

Theoretische Physik II: Analytische Mechanik und Thermodynamik

Version SS 2018 — Tilman Plehn
Original von Matthias Bartelmann

15. Mai 2019

- **stellen Sie Fragen!**
- sollten Sie Werbung für die Fachschaft oder anderes studentisches Engagement machen wollen, dann melden Sie sich gerne bei mir.
- Informationen zum Beispiel zur Organisation der Vorlesung und der Übungen gibt es in der Vorlesung.
- Übungsblätter können gerne in Kleingruppen bearbeitet werden. Die Lösungen werden einzeln abgegeben, und müssen in der Übungsgruppe vorgerechnet werden können.
- die letzte Vorlesung findet am 10.7. statt.
- die Woche des 15.7. dient der Klausurvorbereitung (study week).
- 60% der Übungspunkte sind die Voraussetzung für die Klausurzulassung.
- die beste Vorbereitung für die Klausur sind die Übungsblätter.
- es gibt nur eine Klausur
- zur Klausur können Sie ein doppelseitig beschriebenes oder bedrucktes DIN-A4-Blatt mitnehmen, weitere Hilfsmittel werden nicht benötigt.
- es gibt eine Nachklausur am Ende der Semesterferien. Wer zum Beispiel aus Krankheitsgründen nur einen Teil der ersten Klausur(en) schreiben konnte melde sich bitte bei Susanne Westhoff.

Herzlichen Dank an viele Studentinnen und Studenten, die das Skript kommentiert und korrigiert haben und damit sehr dazu beigetragen haben, es zu verbessern und verständlicher zu machen!

Inhaltsverzeichnis

I	Analytische Mechanik	1
1	Schwingungen gekoppelter Systeme	2
1.1	Parametrisierte Koordinaten	3
1.2	Normalkoordinaten	5
1.2.1	Transformation auf Normalkoordinaten	5
1.2.2	Bestimmung der Normalkoordinaten	7
1.2.3	Stabilität	8
1.2.4	Gekoppelte Pendel	9
2	Systeme mit Nebenbedingungen	11
2.1	Vorbereitung	11
2.1.1	Verallgemeinerte Koordinaten	11
2.1.2	Lagrange-Multiplikatoren	12
2.2	Das d'Alembertsche Prinzip	14
2.2.1	Zwangskräfte im Gleichgewicht	14
2.2.2	Dynamische Systeme	16
2.2.3	Lagrange-Gleichungen erster Art	17
3	Lagrange-Formulierung	20
3.1	Lagrange-Gleichungen zweiter Art	20
3.1.1	Herleitung	20
3.2	Anwendungen	22
3.2.1	Beschleunigte Bezugssysteme	22
3.2.2	Kräftefreier symmetrischer Kreisel	24

3.2.3 Kreisel im Schwerfeld 26

4 Extremalprinzipien 28

4.1 Prinzip der stationären Wirkung 28

4.1.1 Das Fermatsche Prinzip 28

4.1.2 Hamiltons Prinzip 29

4.2 Hamilton-Funktion 31

4.2.1 Die kanonischen Gleichungen 31

4.2.2 Hamilton-Funktion und Energie 33

4.2.3 Nicht-konservative Kräfte 34

4.2.4 Hamilton-Gleichungen und Wirkungsprinzip . 35

5 Symmetrien und Erhaltungssätze 37

5.1 Galilei-Invarianz 37

5.2 Noether-Theoreme 39

Teil I

Analytische Mechanik

Kapitel 1

Schwingungen gekoppelter Systeme

Im vergangenen Semester haben wir uns physikalisch vor allem mit der Bewegung punktförmiger Körper in Raum und Zeit befasst. Die entsprechenden Kapitel behandelten zum Beispiel:

- Newtonsche Axiome und den freien Fall
- Bahnkurven, Energieerhaltung und konservative Kräfte
- beschleunigte Bezugssysteme
- Bewegung starrer Körper
- Trägheit
- harmonische Oszillatoren
- Pendel

Die formale Grundlage aller dieser Systeme waren die Newtonschen Axiome, vor allem die Lösung der Differentialgleichung zweiter Ordnung, $F = m\ddot{x}$, die also Ergebnis einer Trajektorie $x(t)$ definiert. Als alternativen Weg zur Beschreibung eines sich bewegenden Teilchens haben wir Erhaltungssätze genutzt. Ein Beispiel war Energieerhaltung, die wir über Newtonsche Mechanik und einen integrierenden Faktor abgeleitet hatten. Zwei Aspekte haben wir nicht wirklich zufriedenstellend behandeln können: allgemeine Randbedingungen und Systeme mit mehr als einem Teilchen. In diesem Semester werden wir einen Formalismus entwickeln, der die Newtonschen Axiome ersetzt.

1.1 Parametrisierte Koordinaten

Bei der Diskussion des Pendels war uns bereits ein Fall begegnet, in dem die Koordinaten \vec{x} durch einen Winkel ϕ ausgedrückt wurden, weil sich ein Massenpunkt auf einer Kreislinie in einer Ebene bewegt. Dadurch wird die Anzahl der Freiheitsgrade von allgemein drei auf einen relevanten Freiheitsgrad reduziert. Ein weiteres Beispiel sind zwei Pendel, die durch eine Stange zwischen ihren beiden Massen verbunden sind. Die Kopplung zwischen den Pendeln reduziert die sechs Freiheitsgrade ebenfalls auf einen. Die Frage ist, wie man diese Reduktion auf die kleinste Zahl notwendiger Freiheitsgrade formalisieren kann.

- Wir betrachten N Massenpunkte, die so aneinander gekoppelt sind, so dass ihnen f Freiheitsgrade der Bewegung bleiben. Das heisst zur Beschreibung der Bewegung brauchen wir f Parameter $q_k(t)$, von denen alle Raumkoordinaten $x_j(t)$ abhängen,

$$x_j = x_j[q_k(t)] \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_j = \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \dot{q}_k \quad (1.1)$$

Wir können auch die q_k durch die Koordinaten x_j darstellen,

$$\dot{q}_k = \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \dot{x}_j \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{x}_j} = \frac{\partial q_k}{\partial x_j} . \quad (1.2)$$

- Ebenso können wir die kinetische und die potentielle Energie durch die q_k auszudrücken. Die kinetische Energie eines einzelnen Massenpunkts m_i ist

$$T_i = \frac{m_i}{2} \dot{\vec{x}}_i^2 = \frac{m_i}{2} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k = \frac{m_i}{2} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k , \quad (1.3)$$

mit $j, k = 1, \dots, f$. Die gesamte kinetische Energie ergibt sich durch die Summe

$$T(\vec{q}) = \left(\sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k . \quad (1.4)$$

- Nach dem zweiten Newtonschen Axiom lautet die Bewegungsgleichung für die Koordinate x_j des Massenpunkts m_i in einem konservativen Kraftfeld

$$F_j = m_i \ddot{x}_j = - \frac{\partial V(\vec{x})}{\partial x_j} . \quad (1.5)$$

