Moment phänomenologische Annahmen darstellen, welche jedoch in vielen Fällen durch eine mikroskopische Analyse beweisbar sind. Man bezeichnet  $\epsilon$  als **Permittivität** oder **Dielektrizitätskonstante** und  $\chi_e$  als **elektrische Suszeptibilität**.

### 14.3 Maxwell-Gleichungen in Materie: Magnetostatik

Unsere Analyse wiederholt im Wesentlichen die des letzten Kapitels:

**Erstens:** Ganz analog zum elektrischen Fall wird ein  $\vec{B}$ -Feld schon vorhandene Dipole ausrichten, vgl. Abb. 82.



Abbildung 82: Atomare magnetische Dipole, realisiert durch mikroskopische Kreisströme in Atomen oder Molekülen, werden durch ein  $B$ -Feld ausgerichtet.

Um dies zu quantifizieren, erinnern wir uns an die Beziehung zwischen magnetischem Dipolmoment und Drehimpuls der Ladung:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \frac{q}{m} \vec{L} = \frac{1}{2} q \vec{x} \times \vec{v} = \frac{1}{2} q r v \hat{e}_L = \frac{q}{2\pi r} v \hat{e}_L \pi r^2. \quad (14.38)$$

Hier haben wir eine Kreisstrom mit mikroskopischem Radius  $r = |\vec{x}|$  angenommen, siehe Abb. 83. Im letzten Ausdruck können wir benutzen, dass  $q/2\pi r$  die Linien-Ladungsdichte ist. Damit ist  $(q/2\pi r) v$  der Strom  $I$ . Also erhalten wir

$$\vec{m} = I \Delta \vec{f}, \quad (14.39)$$

wobei  $\Delta \vec{f}$  für den Flächenvektor der vom Strom umflossenen Fläche steht. Wir bemerken noch, dass diese Formel allgemeiner gilt, also auch dann, wenn die Stromkurve keinen Kreis bildet.



Abbildung 83: Kreisförmiger Strom erzeugt Drehimpuls und magnetisches (Dipol-)Moment.

Mit der bekannten Formel für die Lorentzkraft  $\vec{F}_L$  zeigt man weiterhin leicht, dass der Kreisstrom in einem Magnetfeld ein Drehmoment

$$\vec{M}_D = \vec{m} \times \vec{B} \quad (14.40)$$

erfährt, vgl. Abb. 84. Wir sehen, dass dies völlig analog zu unserem Resultat (14.25) im elektrostatischen Fall ist. Dies war auf Grund der Dualität natürlich zu erwarten.



Abbildung 84: Kreisstrom erfährt auf Grund seines magnetisches Moments im  $B$ -Feld ein Drehmoment.

Wir sehen also, dass das Feld die als Kreisstrom realisierten Dipole ausrichtet. Wie man sich leicht überlegt, verlaufen die Feldlinien des ausgerichteten Kreisstroms so, dass sie im Inneren des Kreisstroms das ausrichtende Feld verstärken. Das ist anders als beim elektrischen Dipol, wo zwischen den beiden Ladungen des ausgerichteten Dipols das ausrichtende Feld geschwächt wird. Wir werden darauf ganz am Ende des Kapitels zurückkommen.

**Zweitens:** Wiederum analog zum elektrostatischen Fall werden beim Einschalten von  $\vec{B}$  Kreisströme (und damit magnetische Dipole) auf atomarer bzw. molekularer Ebene induziert. Aber es gibt einen wesentlichen Unterschied: Der Effekt ist jetzt wegen der Lenzschen Regel entgegengesetzt – vgl. Abb. 85: Das Einschalten bzw. Anwachsen des Feldes  $\vec{B}$  erzeugt ein  $E$ -Feld und damit einen Strom. Dieser Strom erzeugt wiederum ein Feld  $\vec{B}'$ , welches dem ursprünglichen  $B$ -Feld gegenüber entgegengesetzt ist,  $\vec{B}' \updownarrow \vec{B}$ . Dies bezeichnet man oft als **Lenzsche Regel**. Man leitet sie mit der Integralform der Maxwell-Gleichung  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$ , also

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int (\partial_t \vec{B}) \cdot d\vec{f}. \quad (14.41)$$

Letztere heißt auch **Induktionsgesetz**.

