

Hydrodynamik

Euler- und Navier-Stokes-Gleichungen, Potential- und Wirbelströmung

Niels Bracher

19. Januar 2018, Heidelberg

Ein Vortrag über Euler-Gleichungen, Potential- und Wirbelströmung und die Navier-Stokes-Gleichungen im Zuge des von Herr Prof. Mielke geleiteten Seminars zur Mechanik.

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlegende Begriffe und Einleitung	2
2	Ideale Fluide	2
2.1	Kontinuitätsgleichung	2
2.2	Euler-Gleichungen des idealen Fluids	3
2.3	Adiabatengleichung	5
2.4	Zirkulation	7
2.5	Potentialströmung	8
2.5.1	Euler-Gleichungen zur Beschreibung der Potentialströmung	9
2.5.2	Potentialströmung eines inkompressiblen Fluids	10
2.5.3	Potentialwirbel	11
2.6	Wirbelströmung	13
3	Navier-Stokes-Gleichungen zur Beschreibung viskoser Fluide	14
4	Literatur	16

1 Grundlegende Begriffe und Einleitung

Die Hydrodynamik ist ein Untergebiet der Kontinuumsmechanik, im engeren Sinne der Strömungslehre von näherungsweise dichtebeständigen Systemen. Dieser Vortrag soll dazu dienen einen kleinen Einblick in dieses weitreichende und in meinen Augen auch spannende Themengebiet zu erhalten.

Dieser Vortrag ist in zwei große Bereiche eingeteilt. Zum einen die nicht viskosen oder auch nicht viskosen Fluide und dann im zweiten Teil die viskosen Fluide.

Das Kapitel über ideale Fluide besteht dabei aus den wichtigsten Grundgleichungen und Strömungsarten die man im Bereich der Hydrodynamik vorfindet.

2 Ideale Fluide

2.1 Kontinuitätsgleichung

Die „hydrodynamische“ Kontinuitätsgleichung beschreibt die **Massenerhaltung** eines strömenden Fluides. Für diese muss gelten, dass die durch die Oberfläche eines infinitesimal kleinen Würfels¹ heraus fließende Flüssigkeitsmenge der Abnahme der Fluidmasse im Würfel entspricht. Das Differential des *Massenstroms* bzw. *Flusses* ϕ ist dabei gegeben durch:

$$d\phi = \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} \quad (1)$$

wobei $|d\mathbf{A}|$ die Größe des Flächenelements bezeichnet und $d\mathbf{A}$ in Richtung der Flächennormalen zeigt. Der Fluss lässt sich dann durch das Integral über die geschlossene Oberfläche eines Flüssigkeitsvolumens V_0 beschreiben. Im zweiten Schritt wird der Gaußsche Integralsatz benötigt, um das Oberflächenintegral in ein Volumenintegral umzuschreiben:

$$\phi = \oint_{\partial V_0} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \int_{V_0} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV \quad (2)$$

Die Änderung der Masse im Volumenelement zur gleichen Zeit lässt sich beschreiben als:

$$\phi' = -\frac{\partial}{\partial t} m = -\partial_t \int_{V_0} \rho dV \quad (3)$$

Da beide Beschreibungen für denselben Massenfluss verwendet werden, muss $\phi = \phi'$ gelten. Es folgt:

$$\int_{V_0} [\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \partial_t \rho] dV = 0 \quad (4)$$

¹Hiermit ist ein Volumenelement gemeint, was klein genug im Vergleich zum betrachteten Körper ist, jedoch hinreichend groß, um einer Kontinuumsbeschreibung zu genügen.

Da diese Gleichung für alle Volumina gilt, muss der Integrand verschwinden, sodass wir die **Kontinuitätsgleichung** erhalten:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (5)$$

Hierbei ist $\rho \mathbf{v} = \mathbf{j}$ der *Stromdichtevektor*. Sie gilt auch für viskose Fluide. Die Kontinuitätsgleichung lässt sich auch schreiben als:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (6)$$

Wobei das totale Differential oder auch substantielle Ableitung der Dichte ρ aus der Summe der lokalen Ableitung und der konvektiven Ableitung besteht:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho \quad (7)$$

Aus physikalischer Sicht wird die zeitliche Änderung der Dichte eines Fluidelements beschrieben, während sich dieses mit der Geschwindigkeit $|\mathbf{v}|$ entlang seiner Bahnkurve durch das Strömungsfeld bewegt.

Für inkompressible Fluide mit konstanter Dichte $\rho(\mathbf{x}, t) = \text{konstant}$ verschwindet die totale Zeitableitung $\frac{d\rho}{dt} = 0$. Es liegt also weder eine örtliche noch eine zeitliche Dichteänderung vor. Die **Inkompressibilitätsbedingung** wird somit leicht ersichtlich:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (8)$$

Ein inkompressibles Fluid liegt dann vor, wenn $\frac{\delta \rho}{\rho} \ll 1$ erfüllt ist. Wenn also während der Bewegung keine merkliche Kompression oder Ausdehnung stattfindet. Bei stationären Strömungen ist dies der Fall wenn $v \ll c$ gilt, wobei c die Schallgeschwindigkeit im Medium ist. Bei instationären Strömungen muss zusätzlich $\frac{s}{c} \ll \tau$ erfüllt sein, sodass die Zeit τ , in der sich die Strömung merklich ändert, viel größer ist als die Zeit in der ein Schallsignal die Entfernung s zurücklegt.