Mithilfe der kinetischen Energie des Massenpunkts lässt sich diese Bewegungsgleichung durch

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_i}{\partial \dot{x}_j} = - \frac{\partial V(\vec{x})}{\partial x_j} \quad (1.6)$$

ausdrücken. Eine ganz ähnlich Relation hatten wir für den integrierenden Faktor bei der Ableitung des Energiesatzes verwendet. Wenn wir hier die Parameter q_k einführen, dann wird aus dieser Relation

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_i(\vec{q})}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{x}_j} = - \frac{\partial V(\vec{q})}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial x_j}. \quad (1.7)$$

Wir setzen nun voraus, dass $\partial q_j / \partial x_k$ zeitunabhängig ist und erhalten mit (1.2)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{x}_j} = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_k} \right) \frac{\partial q_k}{\partial x_j} = - \frac{\partial V(\vec{q})}{\partial q_j} \frac{\partial q_k}{\partial x_j}. \quad (1.8)$$

Das ist allgemein nur möglich ist wenn

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_i(\vec{q})}{\partial \dot{q}_k} = - \frac{\partial V(\vec{q})}{\partial q_k} \quad (1.9)$$

ist. Die Bewegungsgleichungen für die Parameter q_k entspricht also (1.6) für die Koordinaten x_j .

- In der Gleichgewichtslage des Systems dürfen sich die Parameter q_k nicht ändern, $\dot{q}_k = 0$. Da die kinetische Energie T nach (1.4) eine quadratische Form in den *verallgemeinerten Geschwindigkeiten* \dot{q}_k ist, ist dort auch $\partial T / \partial \dot{q}_k = 0$,

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial T_i(\vec{q})}{\partial \dot{q}_k} = - \frac{\partial V(\vec{q})}{\partial q_k}, \quad (1.10)$$

Das heisst die *verallgemeinerten Kraftkomponenten*

$$Q_k = - \frac{\partial V}{\partial q_k} \quad (1.11)$$

verschwinden im Gleichgewicht.

- Wir definieren den Ursprung $q_k = 0$ als Gleichgewichtslage und taylor die potentielle Energie bis zur 2. Ordnung in q_k ,

$$\begin{aligned} V(\vec{q}) &= V \Big|_{q=0} + \sum_{j=1}^f \frac{\partial V}{\partial q_j} \Big|_{q=0} q_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^f \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} \Big|_{q=0} q_j q_k + \mathcal{O}(q^3) \\ &=: \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^f V_{jk} q_j q_k + \mathcal{O}(q^3), \end{aligned} \quad (1.12)$$

Wir erinnern uns dass eine Konstante im Potential gleich Null gesetzt werden kann. Analog wird die kinetische Energie nahe der Gleichgewichtslage

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^f \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k =: \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^f T_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k. \quad (1.13)$$

- Die *quadratischen Formen* T und V können durch Matrizen ausgedrückt werden,

$$\vec{q} := \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_f \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T} := \begin{pmatrix} T_{11} & \cdots & T_{1f} \\ \vdots & & \vdots \\ T_{f1} & \cdots & T_{ff} \end{pmatrix} = \mathcal{T}^T$$

$$\mathcal{V} := \begin{pmatrix} V_{11} & \cdots & V_{1f} \\ \vdots & & \vdots \\ V_{f1} & \cdots & V_{ff} \end{pmatrix} = \mathcal{V}^T. \quad (1.14)$$

Für beliebige $\dot{\vec{q}}$ ist

$$\dot{\vec{q}}^T \mathcal{T} \dot{\vec{q}} = \sum_{i=1}^N m_i \sum_{j,k=1}^f \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k = \sum_{i=1}^N m_i \left(\sum_{j=1}^f \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right)^2 \geq 0. \quad (1.15)$$

Die kinetische Energie kann nicht negativ werden, \mathcal{T} eine *positiv-semidefinite* Matrix. Wir nehmen im folgenden an, dass \mathcal{T} *positiv definit* ist. Aus (1.9) folgen dann wieder unter der Bedingung dass die Relation der Koordinaten zeitlich konstant ist,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{T} \dot{\vec{q}} = -\mathcal{V} \dot{\vec{q}} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{T} \ddot{\vec{q}} + \mathcal{V} \dot{\vec{q}} = 0, \quad (1.16)$$

Diese Bewegungsgleichungen sind offensichtlich eine Verallgemeinerung der harmonischen Schwingungsgleichung $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$.

1.2 Normalkoordinaten

Wir haben gelernt, dass man Systeme mit N Massenpunkten und komplizierten Randbedingungen durch parametrisierte Koordinaten beschreiben kann, die im wesentlichen den bekannten Bewegungsgleichungen gehorchen, und mit deren Hilfe man die kinetische und potentielle Energie genau wie in Ortskoordinaten schreiben kann. Nachdem wir Matrizen diagonalisieren können stellt sich die Frage, ob man auch die quadratischen Formen \mathcal{T} oder \mathcal{V} durch eine geeignete Koordinatenwahl vereinfachen kann.

1.2.1 Transformation auf Normalkoordinaten

- Da \mathcal{T} positiv definit ist, gibt es eine Matrix \mathcal{B} so, dass

$$\mathcal{T} = \mathcal{B}^T \mathcal{B} \quad (1.17)$$

gilt. Zum Beweis benutzen wir, dass sich \mathcal{T} diagonalisieren lässt. Seien t_1, \dots, t_f die Eigenwerte, also die Diagonalelemente nach

der Diagonalisierung. Dann gibt es eine orthogonale Koordinatentransformation \mathcal{R} so, dass

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \mathcal{R}^T \text{diag}(t_j) \mathcal{R} \\ &= \mathcal{R}^T \text{diag}(\sqrt{t_j}) \text{diag}(\sqrt{t_j}) \mathcal{R} \quad (\mathcal{T} \text{ positiv definit}) \\ &=: \mathcal{B}^T \mathcal{B}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Dabei ist

$$\det \mathcal{B} = \prod_{j=1}^f \sqrt{t_j} > 0, \quad (1.19)$$

und \mathcal{B} ist nur bis auf eine orthogonale Transformation \mathcal{S} festgelegt, denn

$$(\mathcal{S}\mathcal{B})^T \mathcal{S}\mathcal{B} = \mathcal{B}^T (\mathcal{S}^T \mathcal{S}) \mathcal{B} = \mathcal{B}^T \mathcal{B} = \mathcal{T}. \quad (1.20)$$

Wir nutzen diese Form von \mathcal{T} und transformieren in einem ersten Schritt die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} \dot{\vec{q}}^T \mathcal{T} \dot{\vec{q}} = \frac{1}{2} \dot{\vec{q}}^T \mathcal{B}^T \mathcal{B} \dot{\vec{q}} = \frac{1}{2} \dot{\vec{\xi}}^T \dot{\vec{\xi}}, \quad (1.21)$$

mit den neuen Parametern $\vec{\xi} = \mathcal{B}\vec{q}$.