Den beiden Fällen der Ausrichtung von Dipolen und der Erzeugung von Dipolen ist gemeinsam: Ein Feld  $\vec{B}$  in Materie führt i.A. zu einer von Null verschiedenen magnetischen Dipoldichte bzw. Magnetisierung:

$$\vec{M} \equiv \frac{\sum_i \vec{m}_i}{\Delta V}. \quad (14.42)$$

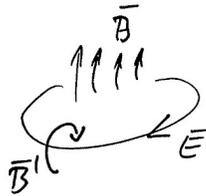


Abbildung 85: Zur Lenzschen Regel

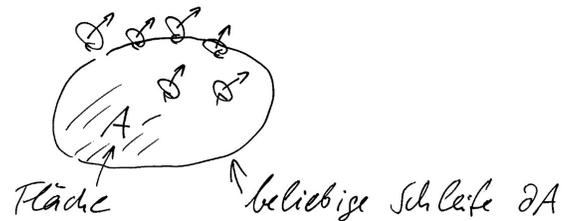


Abbildung 86: Mikroskopisches Bild zur (gemittelten) Dipoldichte oder Magnetisierung  $\vec{M}(\vec{x})$  mit einer im Körper liegenden Fläche  $A$ .

Betrachten wir nun eine im Körper liegende Fläche  $A$  mit Rand  $\partial A$ , vgl. Abb. 86.

Man kann sich auf Grund dieses Bildes rein geometrisch überlegen, dass folgendes gilt:

$$\int_A \vec{j}_M \cdot d\vec{f} = \oint_{\partial A} \vec{M} \cdot d\vec{s}. \quad (14.43)$$

Hierbei integrieren wir links den mit der Magnetisierung verbundenen Strom  $\vec{j}_M$  über die Fläche und rechts die Magnetisierung über den Rand. Im Inneren der Fläche trägt keiner der Kreisströme zum Integral bei auf der linken Seite bei: Grund ist, dass er, falls er die Fläche schneidet, dies zwei Mal tut und der Strom zwei Mal mit entgegengesetztem Vorzeichen beiträgt. Anders ist es am Rand der Fläche. Hier wird es Kreisströme geben, welche den Rand  $\partial A$  umschließen. Sie durchdringen die Fläche nur ein Mal und tragen so zum Integral des Stroms über die Fläche bei, vgl. Abb. 87. Dieser letzte Effekt wird aber ebenso von dem Integral rechts, also dem Integral der Magnetisierung über den Rand, quantifiziert: Die Zahl der ausgerichteten Dipole pro Volume ist ja gerade die Magnetisierung, und wenn diese groß ist und parallel zur Randkurve  $\partial A$  liegt, dann werden viele Kreisströme von der Randkurve durchdrungen.

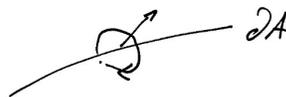


Abbildung 87: Kreisstrom trägt zu  $\int \vec{j} \cdot d\vec{f}$  bei, wenn  $\partial A$  Kreis durchdringt.

Wir können nun mit Hilfe von Stokes zur differentiellen Form der Beziehung (14.43)

übergehen:

$$\vec{j}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M}. \quad (14.44)$$

Außerdem gilt die folgende (Vakuum-)Maxwell-Gleichung:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{j}_f + \vec{j}_a + \dot{\vec{E}}. \quad (14.45)$$

Hier haben wir rechts neben der Zeitableitung des  $E$ -Feldes den Gesamtstrom,  $\vec{j} = \vec{j}_f + \vec{j}_a$ . Er setzt sich aus freiem und atomarem Strom zusammen. Letzterer wiederum ist die Summe von Magnetsierungs-Strom und Polarisations-Strom:

$$\vec{j}_a = \vec{j}_M + \vec{j}_P \quad (14.46)$$

Der Polarisations-Strom ist per Definition der Strom, der in Materie entsteht, falls sich die Polarisation mit der Zeit ändert. Man kann sich rein geometrisch überlegen, vgl. Abb. 88, dass

$$\vec{j}_P = \dot{\vec{P}}. \quad (14.47)$$

Damit folgt

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{j}_f + \vec{j}_M + \dot{\vec{P}} + \dot{\vec{E}}. \quad (14.48)$$