Was passiert bei einer frei befestigten, mit der Öffnung nach unten gerichteten, Wasser gefüllten Flasche, wenn der Deckel entfernt wird? Tipp: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

2.2 Euler-Gleichungen des idealen Fluids

Die Euler-Gleichungen² sind die Impulsgleichungen der Hydrodynamik idealer Fluide. Sie beschreiben deren räumliche und zeitliche Entwicklung und bilden den Übergang von Statik zur Dynamik. Dieser Übergang wird durch das Hinzufügen von Trägheitswiderständen zu den äußeren Kräften beschrieben. Der Trägheitswiderstand eines Volumenelements dV mit einer Masse dm ist dabei:

$$dm \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV \quad (9)$$

²Leonhard Euler (*1707;†1783) veröffentlichte diese Gleichungen 1757.

Indem wir uns nun auf ein Volumenelement beziehen erhalten wir:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (10)$$

Die äußere Kraft die auf die Oberfläche eines Fluidvolumens V_0 wirkt können wir schreiben als:

$$\mathbf{F} = - \oint_{\partial V_0} p d\mathbf{A} = - \int_{V_0} \nabla p dV \quad (11)$$

Es wirkt also die äußere Kraft $-\nabla p$ auf ein Volumenelement dV . Aus dem zweiten Newtonschen Axiom erhalten wir damit die Bewegungsgleichung für ein ideales Fluid für ein Volumenelement, das die Kraft pro Volumeneinheit mit dem Produkt aus Dichte und Beschleunigung gleichsetzt:

$$-\frac{\nabla p}{\rho} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (12)$$

Hierbei muss wieder gut zwischen totaler $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ und lokaler $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ Ableitung unterschieden. Betrachten wir beispielsweise die x-Komponente der Geschwindigkeit $\mathbf{v}(u, v, w)$

$$u(x, y, z, t)$$

, so ist ihre totale Ableitung

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

Daher ist die totale Beschleunigung in x-Richtung

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

Und die Differenz zwischen lokaler und totaler Beschleunigung

$$\frac{du}{dt} - \frac{\partial u}{\partial t} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

Die Änderung im festen Raumpunkt $\mathbf{r}(x, y, z)$ während dt entspricht also der lokalen Ableitung $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt$, während die Differenz der Geschwindigkeit zum gleichen Zeitpunkt in zwei Raumpunkten mit Abstand $d\mathbf{r}$ als konvektive Ableitung $(d\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ (wobei $d\mathbf{r}$ der in der Zeit dt zurückgelegte Weg ist) bezeichnet wird. Betrachten wir zur physikalischen Veranschaulichung ein Rohr mit veränderlichem Querschnitt was stationär in x-Richtung durchströmt wird, sodass zwar $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ jedoch $\frac{du}{dt} \neq 0$. An Stellen der Rohrverengung wird die Strömungsgeschwindigkeit zunehmen, während sie bei Vergrößerungen abnimmt.

Die **Euler-Gleichungen** (1757) sind in ausgeschriebener Form also:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} \quad (13)$$

Und im Schwerfeld, bei dem auf jede Volumeneinheit zusätzlich die Kraft $\rho \mathbf{g}$ wirkt:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g} \quad (14)$$

Hier ist zu berücksichtigen, dass die Euler-Gleichungen nur für ideale Fluide gelten. Bei der späteren Diskussion der Bewegungsgleichung von viskosen Fluiden werden wir an dieser Stelle auf die Navier-Stokes Gleichung stoßen.

2.3 Adiabatangleichung

Zur vollständigen Beschreibung des hydrodynamischen Systems einer idealen Flüssigkeit benötigen wir die Adiabatangleichung. Da bei idealen Fluiden zwischen den Teilchen kein Wärmeaustausch und keine Viskosität vorhanden ist, lässt sich die Bewegung der Teilchen als adiabatisch beschreiben. Das wiederum hat zur Folge, dass die gesamte Bewegung des Fluids adiabatisch sein muss. Definieren wir hier s als *Entropie pro Masseneinheit* so können wir folgende Bedingung an die adiabatische Bewegung stellen, die **Adiabatangleichung**:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) s = 0 \quad (15)$$

, sodass die Entropie jedes Flüssigkeitselements bei der Bewegung im Raum unverändert bleibt. Multiplizieren wir an die Kontinuitätsgleichung (5) die Entropie s und die Adiabatangleichung (15) mit der Dichte ρ und Addieren beide Gleichungen, so erhalten wir die adiabatische Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial (\rho s)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho s \mathbf{v}) = 0 \quad (16)$$

Hierbei bezeichnet das Produkt $\rho s \mathbf{v}$ den *Vektor der Entropiestromdichte*.