- Für die potentiellen Energie invertieren wir zunächst \mathcal{B} ,

$$\begin{aligned} \vec{q} &= \mathcal{B}^{-1} \vec{\xi} =: \overline{\mathcal{B}} \vec{\xi} \\ \Rightarrow V &= \frac{1}{2} \vec{q}^T \mathcal{V} \vec{q} = \frac{1}{2} \vec{\xi}^T \overline{\mathcal{B}}^T \mathcal{V} \overline{\mathcal{B}} \vec{\xi}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Um diese Form zu vereinfachen können wir nun \mathcal{B} von links mit einer orthogonalen Matrix \mathcal{S} multiplizieren,

$$\overline{\mathcal{B}} = \mathcal{B}^{-1} = (\mathcal{S}\mathcal{B}')^{-1} = (\mathcal{B}')^{-1} \mathcal{S}^{-1} =: \overline{\mathcal{B}}' \mathcal{S}^T. \quad (1.23)$$

Der Ausdruck für die kinetischen Energie ändert sich wie oben beschrieben nicht, aber wir erhalten für die potentielle Energie

$$V = \frac{1}{2} \vec{\xi}^T \mathcal{S} \left[(\overline{\mathcal{B}}')^T \mathcal{V} \overline{\mathcal{B}}' \right] \mathcal{S}^T \vec{\xi}. \quad (1.24)$$

Mit einer geeigneten Wahl von \mathcal{S} und den zu berechnenden Eigenwerten λ_j wird die potentielle Energie

$$V = \frac{1}{2} \vec{\xi}^T \text{diag}(\lambda_j) \vec{\xi}. \quad (1.25)$$

- Die kinetische und die potentielle Energie lassen sich also als

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^f \dot{\xi}_j^2 \quad \text{und} \quad V = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^f \lambda_j \xi_j^2 \quad (1.26)$$

schreiben. Die Bewegungsgleichungen lauten dann

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_j} + \frac{\partial V}{\partial \xi_j} = \frac{d}{dt} \dot{\xi}_j + \lambda_j \xi_j = \ddot{\xi}_j + \lambda_j \xi_j = 0 \quad (1.27)$$

für alle $1 \leq j \leq f$. In den Parametern ξ_j *entkoppeln* also die Bewegungsgleichungen und beschreiben f *unabhängige* harmonische Oszillatoren. Die ξ_j heißen *Normalkoordinaten*.

1.2.2 Bestimmung der Normalkoordinaten

- Normalkoordinaten sind nur hilfreich, wenn wir sie für ein gegebenes System einfach konstruieren können. Zunächst bestimmen wir nach Gleichung (1.22) die Eigenwerte λ_j über das charakteristische Polynom von $\overline{\mathcal{B}}^T \mathcal{V} \overline{\mathcal{B}}$,

$$\begin{aligned} \det(\overline{\mathcal{B}}^T \mathcal{V} \overline{\mathcal{B}} - \lambda) &= 0 \\ \Leftrightarrow \det\left[\mathcal{B}^T (\overline{\mathcal{B}}^T \mathcal{V} \overline{\mathcal{B}} - \lambda) \mathcal{B}\right] &= 0 \\ \Leftrightarrow \det(\mathcal{V} - \lambda \mathcal{T}) &= 0 \end{aligned} \quad (1.28)$$

d.h. die λ_j sind auch die Eigenwerte von \mathcal{V} *bezüglich* \mathcal{T} . Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{B}}^T \mathcal{V} \overline{\mathcal{B}} &= \text{diag}(\lambda_j) \\ \Leftrightarrow \mathcal{V} \overline{\mathcal{B}} &= \mathcal{B}^T \text{diag}(\lambda_j) \\ &= \mathcal{B}^T (\mathcal{B} \mathcal{B}^{-1}) \text{diag}(\lambda_j) = \mathcal{T} \overline{\mathcal{B}} \text{diag}(\lambda_j). \end{aligned} \quad (1.29)$$

- Um die Eigenvektoren zu den Eigenwerten λ_j zu erhalten zerlegen wir die Matrix $\overline{\mathcal{B}}$ in Spaltenvektoren \vec{b}_j ,

$$\overline{\mathcal{B}} = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_f) \quad (1.30)$$

und erhalten damit aus (1.29) die Eigenwertgleichung

$$\mathcal{V} \vec{b}_j = \lambda_j \mathcal{T} \vec{b}_j, \quad (1.31)$$

in der \mathcal{T} an die Stelle der Einheitsmatrix tritt.

- Die Sätze über das gewöhnliche Eigenwertproblem sind vollständig auf das Eigenwertproblem übertragbar, in dem \mathcal{T} die Rolle der Einheitsmatrix übernimmt. \mathcal{T} ist dann der metrische Tensor des Eigenwertproblems. Zum Beispiel sind die \vec{b}_j orthogonal bezüglich \mathcal{T} , denn

$$\overline{\mathcal{B}}^T \mathcal{T} \overline{\mathcal{B}} = \overline{\mathcal{B}}^T \mathcal{B}^T \mathcal{B} \overline{\mathcal{B}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \vec{b}_j^T \mathcal{T} \vec{b}_k = \delta_{jk}. \quad (1.32)$$

Daraus ergibt sich folgende Vorschrift für die Konstruktion der Matrix $\overline{\mathcal{B}}$ und für die Transformation auf Normalkoordinaten $\vec{\xi}$:

1. Zunächst das Eigenwertproblem $(\mathcal{V} - \lambda\mathcal{T})\vec{b} = 0$ lösen und ein vollständiges, bezüglich \mathcal{T} orthonormales System von Eigenvektoren \vec{b}_j bestimmen,
2. danach mittels

$$\vec{q} = \sum_{j=1}^f \vec{b}_j \xi_j = \overline{\mathcal{B}} \vec{\xi} \quad (1.33)$$

auf Normalkoordinaten transformieren.

1.2.3 Stabilität

- Die Lösungen der Bewegungsgleichungen (1.27) sind

$$\xi_j \sim \begin{cases} e^{\pm i \sqrt{\lambda_j} t} & (\lambda_j \neq 0) \\ \xi_j & (\lambda_j = 0) \end{cases} \quad (1.34)$$

Wie können als zwei Fälle unterscheiden:

1. Alle $\lambda_j > 0$, also $\lambda_j =: \omega_j^2$; dann sind die Lösungen harmonische Schwingungen,

$$\xi_j(t) = C_j \cos(\omega_j t - \delta_j) \quad (1.35)$$

mit konstanten C_j und δ_j . Das System ist also genau dann stabil, wenn \mathcal{V} strikt positiv ist, d.h. wenn die Potentialfunktion in der Ruhelage ein striktes Minimum hat.

