Extradimensionen am LHC

Handout zum Vortrag

von Norbert Bodendorfer

1 Das Hierarchieproblem

1.1 Planckeinheiten

Nach der Entdeckung des Wirkungsquantums $\hbar$ erkannte Max Planck die Möglichkeit, ein universelles Einheitensystem einzuführen, beruhend auf der Forderung, dass die grundlegenden Konstanten der Natur, Newtons Gravitationskonstante G, die Lichtgeschwindigkeit c und das Wirkungsquantum $\hbar$, die Basis des Einheitensystems sein sollen.

Man konstruiert die Planckmasse m_p, die Plancklänge l_p und die Planckzeit t_p so, dass diese ein Produkt aus Potenzen von G, c und $\hbar$ sind. Diese Konstruktion ist eindeutig durchführbar und liefert $m_p = 2,2 \times 10^{-8}$kg, $l_p = 1,62 \times 10^{-35}$m und $t_p = 5,4 \times 10^{-44}$s. Von dem Standpunkt aus, dass bei einer vereinheitlichten Theorie sich alle Kräfte und Skalen der Natur vereinigen sollten, kann man diese Skala als Grundlegende Skala annehmen. Über die Bedeutung dieser Einheiten sagte Max Planck selber:

„... ihre Bedeutung für alle Zeiten und für alle, auch außerirdische und außermenschliche Culturen nothwendig behalten und welche daher als ‚natürliche Maaßeinheiten' bezeichnet werden können ... „

1.2 Das Hierarchieproblem

Das Hierarchieproblem der Teilchenphysik beruht auf der Tatsache, dass die schwache Skala, also die Masse der W- und Z-Bosonen, 16 Größenordnungen kleiner ist als die Planckmasse. Dies mag zwar, gemessen am Erfolg des Standardmodells, eine etwas pedantische Beobachtung sein, jedoch stellt sie die moderne Theoretische Physik vor einige Probleme. Eine Manifestation ist, dass Teilchen mit einer Masse nahe der Planckskala, die es geben sollte, falls diese Skala physikalische Relevanz hat, in Strahlungskorrekturen auftreten können. Dies führt dazu, dass die Masse des elektroschwachen Higgs-Teilchens auf die Größenordnung der Planckskala anwächst. Verhindert werden kann dies durch eine sehr präzise Auslöschung dieser Beiträge durch andere, wofür aber ein Feintuning von der Genauigkeit m_W/m_p nötig wäre. Einen guten Grund für diese ungewöhnliche Genauigkeit von 16 Stellen kennt man aber nicht und steht somit vor einem Problem.

1.3 Ausweg in die Extradimension

Ein möglicher Ausweg aus dem Problem besteht darin, Extradimensionen einzuführen und dadurch die Planckskala zu verändern. Im nächsten Kapitel werden wir argumentieren, dass in $d+1$ Raumzeitdimensionen die Laplacegleichung die Form

$$(\nabla^{(d+1)})^2 \, V^{(d+1)} = 4\pi \, G^{(d+1)} \rho^{(d+1)}$$

annimmt. Die linke Seite der Gleichung hat für alle $d+1$ die gleiche Einheit, nämlich Energie / Länge^2. Auf der rechten Seite steht eine Dichte mit der Einheit Masse / Länge^d. Man sieht daher sofort, dass die Einheit von $G^{(d+1)}$ dimensionsabhängig ist.[1] Damit ändert sich aber auch die Planckskala, da nun andere Kombinationen von $G^{(d+1)}$, c und $\hbar$ notwendig sind, um m_p, l_p und t_p zu erzeugen. Insbesondere kann gezeigt werden [2], dass eine Planckmasse von der Größenordnung der elektroschwachen Skala verträglich mit der Existenz von zwei Extradimensionen mit einem Radius von etwa $0,1$mm ist. Wegen fehlender Präzisionsexperimente der Gravitationskraft auf Abständen kleiner als ein Millimeter können solche Szenarien bis heute nicht ausgeschlossen werden.

2 Der „klassische" Limes

An eine Theorie mit Extradimensionen stellen wir den Anspruch, dass sie bisherigen Messungen nicht widersprechen darf. An dieser Stelle wollen wir den „klassischen" Limes einer solchen Theorie konstruieren und uns überzeugen, dass er mit der Natur verträglich ist.

Als Einstieg betrachten wir folgendes grundlegendes Modell: Die Raumzeit habe eine kompakte Extradimesion in der Form eines Kreises S^1 mit Radius r. Welche physikalischen Konsequenzen ergeben sich daraus?