Isentrope Bewegung

Für Fluide in denen die Entropie zu einem beliebigen Zeitpunkt $t_0 = 0$ in allen Raumpunkten gleich war, vereinfacht sich die Adiabatangleichung zu

$$s(\mathbf{r}, t) = \text{konstant} \quad \forall t \quad (17)$$

In diesem Fall wird die Bewegung als *isentropie Bewegung* bezeichnet und wir können mit Hilfe der bekannten thermodynamischen Relation $dw = Tds + Vdp$ mit w als *Enthalpie pro Masseneinheit* und dem *spezifischen Volumen* $V = \frac{1}{\rho}$ für den Gradienten von w den Ausdruck:

$$\nabla w = \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (18)$$

schreiben. Damit folgt für die Euler-Gleichungen im Schwerfeld (14):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla w - \nabla U \quad (19)$$

Wobei wir für die Gravitation als konservative Kraft das Gravitationsfeld \mathbf{g} als Gradientenfeld des zugrundeliegenden Gravitationspotentials U schreiben konnten. Außerdem wissen wir aus der Vektoranalysis, dass die Rotation eines Gradienten verschwinden muss:

$$\nabla \times \nabla = 0 \quad (20)$$

Des Weiteren nutzen wir den Zusammenhang:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla v^2 - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) \quad (21)$$

und bilden die Rotation auf beiden Seiten der Gleichung. Damit erhalten wir die **Euler-Gleichungen für isentrope Bewegung**:

$$\partial_t (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla \times [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})] \quad (22)$$

Diese sind nur noch von der Geschwindigkeit $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ abhängig. Außerdem können wir für die Bewegungsgleichungen Randbedingungen aufstellen, welche an den das Fluid begrenzenden Wänden erfüllt sein müssen und womit sich die Bewegungsgleichungen eindeutig lösen lassen. Im allgemeinen Fall einer beweglichen Wand muss die Normalkomponente der Geschwindigkeit v_{nf} gleich der entsprechenden Komponente der Wandgeschwindigkeit v_{nw} sein:

$$v_{nf} = v_{nw} \quad (23)$$

Dies gilt auch für zwei sich an einer Grenzfläche mischenden Fluiden, wobei hier auch der lokale Druck übereinstimmen muss. Im Spezialfall einer festen unbeweglichen Wand muss die Normalkomponente der Geschwindigkeit v_{nf} in Richtung der Wand verschwinden, da die Flüssigkeit nicht in die Wand eindringen kann:

$$v_{nf} = 0$$

Die anfangs gemachte Annahme, dass die Entropie für alle Raumpunkte gleich ist, hat uns zu den Euler-Gleichungen für eine isentrope Bewegung geführt. Diese Annahme werden wir auch im weiteren Verlauf noch öfters verwenden um unser hydrodynamisches System zu vereinfachen und ggf. auch analytisch lösen zu können. Eine weitere wichtige Vereinfachung ist das Vernachlässigen des Konvektionsterm, sodass wir die Euler-Gleichungen im linearisierten Fall erhalten würden. Weitere Vereinfachungen sind gleichförmige, gleichmäßige oder inkompressible Strömung. Auch das Schwerfeld kann oftmals vernachlässigt werden.

2.4 Zirkulation

1858 veröffentlichte Helmholtz³ eine Arbeit, in der er sich unter anderem mit der dynamischen Theorie von Wirbelbewegungen auseinandersetzte. Als Ergebnis dieser Auseinandersetzung und in Analogie zur Elektrodynamik entwickelt er die *Helmholtz'schen Wirbelsätze*, welche Aussagen über die Erhaltung eines Wirbelstärkeflusses durch Flächen machen. Zur Vereinfachung dieser Theorie führte Thomson⁴ das als Zirkulation bezeichnete geschlossene Linienintegral

$$Z = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} \quad (24)$$

ein. Die Integration erstreckt sich dabei über eine geschlossene Kurve C innerhalb des Fluides, welche an den Fluidteilchen haftet und mit diesen mitschwimmt. Durch die Bewegung der Fluidteilchen verändert sich die Form der Kurve, was sich mit folgender Ableitung beschreiben lässt:

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} \quad (25)$$

Hierbei muss die totale Zeitableitung benutzt werden, da wir neben der Formänderung der Kurve C auch die sich ändernde Bewegung durch den Raum \mathbf{v} mit den Fluidteilchen berücksichtigen müssen. Hierfür kennzeichnen wir ortsbezogene Differenziation mit δ und Differenziationen nach der Zeit mit d . Außerdem können wir das Wegelement $d\mathbf{l}$ auf der Kurve als Wegdifferenz $\delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i+1}$ zwischen den Endpunkten zweier Ortsvektoren auffassen, die ein Fluidteilchen in der Zeit dt zurücklegt. Für die Änderung der Zirkulation erhalten wir damit:

$$\frac{dZ}{dt} = \oint_C \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \delta\mathbf{r} + \oint_C \mathbf{v} \cdot \frac{d\delta\mathbf{r}}{dt} \quad (26)$$

Für die Ableitung der Wegdifferenz $\delta\mathbf{r}$ nach der Zeit dt können wir die Geschwindigkeit \mathbf{v} schreiben und erhalten für das rechts stehende Integral:

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot \frac{d\delta\mathbf{r}}{dt} = \oint_C \mathbf{v} \delta\mathbf{v} = \oint_C \delta \frac{v^2}{2} = 0 \quad (27)$$

Da ein geschlossenes Integral über ein vollständiges Differential verschwindet (Anfangspunkt = Endpunkt). Nach dem Satz von Stokes können wir das übrig gebliebene geschlossene Kurvenintegral in ein Flächenintegral überführen:

$$\oint_C \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \delta\mathbf{r} = \int_A \left(\nabla \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \cdot d\mathbf{A} \quad (28)$$

Für eine isentrope Bewegung⁵ können wir die Beschleunigung im Integranden als negativen Gradienten der Summe aus Enthalpie w und Gravitationspotential U darstellen.