2. Mindestens ein $\lambda_j \leq 0$, dann kann ξ_j im Rahmen der betrachteten Näherung unbegrenzt wachsen und das System ist instabil. Wenn mindestens ein Eigenwert $\lambda_j = 0$ und die anderen $\lambda_k \geq 0$ sind, müssen für die Stabilitätsanalyse Terme höherer Ordnung herangezogen werden.

- Im stabilen Fall ist die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung für das Gesamtsystem nach (1.33) und (1.35)

$$\vec{q}(t) = \sum_{j=1}^f \vec{b}_j \xi_j(t) = \sum_{j=1}^f \vec{b}_j C_j \cos(\omega_j t - \delta_j). \quad (1.36)$$

Die ω_j sind die Eigenfrequenzen und werden auch *Normalfrequenzen* genannt. Bei *Normalschwingungen* ist nur eine Normalcoordinate angeregt, z.B. ξ_j , und die anderen sind in Ruhe. Dann ist

$$\vec{q}(t) = \vec{b}_j C_j \cos(\omega_j t - \delta_j) \quad (1.37)$$

ohne Summation über j .

- Die Konstanten C_j und δ_j werden wie immer durch die Anfangsbedingungen bestimmt,

$$\begin{aligned}\vec{q}_0 = \vec{q}(t=0) &= \sum_{j=1}^f \vec{b}_j C_j \cos \delta_j \\ \dot{\vec{q}}_0 = \dot{\vec{q}}(t=0) &= \sum_{j=1}^f \vec{b}_j C_j \omega_j \sin \delta_j.\end{aligned}\quad (1.38)$$

Wegen der Orthonormalität der \vec{a}_j bezüglich \mathcal{T} ist

$$\vec{b}_j^T \mathcal{T} \vec{q}_0 = C_j \cos \delta_j \quad \text{und} \quad \vec{b}_j^T \mathcal{T} \dot{\vec{q}}_0 = C_j \omega_j \sin \delta_j, \quad (1.39)$$

woraus C_j und δ_j bestimmt werden können.

- *Bemerkung:* Das System kehrt nie in seine Anfangslage zurück, wenn die ω_j nicht in rationalen Verhältnissen zueinander stehen.

1.2.4 Gekoppelte Pendel

Nachdem wir atypisch für diese Vorlesung die Normalkoordinaten erst formal eingeführt haben fehlt uns noch ein illustratives Beispiel.

- Gegeben seien zwei gleiche ebene Pendel der Länge l , an denen Massenpunkte der Masse m hängen. Der Abstand der Aufhängungspunkte sei x_0 , und die Pendel seien durch eine Feder mit der Federkonstanten k und der Ruhelänge x_0 aneinander gekoppelt.
- Geeignete Parameter zur Beschreibung dieses Systems sind die beiden Auslenkwinkel $q_1 = \varphi_1$ und $q_2 = \varphi_2$. Damit lautet die kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2} (l^2 \dot{\varphi}_1^2 + l^2 \dot{\varphi}_2^2) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{T} = ml^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.40)$$

Die potentielle Energie setzt sich aus den Beiträgen des Schwerfelds und der Feder zusammen,

$$\begin{aligned}V &= -mgl [\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2] \\ &+ \frac{k}{2} \left[\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} - x_0 \right]^2.\end{aligned}\quad (1.41)$$

Für kleine Auslenkungen können die $y_{1,2}$ gegenüber den $x_{1,2}$ vernachlässigt werden. Außerdem können $x_1 = l \sin \varphi_1 \approx l\varphi_1$,

$x_2 = x_0 + l\varphi_2$ und $\cos \varphi_j \approx 1 - \varphi_j^2/2$ genähert werden. Damit lautet die potentielle Energie

$$V = mgl \left(\frac{\varphi_1^2}{2} + \frac{\varphi_2^2}{2} \right) + \frac{k}{2} l^2 (\varphi_1 - \varphi_2)^2$$

$$\Rightarrow \mathcal{V} = mgl \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + kl^2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.42)$$

wobei die Konstante $-2mgl$ weggelassen wurde.

- Die Gleichung $\det(\mathcal{V} - \lambda \mathcal{T}) = 0$ bestimmt das charakteristische Polynom

$$(mgl + kl^2 - ml^2 \lambda)^2 - k^2 l^4 = 0, \quad (1.43)$$

mit den Lösungen

$$\lambda_1 = \frac{g}{l} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{g}{l} + 2\frac{k}{m} \quad (1.44)$$

Die beiden entsprechend (1.32) normierten Eigenvektoren sind

$$\vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2ml}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2ml}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (1.45)$$

d.h. die Normalschwingungen entsprechen solchen Schwingungen, bei denen die beiden Pendel entweder gleichphasig oder gegenphasig schwingen.

Kapitel 2

Systeme mit Nebenbedingungen

Im vorigen Kapitel haben wir gelernt, dass geeignete Koordinaten für die Freiheitsgrade eines Systems gezielt konstruieren kann. Bei der Konstruktion der Freiheitsgrade spielen Neben- oder Zwangsbedingungen eine zentrale Rolle. In diesem Kapitel verfolgen wir weiter die Abstrahierung von Koordinaten und die Konstruktion von Bewegungsgleichungen, aber im Hinblick auf Zwangsbedingungen.

2.1 Vorbereitung

2.1.1 Verallgemeinerte Koordinaten

- Neben- oder *Zwangsbedingungen* können auf verschiedene Weisen formuliert werden. Oft ist es möglich, sie für N Massenpunkts und ihre Ortsvektoren \vec{x}_i durch Gleichungen der Art

$$g_i(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t) = 0, \quad 1 \leq i \leq r \quad (2.1)$$

auszudrücken. In diesem Fall haben wir r Bedingungen, also reduziert sich die Anzahl der Freiheitsgrade auf $f = 3N - r$. Wir nehmen an, dass die g_i genügend oft differenzierbar sind. Beispiele für Zwangsbedingungen dieser Art sind:

- Eine Bewegung auf einer Ebene erfüllt die Bedingung $\vec{x} \cdot \vec{n} = 0$, wenn \vec{n} der Normalenvektor der Ebene ist.
- Eine Bewegung auf einer Kugel stellt die Bedingung $|\vec{x}| = R = \text{konst.}$, also $|\vec{x}| - R = 0$.

Zwangsbedingungen dieses Typs heißen *holonom*. Ein Beispiel für eine *nichtholonome* Zwangsbedingung ist die Bewegung innerhalb einer Kugel, also $|\vec{x}| \leq R$. Bedingungen, die die Zeit explizit enthalten, heißen *rheonom*, anderenfalls *skleronom* (rheos, fließend; skleros, starr).