Jetzt benutzen wir die weiter oben hergeleiteten Beziehungen  $\vec{j}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M}$  und  $\dot{\vec{P}} + \dot{\vec{E}} = \dot{\vec{D}}$ . Wenn wir mit deren Hilfe  $\vec{j}_M$  und  $\dot{\vec{P}} + \dot{\vec{E}}$  ersetzen, so finden wir

$$\vec{\nabla} \times (\vec{B} - \vec{M}) = \vec{j}_f + \dot{\vec{D}}. \quad (14.49)$$

Wir definieren nun

$$H \equiv \vec{B} - \vec{M}. \quad (14.50)$$

Es gilt also

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_f + \dot{\vec{D}}. \quad (14.51)$$

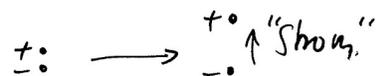


Abbildung 88: Eine Änderung der Polariation erzeugt eine Stromdichte.

Wie wir weiter oben argumentiert hatten besteht aufgrund der Ausrichtung atomarer Dipole bzw. der Induktion atomarer Ströme ein linearer Zusammenhang zwischen  $\vec{B}$  und  $\vec{M}$ . Damit besteht also auch ein linearer Zusammenhang zwischen  $\vec{B}$  und  $\vec{H}$ . Wir können somit

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (14.52)$$

schreiben, was die magnetische Suszeptibilität  $\chi_m$  definiert. Äquivalent dazu ist die Aussage

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (14.53)$$

wobei  $\mu = 1 + \chi_m$  als magnetische Permeabilität bezeichnet wird.

Zusammenfassend haben wir damit die Maxwell-Gleichungen in Materie in der Form

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_f + \dot{\vec{D}} \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad (14.54)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \qquad (14.55)$$

hergeleitet. Wir betonen, dass hier alle Größen als gemittelt zu betrachten sind. Die Maxwell-Gleichungen werden ergänzt durch

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \qquad \text{und} \qquad \vec{B} = \mu \vec{H}. \qquad (14.56)$$

Dabei gilt  $\epsilon = 1 + \chi_e$  mit  $\chi_e > 0$  sowie  $\mu = 1 + \chi_m$ . Man spricht von Paramagnetismus bei  $\chi_m > 0$ , von Ferromagnetismus bei  $\chi_m \gg 1$  und von Diamagnetismus bei  $\chi_m < 0$ .

Wie sehen, dass das Vorzeichen des Effekts im elektrischen Fall eindeutig ist, während im magnetischen Fall beide Vorzeichen auftreten können. Ohne hier im Detail darauf eingehen zu können, sehen wir doch zumindest die grundlegende Ursache für dieses Phänomen: Im magnetischen Fall verstärkt der ausgerichtete Kreisstrom das äußere Feld in seinem Inneren, der durch Induktion generierte Kreisstrom schwächt es hingegen. Im elektrischen Fall schwächen sowohl der ausgerichtete als auch der induzierte elektrische Dipol das äußere Feld.

## 14.4 Wellen in Materie

Natürlich kann man die Maxwell-Gleichungen in Materie auch ausschließlich in  $B$  und  $E$  schreiben. Dazu muss man  $H$  und  $D$  mittels der oben angegebenen Beziehungen eliminieren. Es folgt

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{j}_f + \mu \epsilon \dot{\vec{E}} \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad (14.57)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \rho_f \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}. \qquad (14.58)$$

Wenn wir nun Wellen betrachten wollen, so können wir nicht mehr einfach  $\vec{j}_f = 0$ ,  $\rho_f = 0$  setzen, da Felder in Leitern Ströme und damit Ladungen erzeugen können. Entscheidend hierfür ist das Ohmsche Gesetz

$$\vec{j}_f = \sigma \vec{E}, \qquad (14.59)$$

mit der Leitfähigkeit  $\sigma$ . Wir nehmen diese intuitiv einleuchtende Beziehung, die natürlich trotzdem einer mikroskopischen Herleitung bedarf, hier als phänomenologische Tatsache hin. Zusammen mit Kontinuitätsgleichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_f + \dot{\rho}_f = 0 \qquad (14.60)$$

folgt daraus

$$\dot{\rho}_f = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_f = -\sigma \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon} \rho_f. \qquad (14.61)$$

Wir erkennen, dass diese Differentialgleichung für die zeitliche Entwicklung der freien Ladungsdichte  $\rho_f$  zu einer exponentiellen Dämpfung dieser Größe führt. Dies ist konsistent mit der phänomenologischen Tatsache, dass es in Leitern freie Ladungen nur an Oberfläche geben kann.