³Hermann von Helmholtz, *1821;†1894

⁴William Thomson, 1. Lord Kelvin, *1824;†1907

⁵Im allgemeinen ist die Rotation von $\frac{1}{\rho} \nabla p \neq 0$. Nur für den Fall das die Entropie konstant ist und sich der Druckterm als Gradientenfeld der Enthalpie darstellen lässt (Gleichung (19)) verschwindet die Rotation.

Wie wir wissen verschwindet die Rotation eines Gradienten.

$$\int_A \left(\nabla \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \cdot d\mathbf{A} = - \int_A [\nabla \times \nabla (w + U)] \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad (29)$$

Mit den Ergebnissen aus (27) und (29) erhalten wir in Gleichung (25), dass die Zirkulation über eine beliebige, geschlossene Kurve von Fluidteilchen, bei der Strömung ihren Anfangswert beibehält - die Zirkulation ist erhalten:

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 0 \Rightarrow Z = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \text{konstant} \quad (30)$$

Dies ist der **Thomson'sche Wirbelsatz** (1869)⁶. Er gilt für ein isentropisch strömendes ideales Fluid (insbesondere ist dieses viskositätsfrei). Aus diesem resultiert direkt der *erste Helmholtz'sche Wirbelsatz*⁷, welcher wie folgt lautet: *Flüssigkeitsteilchen, die früher einmal wirbelfrei waren, bleiben es für alle Zeit.* oder mit anderen Worten: Rotationsfreie Fluidelemente bleiben für alle Zeiten rotationsfrei. Um den Satz zu zeigen betrachten wir eine, das infinitesimal kleine Fluidelement umrandende, beliebige Kurve δC , die eine infinitesimal kleine Fläche δA einschließt. Aufgrund der Kleinheit kann über die Fläche eine Konstante, nach den Voraussetzungen verschwindende *Wirbelung* $\zeta := \nabla \times \mathbf{v}$ angenommen werden. Für diese Kurve wollen wir die Zirkulation mittels des Thomson'schen Satzes berechnen:

$$\oint_{\delta C} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\delta A} (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{A} \approx \zeta \cdot \delta \mathbf{A} \stackrel{!}{=} \text{konstant} \quad (31)$$

Für die Zirkulation gilt für einen Zeitpunkt $Z(t_0) = 0$ da die Wirbelung $\zeta(t_0) = 0$ ist. Der Thomson'sche Satz besagt nun, dass die Eigenschaft für alle Zeiten erhalten ist und somit bleibt für das Teilchen $\zeta = 0$.

2.5 Potentialströmung

Als Potentialströmung wird *im Allgemeinen*, eine bis auf singuläre Punkte oder Linien *wirbelfreie Strömung* bezeichnet. Eine Potentialströmung liegt aber auch dann vor, wenn wir aufgrund der Bedingung der Wirbelfreiheit:

$$\zeta = \nabla \times \mathbf{v} = 0 \quad (32)$$

die Geschwindigkeit \mathbf{v} als Gradienten eines skalaren Feldes, dem *Geschwindigkeitpotential* Φ schreiben können:

$$\mathbf{v} = \nabla \Phi \quad (33)$$

Beide Bedingungen sind äquivalent und charakterisieren eine Potentialströmung. Außerdem folgt aufgrund der Wirbelerhaltung, dass eine Potentialströmung eine solche

⁶Nice to know: In englischsprachiger Literatur heißt dieser Satz *Kelvin's theorem* oder *law of conservation of circulation*, wobei erster Name daher rührt, dass William Thomson 1892 als Baron Kelvin in den Adelsstand gehoben wurde. Damit verbunden war ein Sitz im House of Lords.

⁷Für die beiden anderen Helmholtz'schen Wirbelsätze wird auf die angegebene Literatur verwiesen.

für alle Zeiten bleibt. Dabei haben wir die Annahmen eines isentropisch strömenden, idealen Fluides getroffen. Im Folgenden werden wir die Potentialströmung im Bezug auf die Euler-Gleichungen genauer untersuchen, um anschließend für eine stationäre Strömung die Bernoulli-Gleichung herleiten zu können. Außerdem werden inkompressible Potentialströmungen im zweiten Teil dieses Kapitels eine Rolle spielen. Die oben angesprochene *Allgemeine wirbelfreie Strömung* werden wir im dritten Teil anhand eines Potentialwirbels verdeutlichen.