- Der *Konfigurationsraum* eines Systems ist der Teil des $3N$ -dimensionalen Raums, der von den Koordinaten der N Massenpunkte erreicht werden kann. Die r Bedingungsgleichungen g_i definieren eine $(3N - r)$ -dimensionale sogenannte Untermannigfaltigkeit im Konfigurationsraum. Dort kann die Lage des Systems durch $f = 3N - r$ unabhängige Koordinaten q_j angegeben werden. Wir kennen sie als parametrisierte oder *verallgemeinerte Koordinaten*.
- Zum Beispiel ist der Konfigurationsraum eines freien Massenpunktes der dreidimensionale reelle Raum \mathbb{R}^3 . Die Zwangsbedingung $|\vec{x}| = R$ definiert eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit, nämlich eine Kugelschale. So zum Beispiel kann die Zwangsbedingung für die Bewegung eines Massenpunktes auf der Oberfläche einer Kugel mit Radius R , $|\vec{x}| - R = 0$, durch

$$\vec{x} = R \cdot \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

mit $0 \leq \vartheta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ angegeben werden, d.h. (q_1, q_2) können durch die Winkel (ϑ, φ) repräsentiert werden.

2.1.2 Lagrange-Multiplikatoren

- Unsere Beschreibung läuft darauf hinaus, gegebene Größen unter Randbedingungen zu optimieren. Dafür gibt es etablierte Verfahren. Als Beispiel betrachten einen Zylinder mit dem Radius R und der Höhe H , dessen Volumen V fest ist. Die holonome Zwangsbedingung lautet

$$\pi R^2 H - V = 0, \quad (2.3)$$

und in R und H ist die Richtung einer erlaubten Änderung durch die totale Ableitung

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial R} (\pi R^2 H - V) dR + \frac{\partial}{\partial H} (\pi R^2 H - V) dH \\ &= 2\pi R H dR + \pi R^2 dH \end{aligned} \quad (2.4)$$

gegeben. Wenn wir diese Gleichung zum Beispiel nach dR/dH auflösen, dann definiert diese Differentialgleichung eine Linie, auf der die Zwangsbedingung erfüllt ist.

- Wir wollen jetzt die Oberfläche $A = 2\pi R H + 2\pi R^2$ als Funktion von R und H minimieren. Ihre Änderung ist ebenfalls durch eine totale Ableitung gegeben,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial A}{\partial R} dR + \frac{\partial A}{\partial H} dH \\ &= (2\pi H + 4\pi R) dR + 2\pi R dH \end{aligned} \quad (2.5)$$

Aus den beiden Gleichungen (2.4) und (2.5) wollen wir nun die Verknüpfung zwischen H und R bestimmen, die der minimalen Oberfläche bei konstantem Volumen entspricht. Wir können zum Beispiel zunächst dH eliminieren und erhalten dann

$$-\frac{2\pi RH}{\pi R^2}dR = -\frac{2\pi H + 4\pi R}{2\pi R}dR$$

$$\Leftrightarrow 4\pi RH = 2\pi RH + 4\pi R^2 \quad \Leftrightarrow \quad R = \frac{H}{2}. \quad (2.6)$$

- Es gibt eine andere Methode, die sich leichter auf komplexere Systeme erweitern lässt. Sie beruht auf der Beobachtung, dass in der oben beschriebenen Rechnung dR und dH nicht bestimmt werden, man also die beiden Bedingungen (2.4) und (2.5) für allgemeine dH und dR lösen kann. Wir kombinieren die beiden Gleichungen zunächst mit Hilfe eines unbestimmten Faktors oder *Lagrange-Multiplikators* $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$0 = (2\pi H + 4\pi R + \lambda 2\pi RH) dR + (2\pi R + \lambda \pi R^2) dH \quad (2.7)$$

und erhalten zwei Bedingungen. Aus der ersten bestimmen wir λ ,

$$2\pi R + \lambda \pi R^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -\frac{2}{R}, \quad (2.8)$$

und danach die Korrelation von R und H

$$0 = 2\pi H + 4\pi R - \frac{2}{R} 2\pi RH$$

$$= 2\pi H + 4\pi R - 4\pi H$$

$$\Leftrightarrow H = 2R. \quad (2.9)$$

- Diesen Zugang für die Suche nach Extrema von Funktionen unter Nebenbedingungen verallgemeinern wir nun. Für eine Funktion $f(\vec{x})$ folgen wir Linien mit konstantem Funktionswert, wenn der Pfad senkrecht auf dem Gradienten steht oder die totale Ableitung verschwindet,

$$df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{x} = 0. \quad (2.10)$$

Gleichzeitig reduziert eine holonome Nebenbedingung die Anzahl der Freiheitsgrade um einen und ist durch $g(\vec{x}) = 0$ beschrieben. Entlang unseres Pfades darf sich auch $g(\vec{x})$ nicht ändern, also

$$dg = \vec{\nabla} g \cdot d\vec{x} = 0. \quad (2.11)$$

Zusammen spannen $\vec{\nabla} f$ und $\vec{\nabla} g$ also eine Ebene senkrecht zu $d\vec{x}$ auf, wobei wir aber noch nicht berücksichtigt haben, dass $f(\vec{x})$ nicht nur konstant, sondern extremal sein soll. Um das Extremum zu suchen folgen wir in dieser Ebene so lange der Richtung $\vec{\nabla} f$, bis die Nebenbedingung dies nicht mehr zulässt. Das geschieht

wenn $\vec{\nabla}f$ in dieselbe Richtung zeigt wie $\vec{\nabla}g$, also mit Hilfe eines *Lagrange-Multiplikator* gilt

$$\vec{\nabla}f + \lambda \vec{\nabla}g = 0 . \tag{2.12}$$

Wir können einen Term herausgreifen um λ zu bestimmen,

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_3} = 0 , \tag{2.13}$$

solange $\partial g/\partial x_3 \neq 0$. Ebenso müssen die beiden anderen Ableitungen separat verschwinden,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1, 2) \tag{2.14}$$

Aus diesen Bedingungen erhalten wir die erlaubte Koordinatenfläche.

- Wenn r Bedingungen $g_i = 0$ ($1 \leq i \leq r$) zu erfüllen sind, wird jede mit einem eigenen Lagrange-Multiplikator λ_i berücksichtigt, so dass dann die Bedingungen für Extrema unter Nebenbedingungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \quad (1 \leq j \leq N) \tag{2.15}$$

lauten.

2.2 Das d’Alembertsche Prinzip

Im vorigen Kapitel haben wir die Bewegung von Teilchen unter Zwangsbedingungen mit Hilfe geeigneter Koordinaten beschrieben. Die Newtonsche Mechanik und insbesondere Kräfte haben hier keine Rolle gespielt. Das wird auch so bleiben, allerdings werden wir vorher noch einen kurzen Blick auf die Verbindung zwischen Zwangsbedingungen und entsprechenden *Zwangskräften* werfen.