Also dürfen wir annehmen, dass näherungsweise  $\rho_f = 0$  gilt und die Maxwell-Gleichungen in der Form

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\sigma\vec{E} + \mu\epsilon\dot{\vec{E}} \quad \vec{\nabla}\vec{B} = 0 \quad (14.62)$$

$$\vec{\nabla}\vec{E} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad (14.63)$$

schreiben. Jetzt wiederholen wir die weiter oben skizzierte nichtkovariante Herleitung der Wellengleichungen: Anwendung der Rotation auf die erste Gleichung liefert

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu\sigma\vec{\nabla} \times \vec{E} + \mu\epsilon\vec{\nabla} \times \dot{\vec{E}}. \quad (14.64)$$

Dies lässt sich mit Hilfe der letzten Gleichung umformen zu

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla}\vec{B}) - \Delta\vec{B} = \mu\sigma (-\dot{\vec{B}}) + \mu\epsilon (-\ddot{\vec{B}}). \quad (14.65)$$

Da die Divergenz von  $\vec{B}$  verschwindet, folgt

$$\mu\epsilon\partial_t^2\vec{B} + \mu\sigma\partial_t\vec{B} - \Delta\vec{B} = 0. \quad (14.66)$$

Eine entsprechende Analyse, die mit der letzten Maxwell-Gleichung startet, liefert

$$\mu\epsilon\partial_t^2\vec{E} + \mu\sigma\partial_t\vec{E} - \Delta\vec{E} = 0. \quad (14.67)$$

Wir konzentrieren uns nun auf ebene Wellen und nehmen O.B.d.A. an, dass die Wellenfront in der  $x$ - $y$ -Ebene liegt:

$$\vec{E} = \vec{\varepsilon}e^{i(kz-\omega t)}. \quad (14.68)$$

Einsetzen in die Wellengleichung für  $\vec{E}$  liefert

$$-\mu\epsilon\omega^2 - i\mu\sigma\omega + k^2 = 0 \quad \text{wobei} \quad k = k_z = |\vec{k}|. \quad (14.69)$$

Bei gegebenem reellem  $\omega$  wird  $k$  komplex:

$$k = \text{Re}(k) + i \text{Im}(k). \quad (14.70)$$

Wir sehen, dass das Auftreten eines von Null verschiedenen Imaginärteils an der Leitfähigkeit  $\sigma$  hängt. Der Imaginärteil von  $k$  entspricht einer exponentiellen Dämpfung in  $z$ -Richtung und somit einer endlichen Eindringtiefe des  $E$ -Feldes in Leitern.

Ab jetzt wollen wir annehmen, dass  $\sigma = 0$  und somit  $k$  reell ist. Wir haben dann

$$\omega = \frac{k}{\sqrt{\mu\epsilon}}. \quad (14.71)$$

Wir definieren den **Brechungsindex**

$$n \equiv \sqrt{\mu\epsilon} \quad (14.72)$$

und finden somit für die Phasengeschwindigkeit  $v_p = \omega/k$  die Relation

$$n = \frac{1}{v_p}. \quad (14.73)$$

Wenn wir nicht mit der Konvention  $c = 1$  arbeiten, lauten die entsprechenden Formeln

$$\omega = \frac{kc}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad \text{und} \quad n = \frac{c}{v_p}. \quad (14.74)$$

Wir bemerken, dass  $\mu$  und  $\epsilon$  i.A. von der Frequenz abhängen, so dass sich Gruppen- und Phasengeschwindigkeit unterscheiden,  $v_g \neq v_p$ . Es gibt also in Materie eine nichttriviale Dispersion.

Es gäbe an dieser Stelle noch viel mehr zu sagen. Zum Beispiel sind  $\mu$  und  $\epsilon$  i.A. Tensoren, weil Materie in verschiedenen Richtungen verschieden auf Felder reagieren kann. Aber wir wollen uns auf den einfachsten Fall der linearen Dispersion beschränken und im letzten Kapitel die Brechung sowie Reflexion ebener Wellen an der Grenzfläche zweier Medien besprechen.