2.5.1 Euler-Gleichungen zur Beschreibung der Potentialströmung

Die Euler-Gleichungen dienen auch hier zur dynamischen Beschreibung des Systems. Ausgehend von den Euler-Gleichungen im Schwerfeld bei einer isentropen Bewegung (19) und unter Verwendung der Vektoridentität in (21) sowie der Abhängigkeit der Geschwindigkeit vom Potential (33) können wir schreiben:

$$\nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + w + U \right) = \mathbf{0} \quad (34)$$

Ein allgemeines Integral über diese Gleichung ist:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + w + U = C(t) \quad (35)$$

, wobei die Integrationskonstante C von der Zeit abhängen kann. Diese Zeitabhängigkeit lässt sich auf das Potential übertragen, da:

$$\nabla \Phi' = \nabla \left(\Phi + \int C(t) dt \right) = \nabla \Phi = \mathbf{v} \quad (36)$$

die physikalische Bedeutung nicht verändert wird, denn das Geschwindigkeitspotential ist nur bis auf eine Zeitabhängigkeit bestimmt. O.B.d.A kann $C(t)$ auf Null gesetzt werden. Wir erhalten die Bernoulli-Gleichung für instationäre Strömungen:

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U = 0 \quad (37)$$

wobei wir die Beziehung $w = \frac{p}{\rho}$ verwendet haben. Für eine stationäre Strömung ist Φ zeitunabhängig. Aus (37) erhalten wir die *Bernoulli-Gleichung*⁸(1738):

$$\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U = \textit{konstant} \quad (38)$$

Historisch gesehen war es Bernoulli nicht möglich diesen Weg der Herleitung zu verwenden, da die Euler-Gleichungen erst 19 Jahre später veröffentlicht wurden. Bernoulli

⁸nach Daniel Bernoulli, *1700;†1782

fand sie direkt aus dem Energiesatz:

$$\underbrace{\rho \frac{v^2}{2}}_{\substack{E_{\text{kin}} \text{ pro} \\ \text{Volumeneinheit}}} + \underbrace{p}_{\substack{E_{\text{pot}} \text{ der} \\ \text{inneren Kräfte}}} + \underbrace{\rho g z}_{\substack{E_{\text{pot}} \text{ der äusseren} \\ \text{Kraft pro} \\ \text{Volumeneinheit}}} = \textit{konstant} \quad (39)$$

Man beachte, dass die Konstante auf dem gesamten Gebiet der Strömung gleich ist. In einer normalen Strömung wäre sie das nur entlang der Tangentialrichtung einer einzelnen Stromlinie.

2.5.2 Potentialströmung eines inkompressiblen Fluids

Nun wollen wir das Verhalten einer inkompressiblen Potentialströmung untersuchen. Dazu nutzen wir die Inkompressibilitätsbedingung (8) nach der die Divergenz der Geschwindigkeit verschwindet $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Setzen wir für die Geschwindigkeit das Potential (33) ein so erhalten wir die *Laplace-Gleichung*:

$$\Delta \Phi = 0 \quad (40)$$

Diese Differentialgleichung muss Randbedingungen genügen, die Angaben über die Geschwindigkeit an den Flächen, mit denen das Fluid in Berührung kommt, enthalten. Analog zu den Randbedingungen für die Euler-Gleichungen für isentrope Bewegung (22) muss die Normalkomponente der Geschwindigkeit des Fluides v_n mit der Geschwindigkeit, mit der sich die Fläche in Richtung ihrer Normalen bewegt übereinstimmen. Als Bedingung erhalten wir, dass die Normalkomponente der Geschwindigkeit der Normalableitung des Geschwindigkeitspotentials entsprechen muss:

$$v_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{n} \cdot \nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial n} \quad (41)$$

Lösung der Laplace-Gleichung werden als *harmonische Funktionen* bezeichnet. Im zweidimensionalen, also im Falle einer ebenen Strömung:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (42)$$

kann für diese Gleichung, analog zum Lösungsverfahren für die Wellengleichung, die D'Alembert'sche Lösung in leicht abgeänderter Form verwendet werden:

$$\Phi = \frac{1}{2} \{f(x + iy) + f^*(x - iy)\} \quad (43)$$

Die allgemeine Lösung von (42) ist also gegeben durch eine beliebige analytische Funktion f der komplexen Variablen $z = x + iy$. f wird auch als *komplexes Geschwindigkeitspotential*, mit $\frac{df}{dz} = \omega$ als komplexe Geschwindigkeit. Damit Φ reel wird ist der zweite Summand in (43) konjugiert, was mit einem * gekennzeichnet ist. Wir setzen:

$$f(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y) \quad (44)$$

wobei hier Ψ das zu Φ konjugierte Potential ist. Ψ wird auch als *Stromfunktion* bezeichnet. Für eine Stromlinie gilt $\Psi = \textit{konstant}$ ⁹. Nach einfacher Differentiation von (44) nach x und y erhalten wir die *Cauchy-Riemannschen Bedingungen der Funktionentheorie*:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (45)$$

2.5.3 Potentialwirbel

Als Spezialfall einer rotationsfreien Potentialströmung betrachten wir den Potentialwirbel.