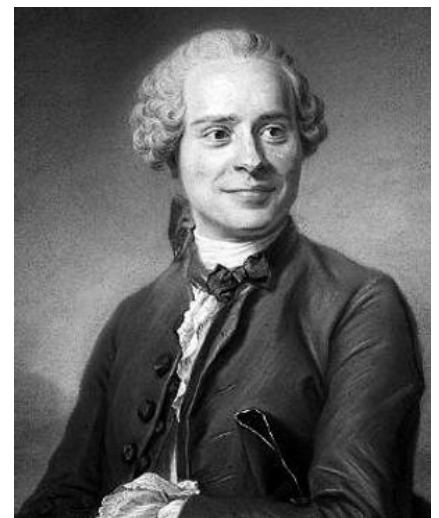
2.2.1 Zwangskräfte im Gleichgewicht

- Als Beispiel betrachten wir eine Kugel, die unter dem Einfluss der Schwerkraft \vec{F} reibungsfrei in einer Röhre in der y - z -Ebene gleite, beschrieben durch die holonome Zwangsbedingung

$$g(y, z) = 0 \tag{2.16}$$

Die Tangentialkomponente von \vec{F} relativ zur Röhre verursacht eine Bewegung, während die Normalkomponente $\vec{F} \cdot \vec{n}$ durch eine Zwangskraft \vec{Z} kompensiert wird,

$$\vec{Z} = -(\vec{F} \cdot \vec{n}) \vec{n} . \tag{2.17}$$



Jean Baptiste le Rond d’Alembert

Im Gleichgewicht haben wir die komplette Kompensation

$$\vec{F} + \vec{Z} = \vec{0}. \quad (2.18)$$

- Wir wollen die Gleichgewichtsbedingung in allgemeinen Fällen finden. Dazu denken wir uns eine *virtuelle* Verrückung $\delta\vec{x}$

$$\delta\vec{x} = \begin{pmatrix} \delta y \\ \delta z \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Wenn der Massenpunkt in der Röhre bleibt, dann darf sich g in diese Richtung nicht ändern,

$$0 = \vec{\nabla}g \cdot \delta\vec{x} = \frac{\partial g(y, z)}{\partial y} \delta y + \frac{\partial g(y, z)}{\partial z} \delta z. \quad (2.20)$$

Die virtuelle Verrückung erfordert eine virtuelle Arbeit, die im Gleichgewicht wegen (2.18) verschwindet,

$$\delta A = (\vec{F} + \vec{Z}) \cdot \delta\vec{x} = \vec{0} \cdot \delta\vec{x} = 0. \quad (2.21)$$

Die Gleichgewichtslage ist also dadurch charakterisiert, dass dort virtuelle Verrückungen keine virtuelle Arbeit verrichten. Da immer $\delta\vec{x}$ tangential und \vec{Z} normal zur Röhre ist, gilt $\vec{Z} \cdot \delta\vec{x} = 0$, die Zwangskraft leistet nie virtuelle Arbeit. In der Gleichgewichtslage können also auch die äußeren Kräfte keine virtuelle Arbeit leisten

$$\vec{F} \cdot \delta\vec{x} = 0 \quad \text{und} \quad \vec{\nabla}g \cdot \delta\vec{x} = 0 \quad (2.22)$$

gelten. Das ist das *Prinzip der virtuellen Arbeit* oder das *d'Alembertsche Prinzip*, und es zeigt unter anderem die Grenzen unseres Kräfte-Zugangs.

- Wir wissen schon, dass wir die beiden Bedingungen (2.22) mit Hilfe eines Lagrange-Multiplikators λ erfüllen können,

$$\begin{aligned} 0 &= (\vec{F} + \lambda \vec{\nabla}g) \cdot \delta\vec{x} \\ &= \left(F_y + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \right) \delta y + \left(F_z + \lambda \frac{\partial g}{\partial z} \right) \delta z. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Dies gibt uns die Gleichgewichtslage. Die beiden Koordinaten δy und δz sind zunächst unabhängig, werden aber durch die Zwangsbedingung miteinander verknüpft. Wenn wir $g(y, z) = 0$ ebenfalls erfüllen, dann definiert (2.23) drei Gleichungen für drei Unbekannte.

- Als Beispiel betrachten wir einen Massenpunkt, der längs einer Parabel in der y - z -Ebene gleitet, also

$$g(y, z) = z - y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}g(y, z) = \begin{pmatrix} -2y \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Die Schwerkraft ist

$$\vec{F}(y, z) = -mg\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Das Prinzip der virtuellen Arbeit liefert zunächst

$$(\vec{F} + \lambda\vec{\nabla}g(y, z)) \cdot \delta\vec{x} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2y \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} = 0, \quad (2.26)$$

woraus

$$-2\lambda y \delta y = 0 \quad \text{und} \quad (-mg + \lambda)\delta z = 0 \quad (2.27)$$

folgen. Wenn die δy und δz beliebig sein dürfen, erhalten wir

$$\lambda = mg \quad \text{und} \quad y = 0. \quad (2.28)$$

In der Gleichgewichtslage mit $y = 0$ muss wegen der Zwangsbedingung auch $z = 0$ sein.

2.2.2 Dynamische Systeme

- Wir erweitern nun Schritt für Schritt unseren Zugang von statischen auf dynamische Systeme. Gegeben seien N Massenpunkte mit den Ortsvektoren \vec{x}_i , $1 \leq i \leq N$, die sich unter dem Einfluss der äußeren Kräfte \vec{F}_i bewegen. Zwangsbedingungen werden zunächst wieder durch Zwangskräfte \vec{Z} dargestellt. Eine virtuelle Verrückung δx_i sei unendlich klein, mit den Zwangsbedingungen verträglich und sonst willkürlich. Nach (2.22) folgt im Gleichgewicht

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta\vec{x}_i = - \sum_{i=1}^N \vec{Z}_i \cdot \delta\vec{x}_i = 0, \quad (2.29)$$

weil dort die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte verschwindet.

- Abseits vom Gleichgewicht lauten die N Bewegungsgleichungen

$$\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i + \vec{Z}_i. \quad (2.30)$$

Wenn die Zwangskräfte ebenfalls (2.29) erfüllen, dann gilt offenbar das d'Alembertsche Prinzip in der Form

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta\vec{x}_i = 0. \quad (2.31)$$

Die $-\dot{\vec{p}}_i$ erscheinen also als Kräfte, sogenannte *Trägheitskräfte*. Die Bewegung verläuft also so, dass die virtuelle Arbeit der Summe von äußeren und Trägheitskräften verschwindet.

- Als Beispiel bewege sich ein Massenpunkt der Masse m an einem Ende einer masselosen Stange der Länge l , die in ihrem anderen Ende drehbar aufgehängt ist. Sein Ortsvektor, seine Geschwindigkeit und seine Beschleunigung sind

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = l \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \end{pmatrix} \\ \dot{\vec{x}} &= l\dot{\varphi} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \\ \ddot{\vec{x}} &= l\ddot{\varphi} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} + l\dot{\varphi}^2 \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Zum Beispiel erzeugt dann eine konstanter Winkelgeschwindigkeit, $\ddot{\varphi} = 0$, die Trägheitskraft

$$-\vec{p} = -m\ddot{\vec{x}} = -ml\dot{\varphi}^2 \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} = ml\dot{\varphi}^2 \vec{x} = \frac{mv^2}{l} \frac{\vec{x}}{l}, \quad (2.33)$$

da $v = |\dot{\vec{x}}| = l\dot{\varphi}$. Das ist die Zentrifugalkraft.