## 14.5 Brechung und Reflexion

Wie oben schon gesagt, besprechen wir hier nur den einfachsten Fall von Brechung und Reflexion. Viel mehr interessante Details und eine tiefere Analyse finden sich z.B. in [7].

Wir betrachten die in Abb. 89 dargestellte Situation, bei der eine Welle von unten auf eine in der 1-2-Ebene liegende Grenzfläche zweier Stoffe trifft. Die einfallende Welle wird durch

$$\vec{E}_e = \vec{\epsilon}_e e^{i(\vec{k}_e \vec{x} - \omega_e t)} \quad ; \quad \vec{B}_e = n \hat{k}_e \times \vec{E}_e \quad \text{mit} \quad \hat{k} \equiv \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \quad (14.75)$$

beschrieben. Der Ausdruck für  $\vec{B}_e$ , insbesondere der vom Vakuum-Fall verschiedene Vorfaktor  $n = \sqrt{\mu\epsilon}$ , folgt unmittelbar aus den Maxwell-Gleichungen in Materie. Wir betonen, dass der Polarisationsvektor  $\vec{\epsilon}_e$  nichts mit der dielektrischen Konstanten  $\epsilon$  zu tun hat.

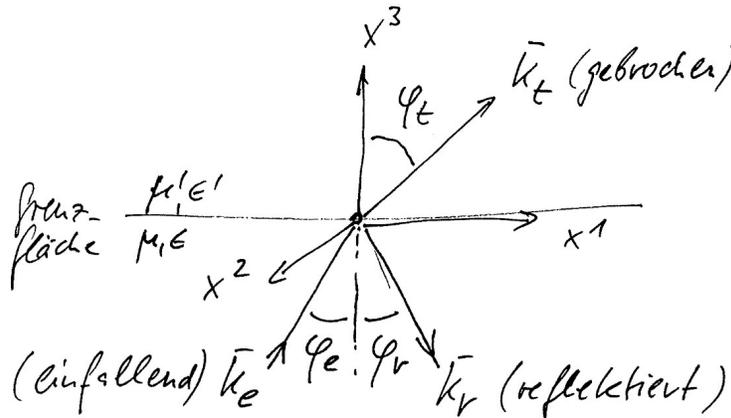


Abbildung 89: Die Grenzfläche zweier Stoffe liegt in der 1-2-Ebene. Eine von unten einfallende Welle wird teilweise reflektiert und teilweise transmittiert.

Völlig analoge Ausdrücke gelten für die zur reflektierten und transmittierten Welle gehörigen Feldstärken  $\vec{E}_r, \vec{B}_r$  sowie  $\vec{E}_t, \vec{B}_t$ . Bei der transmittierten bzw. gebrochenen Welle ist  $n$  durch  $n' = \sqrt{\mu'\epsilon'}$  zu ersetzen.

Betrachten wir nun zunächst die reine Kinematik, also nur die Richtungen der Wellen: Um überhaupt eine Chance zu haben, an der Grenzfläche stetige Anschlussbedingungen zu erfüllen, müssen alle 3 Wellen mit gleicher Frequenz oszillieren:

$$\omega_e = \omega_r = \omega_t \equiv \omega. \quad (14.76)$$

Des Weiteren, müssen stetige Anschlussbedingungen entlang der gesamten Grenzfläche gelten. Dazu müssen die Phasen aller drei Wellen sich in gleicher Weise als Funktion von  $x^1, x^2$  ändern, also

$$\vec{k}_e \cdot \vec{x}_{\parallel} = \vec{k}_r \cdot \vec{x}_{\parallel} = \vec{k}_t \cdot \vec{x}_{\parallel} \quad \text{für alle} \quad \vec{x}_{\parallel} \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (14.77)$$

Das impliziert, dass die Projektion jedes der 3 Vektoren  $\vec{k}_*$  (mit  $*$  =  $\{e, r, t\}$ ) auf die horizontale Ebene gleich ist. Es folgt, dass alle 3 Vektoren  $\vec{k}_*$  in der gleichen vertikalen Ebene liegen müssen. Die Gleichheit des Betrags ihrer Projektion auf die Grenzfläche bedeutet

$$|\vec{k}_e| \sin \varphi_e = |\vec{k}_r| \sin \varphi_r = |\vec{k}_t| \sin \varphi_t. \quad (14.78)$$