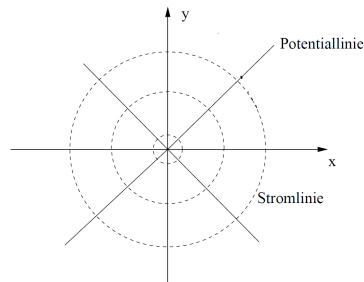


Abbildung 1: Potential- und Stromlinie eines Potentialwirbels

Als unseren Ansatz setzen wir:

$$f(z) = iA \log(z) \quad (46)$$

Mit $z = re^{i\varphi}$ und durch Vergleich mit (44) erhalten wir

$$\Phi = -A\varphi \quad \text{und} \quad \Psi = A \log(r) \quad (47)$$

Für eine Stromlinie muss $\Psi = \textit{konstant}$ gelten woraus direkt folgt, dass bei unserem Beispiel radiale Stromlinien mit $r = \textit{konstant}$ vorliegen. Die Geschwindigkeit erhalten wir bei einer Potentialströmung aus dem Gradienten des Potentials Φ . Da Φ nur vom Winkel φ abhängt, erhalten wir:

$$v = \mathbf{v}_\varphi = -\nabla_\varphi \Phi = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \frac{A}{r} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_r = 0 \quad (48)$$

Wie man sehen kann, verhält sich die Geschwindigkeit umgekehrt proportional zum Abstand des Mittelpunktes ($v_\varphi \propto \frac{1}{r}$). In kartesischen Koordinaten lassen sich die

⁹wird hier nicht Bewiesen kann aber in der Fachliteratur, bspw. dem Buch von Sommerfeld, nachgelesen werden

Geschwindigkeiten schreiben als:

$$v_x = -v \sin(\varphi) = -v \frac{y}{r} = -A \frac{y}{r^2} \text{ und} \quad (49)$$

$$v_y = v \cos(\varphi) = v \frac{x}{r} = A \frac{x}{r^2} \quad (50)$$

Nun wollen wir auch zeigen, dass das Strömung tatsächlich wirbelfrei ist:

$$\zeta = \nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \frac{A}{r^2} - \frac{2Ay^2}{r^4} + \frac{A}{r^2} - \frac{2Ax^2}{r^4} = 0 \quad (51)$$

Die Zirkulation um jeden beliebigen Mittelpunkt außer $r = 0$ ergibt Null. Berechnet man hingegen die Zirkulation um einen beliebigen Kreis um den Nullpunkt so erhält man:

$$\oint_C \mathbf{v} \, ds = \int_0^{2\pi} v r \, d\varphi = 2\pi A = \textit{konstant} \quad (52)$$

Obwohl die Strömung wirbelfrei ist erhalten wir eine vom Radius unabhängige konstante Zirkulation. Sie ist für zwei unterschiedliche Kreise r_1 und r_2 dieselbe. Das muss auch so sein, da das Kreissegment zwischen den Kreisen wirbelfrei ist. Die gesamte Wirbelung konzentriert sich auf den singulären Nullpunkt.

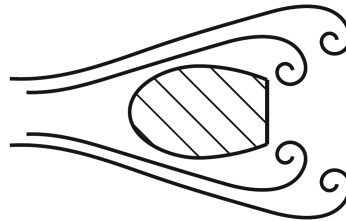


Abbildung 2: Strömungsabriss und bilden von Turbulenz an tangentialer Unstetigkeit

Trotz der exakten Annahmen die wir machen konnten, unterscheiden sich die Voraussagen der Potentialströmung von dem realen Strömungsbild. In einer Potentialströmung muss die Wirbelfreiheit auch längs entlang einer Wand erfüllt sein. Dies wiederum hat den Strömungsabriss der Stromlinien um einen Körper zur Folge, da sonst die Zirkulation um eine geschlossene Stromlinie ungleich Null wäre (vgl. Abb. 2).

Phänomene wie die hydrodynamische Grenzschicht oder turbulente Strömung, insbesondere ein Strömungsabriss, können demzufolge nicht abgebildet werden. Für laminare Strömung bei niedrigen Reynoldszahlen¹⁰, wenn beide genannten Phänomene

¹⁰auf diese wird im Kapitel über viskose Fluide noch näher eingegangen

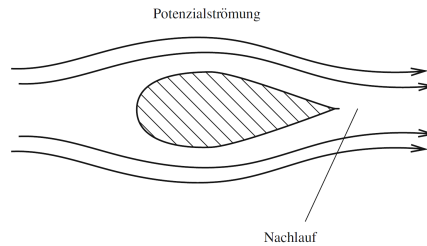


Abbildung 3: Nachlauf einer besonders wirbelarmen Umströmung eines stromlinienförmigen Körpers

keine wesentliche Rolle spielen, ist die Potentialströmung eine gute Näherung. Als Beispiel stellen wir uns einen stromlinienförmigen Körper vor, der außerhalb von einer sehr dünnen Fluidschicht in der Nähe der Oberfläche und außerhalb des Nachlaufs von einer Potentialströmung umgeben ist (vgl. Abb. 3).