- Wenn wir nun die Gewichtskraft $\vec{F} = -mg\vec{e}_z$ hinzufügen, dann können wir mit dem d'Alembertsche Prinzip das mathematische Pendel beschreiben. Eine virtuelle Verrückung $\delta\vec{x}$, die mit der Zwangsbedingung in (2.32) verträglich ist, muss

$$\delta\vec{x} = l\delta\varphi \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

erfüllen. Aus dem d'Alembertschen Prinzip (2.31) mit der allgemeinen Trägheitskraft (2.32) erhalten wir

$$\left[-mg \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - ml\ddot{\varphi} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} - ml\dot{\varphi}^2 \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \right] \cdot \delta\vec{x} = 0 \quad (2.35)$$

oder mit (2.34)

$$(-mgl \sin \varphi - ml^2\ddot{\varphi}) \delta\varphi = 0. \quad (2.36)$$

Da die virtuelle Verrückung $\delta\varphi$ beliebig ist, folgt daraus

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi \approx -\frac{g}{l} \varphi. \quad (2.37)$$

Für kleine Auslenkungen $\varphi \ll 1$ ist dies offensichtlich die bekannte Gleichung eines harmonischen Oszillators.

2.2.3 Lagrange-Gleichungen erster Art

- Wie schon vorher verallgemeinern wir diese Argumentation nun. Gegeben seien wieder Massenpunkten. Zur Vereinfachung der

Notation betrachten wir die $3N$ Koordinaten x_i der Massenpunkte. Das System erfahre die äußeren Kräfte F_i , $1 \leq i \leq 3N$, und unterliege r holonomen Zwangsbedingungen $g_j(x_1, \dots, x_{3N}) = 0$, $1 \leq j \leq r$. Das d'Alembertsche Prinzip besagt dann für einen Satz virtuelle Verrückungen δx_i

$$\sum_{i=1}^{3N} (F_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i = 0, \quad (2.38)$$

wobei die δx_i die Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \delta x_i = 0 \quad j = 1, \dots, r \quad (2.39)$$

erfüllen müssen. Die beiden Gleichungen lassen sich wieder durch r Lagrange-Multiplikatoren λ_j kombinieren,

$$\sum_{i=1}^{3N} \left(F_i - m_i \ddot{x}_i + \sum_{j=1}^r \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right) \delta x_i = 0. \quad (2.40)$$

- Die λ_j können nun so gewählt werden, dass die Vorfaktoren der r abhängigen Verrückungen in (2.40) verschwinden. Nehmen wir an, das seien die ersten r Verrückungen, dann folgt

$$\sum_{j=1}^r \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = -F_i + m_i \ddot{x}_i \quad i = 1, \dots, r, \quad (2.41)$$

oder, in Matrix-Schreibweise,

$$\mathcal{F} \vec{\lambda} = \vec{Q}, \quad (2.42)$$

wobei die Abkürzungen

$$\mathcal{F} = (\mathcal{F}_{ij}) := \left(\frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right), \quad \vec{Q} = (Q_i) := m_i \ddot{x}_i - F_i \quad (2.43)$$

mit $i, j = 1, \dots, r$. Nun ist (2.42) ein lineares Gleichungssystem für die r Multiplikatoren λ_j , das eindeutig lösbar ist, wenn $\det \mathcal{F} \neq 0$ gilt, was wir voraussetzen. Also sind die Lagrange-Multiplikatoren

$$\vec{\lambda} = \mathcal{F}^{-1} \vec{Q}. \quad (2.44)$$

- Diese λ_j werden nun in die verbleibenden $3N - r$ Gleichungen für die unabhängigen und beliebigen Verrückungen eingesetzt und ergeben

$$\begin{aligned} \sum_{i=r+1}^{3N} \left(F_i - m_i \ddot{x}_i + \sum_{j=1}^r \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right) \delta x_i &= 0 \\ F_i - m_i \ddot{x}_i + \sum_{j=1}^r \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} &= 0 \end{aligned} \quad (2.45)$$

für $i = r + 1, \dots, 3N$. Dies sind die *Lagrange-Gleichungen erster Art*.

- Beispiel: Eine Perle gleite reibungslos auf einem masselosen Draht, der sich um eines seiner Enden dreht und dabei die x - y -Ebene überstreicht. Die Zwangsbedingung ist, dass die Perle den Draht nicht verlassen kann,

$$g(x, y) = y \cos \varphi - x \sin \varphi = 0 \quad (2.46)$$

Ohne äußeren Kräfte folgt aus dem d'Alembertschen Prinzip (2.38) mit dem einen Lagrange-Multiplikator λ

$$-m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + \lambda \vec{\nabla} g = -m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} = 0. \quad (2.47)$$

Der naheliegende Ansatz $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ gibt

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \dot{r} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} + r\dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Wenn wir dies in (2.47) einsetzen erhalten wir

$$(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} = \frac{\lambda}{m} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (2.49)$$

Indem wir zum Beispiel diese Gleichung einmal mit $(-\sin \varphi, \cos \varphi)$ und einmal mit $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ multiplizieren, folgen die beiden unabhängigen Bedingungen

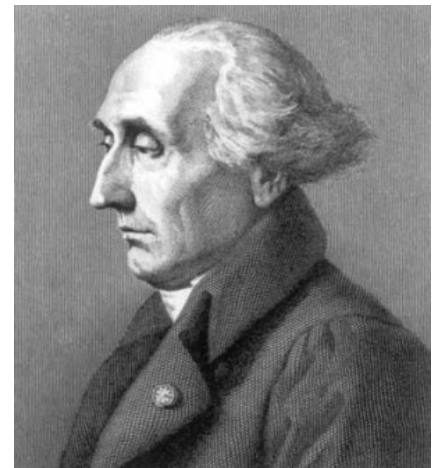
$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = 0. \quad \text{und} \quad \frac{\lambda}{m} = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} \quad (2.50)$$

Die erste Gleichung ist die Bewegungsgleichung. Die Zentrifugalkraft $mr\dot{\varphi}^2$ tritt als Trägheitskraft auf, die die Perle radial nach außen treibt.

Kapitel 3

Lagrange-Formulierung

An dieser Stelle verlassen wir die Newtonsche Mechanik mit ihrer Betrachtung von Kräften und wenden uns einer Formulierung ausschließlich über die Lagrange-Gleichung und ihre verallgemeinerten Koordinaten zu. Wie im vergangenen Kapitel beschrieben kann man natürlich die Kräfte weiterhin bestimmen, aber wir werden sehen dass sie bei der Berechnung von dynamischen Systemen keine Rolle mehr spielen. Stattdessen entwickeln wir unseren Formalismus in Richtung Erhaltungsgrößen und schreiben das d'Alembertsche Prinzip mit Hilfe der potentiellen and kinetischen Energie.