Jetzt benutzen wir die Beziehungen

$$|\vec{k}_e| = |\vec{k}_r| = n\omega \quad (14.79)$$

sowie

$$|\vec{k}_t| = n'\omega. \quad (14.80)$$

Damit folgt einerseits

$$\sin \varphi_e = \sin \varphi_r, \quad (14.81)$$

also die **Gleichheit von Einfallswinkel- und Reflexionswinkel**. Andererseits findet man die als **Gesetz von Snell** oder Snellius bekannte Beziehung

$$n \sin \varphi_e = n' \sin \varphi_t \quad (14.82)$$

zwischen Einfallswinkel- und Transmissionswinkel.

Jetzt wenden wir uns der Dynamik zu, also der Intensität der Wellen sowie ihrer Polarisation und Phase. Dazu müssen wir die Anschlussbedingungen an der Grenzfläche im Detail studieren.

Betrachten wir dazu zunächst den in Abb. 90 skizzierten sehr flachen Quader, welcher von der Grenzfläche zentral geschnitten wird. Wenn wir annehmen, dass es an der Grenzfläche keine freien Ladungen gibt, dann folgt mit Maxwell

$$\oint_{\partial V} \vec{D} d\vec{f} = Q_f = 0. \quad (14.83)$$

Da das Oberflächenintegral von Deck- und Bodenfläche dominiert wird, folgt damit, dass  $\vec{D}_{\perp}$  an der Grenzfläche stetig ist.

Jetzt führen wir ein analoges Argument mit einem entsprechenden dünnen Rechteck, vgl. Abb. 91, durch: Wir finden mit Maxwell

$$\oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0, \quad (14.84)$$

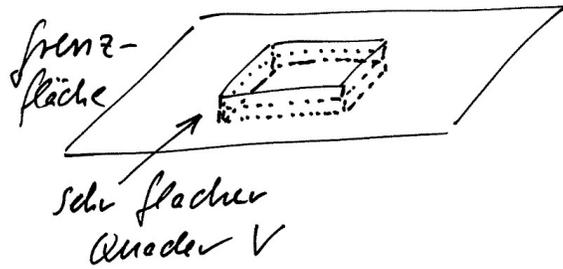


Abbildung 90: Flacher Quader  $V$ , dessen Deck- und Bodenfläche jeweils ober- und unterhalb Grenzfläche liegen.

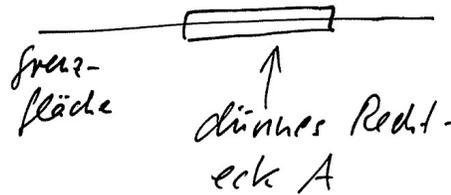


Abbildung 91: Dünnes Rechteck  $A$ , dessen lange Seiten jeweils ober- und unterhalb der Grenzfläche liegen.

woraus diesmal die Stetigkeit von  $\vec{E}_{\parallel}$  folgt.

Jetzt wiederholen wir die beiden obigen Argumente für das  $B$  und  $H$ -Feld: Zunächst integrieren wir  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$  über  $V$  und finden

$$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{f} = 0. \quad (14.85)$$

Es folgt, dass  $\vec{B}_{\perp}$  stetig ist. Dann integrieren wir  $\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0$  über  $A$  und finden

$$\oint_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} = I_f + \int_A \vec{\dot{D}} \cdot d\vec{f}. \quad (14.86)$$

Wir nehmen an, dass es an der Grenzfläche keinen freien Strom gibt,  $I_f = 0$ . Außerdem verschwindet das Integral von  $\vec{\dot{D}}$  in dem Grenzwert, dass das Rechteck beliebig flach wird, was wir natürlich annehmen. Also gilt

$$\oint_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} = 0, \quad (14.87)$$

und damit folgt die Stetigkeit von  $\vec{H}_{\parallel}$ .

Wir beschränken uns im Folgenden auf lineare Polarisation und analysieren zunächst den Fall, dass das  $\vec{E}$ -Feld parallel zur Einfallsebene liegt. Es geht also um zur Einfallsebene **parallele Polarisation**, vgl. Abb. 92.