2.1 Elementare Quantenmechanik

Aus der Perspektive der Quantenmechanik kann die Wellenfunktion eines Teilchens nun nicht verschwindende Werte in der Extradimension annehmen. Wegen der (wie wir gleich sehen werden) hohen Anregungsenergien verwenden wir die Klein-Gorden-Gleichung $(\Box + m^2)\Phi = 0$, deren physikalische Aussage

$$E^2 = m^2 + p^2$$

ist. Durch die Extradimension erhält der Impulsoperator den Zusatzterm $i/r\partial_\phi$, wobei der Winkel ϕ die Extradimension parametrisiert. Der standardmäßige Separationsansatz und periodische Randbedingungen auf dem Kreis liefern die Änderungen

$$\Delta(E^2) = \frac{n^2}{r^2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

in den erlaubten Energien. Für kleine r haben die zusätzlich möglichen Energieanregungen den Wert n/r und können daher für sehr kleine Extradimensionen sehr groß werden, was eine bisherige Entdeckung verhindert haben könnte. 7 TeV as erste Anregung ensprechen in diesem Szenario bei $n=1$ einem Extradimensionsradius von 10^{-22}m.

[1] Insbesondere ist der Wert von $G^{(d+1)}$ a priori nicht bekannt, kann aber aus $G^{(4)}$ und der Kenntnis über die Geometrie der Extradimensionen berechnet werden.

2.2 Gravitative Effekte

Die Extradimension sei durch einen nicht näher definierten Mechanismus nur der Gravitation zugänglich. Durch rein klassische Argumente werden wir nun erkunden, welchen Effekt dies auf die von uns beobachtete Newton'sche Gravitation hätte.

In 4 Raumzeitdimensionen ist das gravitative Potential $V^{(4)}$ Lösung der Laplacegleichung $\nabla^2 V^{(4)}(x,y,z) = 4\pi G^{(4)}\rho(x,y,z)$ mit der bekannten Lösung $V^{(4)} = -\frac{G^{(4)}M}{R}$ für einen Massenpunkt gegeben. Wir werden die Annahme machen, dass sich diese Gleichung durch hinzufügen einer weiteren Koordinate trivial auf eine weitere Dimension verallgemeinern lässt.[2] Unsere neue Laplacegleichung lautet also

$$(\nabla^{(5)})^2 V^{(5)} = 4\pi G^{(5)}\rho^{(5)}.$$

$G^{(5)}$ ist dabei eine a priori nicht näher bestimmte Konstante, wir werden später ihre genaue Bedeutung sehen. Wir wollen die Gleichung nun lokal für einen Massenpunkt lösen, ohne uns über die genauen topologischen Eigenschaften unserer Raumzeit Gedanken zu machen und nehmen daher 4 flache Raumdimensionen an.[3] Die eigentliche Rechnung ist sehr einfach: Man integriert beide Seiten der Gleichung über $\mathbb{R}^4$ und wendet den Satz von Gauß an.[4] Das Ergebnis lautet

$$V^{(5)}(R) = -\frac{G^{(5)}M}{\pi R^2}.$$

Im nächsten Schritt wird das Ergebnis an die Topologie von $\mathbb{R}^3 \times S^1$ angepasst. Wir stellen also die Frage: Wie groß ist das gravitative Potential im Abstand R von unserem Massenpunkt? Dazu machen wir die Annahme, dass $R \gg r$ und dass sowohl der Massenpunkt als auch unser Beobachter im Abstand R die gleiche ϕ-Koordinate haben. Das gravitative Potential kann jetzt verschiedene Wege nehmen, um von dem Massenpunkt zum Beobachter zu gelangen. Eine Möglichkeit ist der gerade Weg, es sind aber auch Wege mit beliebiger Windungszahl um die Extradimension zugelassen! Wir summieren nun über alle Wege:

$$V^{(5)}(R) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{G^{(5)}M}{\pi(R^2 + (2\pi r n)^2)}.$$

Im Limes $R \gg r$ können wir die Summe durch ein Integral ersetzen und erhalten

$$V^{(5)}(R) = -\frac{G^{(5)}M}{\pi R^2}\frac{R}{2\pi r}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx = -\frac{G^{(5)}}{2\pi r}\frac{M}{R}.$$

Wir können $\frac{G^{(5)}}{2\pi r}$ mit $G^{(4)}$ identifizieren und haben gleichzeitig eine Relation zwischen $G^{(5)}$ und r erhalten! Die Gravitationstheorie in 4 Raumdimensionen liefert also den richtigen Limes und kann daher als mögliche physikalische Realisierung der Natur in Betracht gezogen werden. Allerdings liefert diese Theorie nur ein Verhältnis zwischen $G^{(5)}$ und r und kann daher keine Skalen voraussagen.