2.6 Wirbelströmung

Wie wir bereits in Kapitel 2.5.3 gesehen haben, kann sich auch bei einer Potentialströmung ein Wirbel ausbilden, obwohl wir vorausgesetzt haben, dass die Wirbelstärke ζ Null ist. Ein Wirbel beschreibt also nicht nur die Rotation von Fluidteilchen, sondern allgemein die Bewegung von Fluidelementen um ein gemeinsames Zentrum. Wirbelströmung intuitiv mit den optischen Wirbeln zu verbinden ist also nicht ganz korrekt. Vielmehr bezeichnet man bei einer Wirbelströmung den Anteil der Bewegung eines Fluidelements dessen Rotation nicht verschwindet. Im Gegensatz zur Potentialströmung ist bei der Wirbelströmung die Wirbelstärke ζ von Null verschieden:

$$\zeta = \nabla \times \mathbf{v} \neq 0 \quad (53)$$

Um eine Wirbelströmung zu beschreiben ist es hilfreich die rotationsbehaftete Bewegung eines Fluids $\mathbf{v}^{(\zeta)}$ von der rotationsfreien Bewegung $\mathbf{v}^{(\phi)}$ zu trennen. Wir führen also eine Zerlegung des Geschwindigkeitsfeldes durch, welche wirbelfreie von quellfreien Bewegungen trennt. Diese Art der Zerlegung heißt **Helmholtz-Zerlegung** (1858):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(\zeta)} + \mathbf{v}^{(\phi)} \quad (54)$$

mit der Bedingung:

$$\nabla \times \mathbf{v}^{(\phi)} = 0 \text{ und } \nabla \cdot \mathbf{v}^{(\zeta)} = 0 \quad (55)$$

Sie ist eindeutig bis auf eine vektorielle Konstante¹¹. In Analogie zur Elektrodynamik können wir für die Vektorfelder $\mathbf{v}^{(\zeta)}$ und $\mathbf{v}^{(\phi)}$ folgendes schreiben:

$$\mathbf{v}^{(\phi)} = -\nabla\Phi + \text{const. und } \mathbf{v}^{(\zeta)} = \nabla \times \mathbf{A} + \text{const.} \quad (56)$$

¹¹hier wird abermals auf die Fachliteratur verwiesen

wobei Φ ein skalares Potential und \mathbf{A} ein Vektorpotential darstellen. Beide lassen sich mithilfe des *Green'schen Satzes* integrieren:

$$4\pi\Phi = \int_V \frac{\nabla \cdot \mathbf{v}}{r} dV \quad \text{und} \quad 4\pi\mathbf{A} = \int_V \frac{\nabla \times \mathbf{v}}{r} dV \quad (57)$$

Zu guter Letzt wollen wir noch den Zusammenhang der Wirbelstärke ζ und der Winkelgeschwindigkeit ω herstellen, wobei wir die Annahme machen, dass eine feste Rotation um eine Achse vorliegt. Dafür verwenden wir für die Geschwindigkeit den Zusammenhang $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$, sodass wir für die Wirbelstärke folgendes erhalten:

$$\zeta = \nabla \times (\omega \times \mathbf{r}) = \omega (\nabla \cdot \mathbf{r}) - (\omega \cdot \nabla) \mathbf{r} = 3\omega - \omega = 2\omega \quad (58)$$

Wie wir bereits am Potentialwirbel gesehen gilt Gleichung (58) nicht immer. Nur wenn die Rotationsachse fest ist, d.h. die Rotationsachse des Fluidelements als auch die aller anderen Fluidelemente zusammenfallen, entspricht die Wirbelstärke der doppelten Winkelgeschwindigkeit. Um den Zusammenhang zwischen ζ und ω anschaulich darzustellen betrachten wir Abb. 4. Die Winkelgeschwindigkeit ist dann von Null verschieden, wenn sich das rechteckige Fluidelement auf einer krummlinigen Bahn befindet. Die Wirbelstärke hingegen ist dann von Null verschieden, wenn das Fluidelement eine Rotation um seine eigene mitgeführte Achse beschreibt.

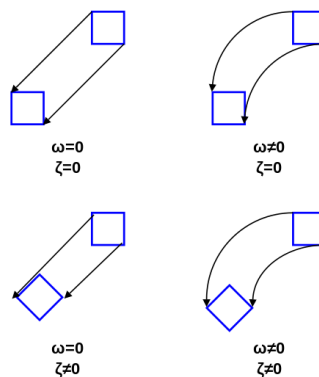


Abbildung 4: Vergleich von Fluidbewegungen bei unterschiedlichen ω und ζ
 Quelle: <https://tinyurl.com/ychbrpwb>

3 Navier-Stokes-Gleichungen zur Beschreibung viskoser Fluide

In diesem Kapitel wollen wir die Änderung beim Übergang von idealen zu viskosen Fluiden beschreiben. Dazu betrachten wir zunächst die Bewegung eines einzelnen Fluidelements und seiner Nachbarelemente. In idealen Fluiden bewegen sich diese auf ihren

Bahnen ohne das es zu irgendwelchen Zusammenstößen und somit zur Impulsübertragung mit anderen Fluidelementen kommt. Bei der Bewegung von Fluidelementen in viskosen Fluiden kommt es zu eben den Zusammenstößen und damit zum Impulsübertrag. Schnellere Fluidelemente beschleunigen die langsameren und umgekehrt. Daraus resultierend ist eine Reibung bzw. eine *Zähigkeit* der Flüssigkeit, welche diese kurzreichweitige Wechselwirkung beschreibt. Mathematisch können wir die Wechselwirkung durch den *Reibungstensor für kompressible Fluide* ausdrücken:

$$\sigma_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + \delta_{ik} \left(\zeta - \frac{2}{3}\eta \right) \left(\frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) \quad (59)$$