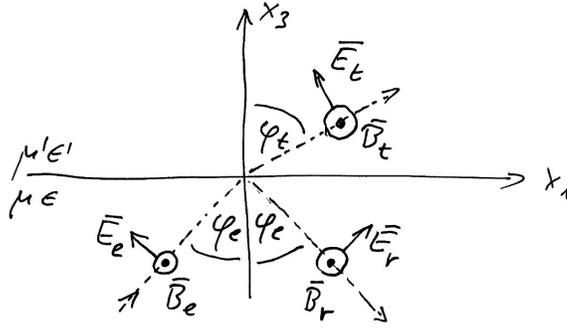


Abbildung 92: Skizze zu Brechung und Reflexion bei paralleler Polarisation. Die Pfeile charakterisieren das  $\vec{E}$ -Feld, die Kreise mit Punkten im Zentrum stehen für ein  $\vec{B}$ -Feld, welches aus der Blattebene heraus zeigt.

Wir wollen die Notation:  $\varepsilon_* = |\vec{\varepsilon}_*|$  für die Beträge der Polarisationsvektoren verwenden. Aus der Stetigkeit von  $\vec{E}_{\parallel}$  leitet man mittels der Skizze ab, dass

$$(\varepsilon_e - \varepsilon_r) \cos \varphi_e = \varepsilon_t \cos \varphi_t. \quad (14.88)$$

Als Nächstes wollen wir die Stetigkeit von  $\vec{H}_{\parallel}$  nutzen, was hier

$$|\vec{H}_e| + |\vec{H}_r| = |\vec{H}_t| \quad (14.89)$$

impliziert. Wir erinnern uns, dass  $\vec{H} = \vec{B}/\mu$ . Außerdem gilt in unserer Beschreibung der Welle  $|\vec{B}| = \sqrt{\varepsilon\mu}|\vec{E}| = \sqrt{\varepsilon\mu}|\vec{\varepsilon}|$ . Damit folgt

$$|\vec{H}_{e,r}| = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \varepsilon_{e,r} \quad \text{und} \quad |\vec{H}_t| = \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}} \varepsilon_t \quad (14.90)$$

und wir finden schließlich

$$(\varepsilon_e + \varepsilon_r) \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} = \varepsilon_t \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}}. \quad (14.91)$$

Wir definieren nun die Amplituden der reflektierten und transmittierten Welle, jeweils relativ zur einfallenden Welle:

$$A_r \equiv \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_e}, \quad A_t \equiv \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_e}. \quad (14.92)$$

Aus 14.88 folgt damit

$$1 - A_r = A_t \frac{\cos \varphi_t}{\cos \varphi_e} \quad (14.93)$$

und aus 14.91 folgt

$$1 + A_r = A_t \sqrt{\frac{\varepsilon'\mu}{\mu'\varepsilon}}. \quad (14.94)$$

Wir können  $A_t$  eliminieren, indem wir den Quotienten der beiden Gleichungen bilden:

$$\frac{1 - A_r}{1 + A_r} = \frac{\cos \varphi_t}{\cos \varphi_e} \cdot \frac{\sqrt{\mu' \epsilon}}{\sqrt{\epsilon' \mu}} \equiv a, \quad (14.95)$$

wobei wir zur Abkürzung die Konstante  $a$  definiert haben. Wir formen um,

$$1 - A_r = a + aA_r, \quad (14.96)$$

und lösen nach  $A_r$  auf:

$$A_r = \frac{1 - a}{1 + a} = \frac{\sqrt{\epsilon' \mu} \cos \varphi_e - \sqrt{\mu' \epsilon} \cos \varphi_t}{\sqrt{\epsilon' \mu} \cos \varphi_e + \sqrt{\mu' \epsilon} \cos \varphi_t}. \quad (14.97)$$

Wenn wir jetzt noch die oben schon angegebenen Definitionen  $n = \sqrt{\mu \epsilon}$  und  $n' = \sqrt{\mu' \epsilon'}$  benutzen, so erhalten wir

$$\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_e} = \frac{n'(\mu/\mu') \cos \varphi_e - n \cos \varphi_t}{n'(\mu/\mu') \cos \varphi_e + n \cos \varphi_t}. \quad (14.98)$$