[2]Die kovariante Formulierung der Elektrodynamik, $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$, ist hierzu eine gute Analogie.

[3]Das Verschwinden des Krümmungstensors auf einem Zylinder $\mathbb{R}^3 \times S^1$ rechtfertigt diese Annahme.

[4]Dabei muss angenommen werden, dass die Lösung isotrop ist. Dies kann zwar nicht zwingend argumentiert werden, sollte aber klar sein.

Die führende Korrektur zum $1/R$-Potential kann man berechnen, indem die Reihe für $V^{(5)}(R)$ exakt aufsummiert wird. Dies ist mittels der Identität

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+(\pi n x)^2} = \frac{1}{x}\coth(\frac{1}{x})$$

möglich und liefert

$$V^{(5)}(R) = -\frac{G^{(5)}M}{\pi R^2}\frac{R}{2r}\coth(\frac{R}{2r}) \approx -\frac{G^{(4)}M}{R}\left(1+2e^{-R/r}\right).$$

Bei hinreichend genauen Messapparaturen sollte dieser exponentielle Abfall bei kleinen Abständen sichtbar sein. Ein Prozent Abweichung entsprechen dabei einem Verhältnis von $R/r = 5,3$.

Die physikalische Interpretation dieses Ergebnisses lehnt sich an das Yukawa-Potential an. Aus quantenmechanischen Rechnungen weiß man, dass ein massives Austauschteilchen zu einem exponentiell abfallenden Potential führt. Diese führende Korrektur kann also als eine massive Anregung des Gravitons der Masse $1/r$ interpretiert werden.

3 Diskutierte Modelle und deren Signaturen am LHC

3.1 Universelle Extradimensionen

Das von Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos und Gia Dvali (ADD) 1998 entwickelte Modell nimmt an, dass die schwache Skala die einzige physikalische Skala ist. Die Forderung, dass $m_w \approx m_p$, kann durch die Existenz von $n \geq 2$ Extradimensionen erfüllt werden. $n = 1$ ist ausgeschlossen, da es Abweichungen des Gravitationsgesetzes auf Längenskalen der Sonnensystems zur Folge hätte. Bei $n = 2$ hätten die Extradimensionen eine Größe von etwa 1mm und das Gravitationsgesetz würde bei Abständen $\leq$ 1 mm eine $1/r^4$-Abhängigkeit besitzen.

Die Teilchen des Standardmodells sind dabei auf einer vierdimensionalen Membarn gefangen und haben keinen Zugang zu den Extradimensionen, in denen die Gravitation frei propagieren kann. Bei genügend hoher Energie kann ein Teilchen diese Membran aber verlassen und selbst in den Extradimensionen propagieren, was sich in einem Beschleuniger durch einen rapiden Abfall von Ereignissen mit hohem transversalen Impuls ab einer Energieskala $\geq$ TeV manifestieren würde.

ADD haben einen Mechanismus entwickelt [2], mit dem man eine Quantenfeldtheorie in einem Raum mit Extradimensionen formulieren kann, die die Teilchen des Standardmodells auf einer 4-Membran lokalisiert. Die Autoren selbst sehen ihre Theorie aber nicht als gültige Erweiterung des Standardmodells, sondern eher als einen „Existenzbeweis“ und merken an, dass es noch andere Möglichkeiten gibt, eine gültige Quantenfeldtheorie mit den richtigen Randbedingungen zu formulieren.

3.2 Große Extradimensionen

In diesem Modell haben nur die Gravitonen Zugang zu den Extradimensionen, die durch ihre Propagation in den Extradimensionen verschiedene Massenzustände annehmen können. Die Summe dieser Zustände nennt man Kaluza-Klein-Tower und alle koppeln universell an die Teilchen des Standardmodells. Verschiedene Versionen des Modells werden durch die Anzahl δ ihrer Extradimensionen sowie deren Größe r unterschieden.

Eine am LHC messbare Folge wäre eine Änderung im Drell-Yan-Wirkungsquerschnitt aufgrund eines Austausches virtueller angeregter Gravitonen.

Eine zweite Signatur dieses Modells wäre eine direkte Produktion von angeregten Kaluza-Klein-Gravitonen in Reaktionen der Typen $q\bar{q} \to gG_{KK}$, $gq \to qG_{KK}$ und $gg \to gG_{KK}$. Im Detektor würde man dabei einen Monojet und fehlende Energie registrieren. Am LHC könnten Modelle mit bis zu vier Extradimensionen bestätigt werden und die Parameter δ und r aus den Wirkungsquerschnitten abgeleitet werden. Die Größe der Extradimensionen wird dabei je nach Dimensionszahl auf 8 μm bis 1 pm geschätzt.