$\eta > 0$ ist dabei die *dynamische Viskosität* und $\zeta > 0$ der Zähigkeitskoeffizient. Beide Koeffizienten sind Funktionen vom Druck p und der Temperatur T , welche jedoch in guter Näherung meistens als konstant gesetzt werden können. Um die Bewegungsgleichungen für viskose zu erhalten müssen wir die Divergenz des Reibungstensors bilden um die Kraft zu erhalten, welche auf ein Volumenelement wirkt:

$$\frac{\sigma_{ik}}{\partial x_i} = \eta \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i^2} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \frac{\partial^2 v_l}{\partial x_k \partial x_l} \quad (60)$$

oder in Vektorschreibweise:

$$\nabla \sigma = \eta \Delta \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (61)$$

Teilen wir dieses Ergebnis durch die Dichte ρ und addieren es zu den Euler-Gleichungen (13) hinzu, so erhalten wir die **Navier-Stokes-Gleichungen**(1827/1845)¹²:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v} + \left(\frac{\zeta}{\rho} + \frac{\nu}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{f} \quad (62)$$

wobei $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ die *kinematische Viskosität* ist. Diese Gleichung wurde zuerst von Navier experimentell gefunden, nachdem zahlreiche Paradoxien zu den Euler-Gleichungen aufgestellt wurden und klar wurde, dass für die Beschreibung von viskosen Fluiden diese nicht ausreichend war. Stokes war es 1845 gelungen diese Gleichung unabhängig von Navier theoretisch herzuleiten. In dem Vektorfeld \mathbf{f} stecken zusätzliche zu Kräften gehörende Beschleunigungsterme. Beispiele dafür sind die Erdbeschleunigung oder bei sehr großen Systemen die Corioliskraft.

Für inkompressible Fluide können wir die Navier-Stokes-Gleichungen leicht vereinfachen, da aufgrund der Inkompressibilitätsbedingung $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ der Term, welcher den Zähigkeitskoeffizienten ζ enthält, wegfällt:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f} \quad (63)$$

Die Navier-Stokes-Gleichungen sind bis heute ein ungelöstes mathematisches Problem. Jedoch kann man auch hier in vielen Fällen Komponenten der Navier-Stokes-Gleichungen "wegfallen"lassen, indem man eine *Dimensionierung* der Gleichung durchführt und somit die wesentlichen, zur Gleichung beitragenden Komponenten abschätzen kann. Die Dimensionierung werden wir hier nur auf Gleichung (63) anwenden,

¹²nach Claude Navier, *1785;†1836 und George Stokes, *1819;†1903

wobei $\mathbf{f} = \mathbf{g}$ als Erdbeschleunigung gesetzt werden kann. Dafür benötigen wir eine durchschnittliche Geschwindigkeit U , typische Längenskalen L und eine charakteristische Zeit τ des Systems, welches wir betrachten:

$$x' = \frac{\mathbf{x}}{L}; \quad \mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v}}{U}; \quad \tau' = \frac{t}{\tau}; \quad \mathbf{g}' = \frac{\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|}; \quad p' = \frac{p}{\rho U^2} \quad (64)$$

$$\text{sowie die Ableitungen: } \frac{\partial}{\partial t'} = \tau \frac{\partial}{\partial t}; \quad \nabla' = L \nabla$$

Als Beispiel setzen wir dies in die Navier-Stokes-Gleichungen (63) ein, sodass wir nach einer kurzen Rechnung die *Dimensionslosen Navier-Stokes-Gleichungen eines inkompressiblen Fluides* erhält:

$$\frac{L}{U\tau} \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'} + (\mathbf{v}' \nabla') \mathbf{v}' = \frac{L|\mathbf{g}|}{U^2} \mathbf{g}' - \nabla' p' + \frac{\nu}{UL} \nabla'^2 \mathbf{v}' \quad (65)$$

Kennt man nun die Abmessung des Systems, so kann man die Größenordnungen angeben mit denen die einzelnen Komponenten der Navier-Stokes-Gleichungen gewichtet werden und ggf. Terme vernachlässigen.

4 Literatur

- Adams, N. (2015). *Einführung in die dynamik der fluide*. (Vorlesungsskript zur Fluidmechanik der TU München)
- Durst, F. (2006). *Grundlagen der strömungsmechanik*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Ewerz, C. (2016). *Klassische elektrodynamik*. (Vorlesungsskript zur theoretische Physik der Universität Heidelberg)
- Landau, L. D. & Lifshitz, E. M. (1987). *Course of theoretical physics* (Bd. VI: Fluid Mechanics). Pergamon Books Ltd.
- Sommerfeld, A. (1945). *Vorlesung über theoretische physik* (Bd. II: Mechanik der deformierbaren Medien). Akademische Verlagsgesellschaft Becker & Erler.
- Wolschin, G. (2016). *Hydrodynamik*. Springer Berlin Heidelberg. doi: 10.1007/978-3-662-48024-3