Ebenso folgt:

$$\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_e} = \frac{2n \cos \varphi_e}{n'(\mu/\mu') \cos \varphi_e - n \cos \varphi_t}. \quad (14.99)$$

Jetzt wollen wir noch die Formeln für den Fall angeben, dass das  $E$ -Feld orthogonal zur Einfallsebene liegt. Man spricht von **senkrechter Polarisation**. Die Analyse geschieht in völliger Analogie zum von uns durchgerechneten parallelen Fall. Das Resultat lautet

$$\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_e} = \frac{n \cos \varphi_e - n'(\mu/\mu') \cos \varphi_t}{n \cos \varphi_e + n'(\mu/\mu') \cos \varphi_t} \quad (14.100)$$

$$\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_e} = \frac{2n \cos \varphi_e}{n \cos \varphi_e - n'(\mu/\mu') \cos \varphi_t}. \quad (14.101)$$

Gleichungen (14.98)–(14.101) sind die berühmten **Fresnelschen Formeln**.

Man beachte, dass im optisch relevanten Frequenzbereich für die meisten hier interessanten Stoffe  $\mu/\mu' \simeq 1$  gilt. Außerdem kann die obige Analyse leicht auf den Fall mit  $\sigma \neq 0$  verallgemeinert werden. Sowohl in solchen Fällen als auch im Fall der Totalreflexion ergeben sich komplexe  $n$ , komplexe Winkel und damit komplexe Wellenvektoren, so dass es statt zu oszillierenden auch zu exponentiell abfallenden Feldstärken kommen kann, vgl.  $\exp(ikz)$  mit  $\text{Im}(k) > 0$ . Viel mehr zu dem Thema finden Sie in zahlreichen Lehrbüchern, insbesondere [7], sowie auf Wikipedia, wo es einen ausführlichen Artikel zu den Fresnelschen Formeln gibt.

Bevor wir zum Schluss kommen, wollen nochmal daran erinnern, dass die ganze in dieser Vorlesung besprochene Vielfalt von Phänomenen aus der sehr einfachen und mathematisch natürlichen Wirkung

$$S = \int_{\mathbb{R}^{1,3}} d^4x \left( -\frac{1}{4} F^2 \right) + e \int_{WL} A_\mu dx^\mu - m \int_{WL} ds \quad \text{mit} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (14.102)$$

folgt. Im Fall mit Materie wird diese nur ergänzt um einige Annahmen aus der statistischen Mechanik. Insofern stellt die klassische Elektrodynamik ein wirklich schönes Beispiel einer Theorie

dar, die sozusagen ‘aus einem Guss’ ist – logisch und mathematisch sehr klar und (fast) ohne ‘offene Enden’.

Eine wesentlich kompliziertere aber auch interessantere klassische Feldtheorie ist die allgemeine Relativitätstheorie. Diese sollte für Sie mit den hier erlernten Methoden unmittelbar zugänglich sein. Des Weiteren muss die Elektrodynamik natürlich quantisiert werden, um so zur Quantenelektrodynamik oder QED (allgemeiner: Quantenfeldtheorie) zu werden. Bevor Sie diesen Schritt gehen können brauchen Sie noch die Quantenmechanik aus dem nächsten Semester.

Vielen Dank fürs Zuhören und Mitmachen. Viel Erfolg bei der Klausur und schöne Ferien!

## Literatur

- [1] Griffiths: Introduction to Electrodynamics
- [2] Landau/Lifshitz: Klassische Feldtheorie
- [3] Römer/Forger: Elementare Feldtheorie
- [4] Elektrodynamik-Skript von Matthias Bartelmann:  
<https://www.thphys.uni-heidelberg.de/~bartelmann/teaching.php>
- [5] Kip S. Thorne, Rev. Mod. Phys. 52, 299 (1980):  
<https://journals.aps.org/rmp/abstract/10.1103/RevModPhys.52.299>
- [6] Nolting: Grundkurs Theoretische Physik 3: Elektrodynamik
- [7] Jackson: Classical Electrodynamics.
- [8] Lechner: Classical Electrodynamics
- [9] Arnold: Mathematical Methods of Classical Mechanics.
- [10] Altland/von Delft: Mathematics for Physicists.
- [11] B Anastasiou, Electrodynamics (Lecture Notes):  
<https://edu.itp.phys.ethz.ch/15FS/ed/>