3.3 Kleine Extradimensionen

Im Fall sehr kleiner Extradimensionen darf man die Propagation von W- und Z-Bosonen in den Extradimensionen erlauben, da dies keiner bisherigen Messung widersprechen würde. Die Folge wären höhere massive Anregungen dieser Bosonen. Die Theorie sagt ein Spektrum von $m^2_{Z^{(n)},W^{(n)}} = m^2_{Z,W} + n^2 M_C^2,\ n \in \mathbb{N}_0$ voraus, wobei M_C die Kompaktifizierungsskala ist, die man mit elektroschwachen Präzisionsmessungen auf $\geq$ 4 TeV abschätzen kann. Am LHC könnte man also die erste Anregung der W- und Z- Bosonen sehen.

3.4 Warped Extra Dimensions

Die Randall-Sundrum Theorie der „verzogenen“ (warped) Extradimensionen postuliert eine ausgedehnte Extradimension, die von zwei Branen begrenzt wird. Zugang zu der Extradimension hat nur die Gravitation, die Teilchen des Standardmodells leben auf einer der beiden Branen. Auf der Standardmodellbran ist $\Lambda_\pi \approx 1$ TeV die fundamentale Massenskala, auf der anderen Bran ist es die Planckmasse. Ein exponentieller Faktor in der Metrik sorgt dafür, dass diese beiden Skalen kontinuierlich über die Zusatzdimension hinweg miteinander verbunden werden. Die Theorie hängt von zwei Parametern ab, Λ_π und der Krümmungsskala c. Sie sagt angeregte Gravitonen mit den Massen $m_n = x_n \Lambda_\pi c$ voraus, wobei x_n die Nullstellen der Besselfunktion J_1 sind. Die erste dieser Anregungen könnte am LHC in Zerfällen des Typs $G^{(1)} \to e^+e^-$ und $G^{(1)} \to \gamma\gamma$ gesehen werden.

Desweiteren sagt die Theorie ein neues Teilchen, das Radion, voraus, welches durch spezielle Zerfälle, z.B. Radion $\to hh \to \gamma\gamma b\bar{b}$ gefunden werden kann.

3.5 Andere Signaturen

Der Vollständigkeit halber sei angegeben, dass es noch einige andere Signaturen von Extradimensionen gibt, die am LHC entdeckt werden könnten. Der geneigte Leser sei dabei auf die Literaturhinweise in [4] verwiesen.

4 Signaturen von Supernovae

Bei einer Supernova wird in Form von Gravitation gebundene Energie durch Neutrinos emittiert, welche mit Neutrinoteleskopen, wie z.B. Kamiokande, gemessen werden können. Durch Modelle von Supernovae kann man den Neutrinofluss, der auf der Erde ankommen müsste, berechenen und mit den gemessenen Daten vergleichen. Bei der Supernova SN 1987A zeigten sich jedoch signifikante Abweichungen: Es wurden nur etwa 60% des erwarteten Neutrinoflusses gemessen. Es stellt sich also die Frage, ob der Grund für diese Abweichung die schlechte Statistik der Experimente, falsche Modelle von Supernovae oder vielleicht neue Physik ist.

Eine mögliche Erklärung ist die Emission von angeregten Gravitonen in den Reaktionen $NN \to NNG_{KK}$, $\gamma\gamma \to G_{KK}$ und $e^-e^+ \to G_{KK}$. Die Forderung nach Verträglichkeit mit bisherigen Messungen liefert eine Einschränkung an die Zahl der Extradimensionen. Insbesondere muss im Fall $n = 2$ die Kompaktifizierungsskala größer als 30 TeV sein.

Literatur

[1] Barton Zwiebach. *A First Course in String Theory.* Cambridge. (2004)

[2] Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos, Gia Dvali. *The Hierarchy Problem and New Dimensions at a Millimeter.* [arXiv:hep-ph/9803315v1] (1998)

[3] Graham D. Kribs. *TASI 2004 Lectures on the Phenomenology of Extra Dimensions.* [arXiv:hep-ph/0605325v1] (2006)

[4] Laurent Vacavant. *Search for Extra Dimensions at LHC.* [arXiv:hep-ex/0310020v1] (2003)

[5] V. H. Satheesh Kumar, P. K. Suersh, P. K. Das. *Supernovae as Probes of Extra Dimensions.* [arXiv:0706.3551v2] (2007)

[6] Fernand Grard, Jean Nuyts. *Elementary Kaluza-Klein Towers revisited.* [arXiv:hep-th/0607246v1] (2006)