Joseph Louis Lagrange

3.1 Lagrange-Gleichungen zweiter Art

3.1.1 Herleitung

- Statt der kartesischen Koordinaten benutzen wir nun $f = 3N - r$ verallgemeinerten Koordinaten q_j . Die kartesischen Koordinaten lassen sich immer noch in der Form $x_i(\vec{q}; t)$ schreiben, und die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte in (2.38) wird

$$\begin{aligned}\delta A_e &= \sum_{i=1}^{3N} F_i \delta x_i = \sum_{i=1}^{3N} F_i \left(\sum_{j=1}^f \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^f \left(\sum_{i=1}^{3N} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j =: \sum_{j=1}^f Q_j \delta q_j, \quad (3.1)\end{aligned}$$

wobei wir *verallgemeinerten Kraftkomponenten* mit Hilfe eines Potentials definieren,

$$Q_j = \sum_{i=1}^{3N} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial V(\vec{x}; t)}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial V(\vec{x}(\vec{q}; t); t)}{\partial q_j} \quad (3.2)$$

- Die virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte ebenfalls in (2.38) ist

$$\begin{aligned}
 \delta A_t &= - \sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i \delta x_i \\
 &= - \sum_{j=1}^f \left(\sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j \\
 &= - \sum_{j=1}^f \left[\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) - \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j . \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

Die Zeitableitung im zweiten Term können wir vereinfachen,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i(\vec{q}; t)}{\partial q_j} &= \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial q_j} + \sum_{k=1}^f \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k \\
 &= \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^f \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) = \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} . \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

Weiterhin nutzen wir (1.2) oder $\partial \dot{x}_i / \partial \dot{q}_j = \partial x_i / \partial q_j$, dann wird

$$\begin{aligned}
 \delta A_t &= - \sum_{j=1}^f \left\{ \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} \right\} \delta q_j \\
 &= - \sum_{j=1}^f \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j , \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

hier mit der kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i^2 . \quad (3.6)$$

- Nach dem d'Alembertschen Prinzip muss die gesamte virtuelle Arbeit der äußeren und der Trägheitskräfte verschwinden, also

$$0 = \delta A_e + \delta A_t = \sum_{j=1}^f \left(Q_j - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j . \quad (3.7)$$

Für beliebige δq_j folgen die *Lagrange-Gleichungen zweiter Art*,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j = - \frac{\partial V}{\partial q_j} . \quad (3.8)$$

Definieren wir die *Lagrange-Funktion* durch

$$L = T - V = T(q, \dot{q}, t) - V(q, t) , \quad (3.9)$$

dann lauten die Lagrange-Gleichungen zweiter Art einfach

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 . \quad (3.10)$$

In dieser Form werden sie gewöhnlich als *Lagrange-Gleichungen* bezeichnet. Mit ihrer Hilfe löst sich die Mechanik von den kartesischen Koordinaten. Die Lagrange-Gleichungen zeigen dann, wie sich aus Ableitungen der Lagrange-Funktion die Bewegungsgleichungen in den verallgemeinerten Koordinaten ergeben.

- Für einen Massenpunkt der Masse m im Feld einer vorgegebenen Potentialkraft ist die Lagrange-Funktion

$$L = T - V = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i^2 - V. \quad (3.11)$$

Hieraus folgen die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} m \dot{x}_i + \frac{\partial V}{\partial x_i} = m \ddot{x}_i + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0. \quad (3.12)$$

- Im Falle einer Zentralkraft wählen wir ebene Polarkoordinaten (r, φ) als verallgemeinerte Koordinaten. Das Potential ist $V = V(r)$, und wegen $\dot{\vec{x}}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$ ist die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r). \quad (3.13)$$

Für r und φ erhalten wir die Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d(mr^2 \dot{\varphi})}{dt} = 0 \quad \text{und} \quad m \ddot{r} - mr \dot{\varphi}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0. \quad (3.14)$$

Die erste Gleichung formuliert die Drehimpuls-Erhaltung, die zweite ist die Bewegungsgleichung.

3.2 Anwendungen

Die Relevanz der Lagrange-Gleichungen in der Physik ist riesig. Wir illustrieren ihre Bedeutung mit einer Reihe Anwendungen, die jeweils unsere früheren Methoden an ihre Grenzen gebracht haben.

3.2.1 Beschleunigte Bezugssysteme

- Ein Problem für unseren alten Zugang waren Scheinkräfte in beschleunigten Bezugssystemen. Sei also ein (ungestrichenes) Bezugssystem gegeben, das sich relativ zu einem (gestrichenen) Inertialsystem dreht und bewegt, so dass zwischen gestrichenen und ungestrichenen Ortsvektoren die Beziehung

$$\vec{x}' = R(\vec{d} + \vec{x}) \quad (3.15)$$

besteht, wobei \vec{a} der zeitlich konstante Ortsvektor des Ursprungs des Inertialsystems aus der Sicht des beschleunigten Systems ist. Zwischen den Geschwindigkeiten in beiden Systemen besteht dann die Beziehung

$$\dot{\vec{x}}' = R \left[\dot{\vec{x}} + \vec{\omega} \times (\vec{a} + \vec{x}) \right], \quad (3.16)$$

wie im ersten Teil der Vorlesung gezeigt wurde.

- Die Lagrange-Funktion im gestrichenen Inertialsystem ist dann

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2} \left[\dot{\vec{x}} + \vec{\omega} \times (\vec{a} + \vec{x}) \right]^2 - V(\vec{x}) \\ &= \frac{m}{2} \left\{ \dot{\vec{x}}^2 + 2\dot{\vec{x}} \cdot [\vec{\omega} \times (\vec{a} + \vec{x})] + [\vec{\omega} \times (\vec{a} + \vec{x})]^2 \right\} - V(\vec{x}). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Die partielle Ableitung nach x_i ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} &= \frac{m}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ 2\dot{x}_j \epsilon_{jkl} \omega_k (a+x)_l + \epsilon_{jkl} \epsilon_{jmn} \omega_k (a+x)_l \omega_m (a+x)_n \right\} \\ &= \frac{m}{2} \left\{ 2\dot{x}_j \epsilon_{jki} \omega_k + \epsilon_{jki} \epsilon_{jmn} \omega_k \omega_m (a+x)_n + \epsilon_{jkl} \epsilon_{jmi} \omega_k (a+x)_l \omega_m \right\} \\ &= m \dot{x}_j \epsilon_{jki} \omega_k + \frac{m}{2} \epsilon_{jki} \epsilon_{jmn} \omega_k \omega_m (a+x)_n + \frac{m}{2} \epsilon_{jkl} \epsilon_{jmi} \omega_k (a+x)_l \omega_m \\ &= m \dot{x}_j \epsilon_{jki} \omega_k + \frac{m}{2} \epsilon_{jki} \epsilon_{jmn} \omega_k \omega_m (a+x)_n + \frac{m}{2} \epsilon_{jkn} \epsilon_{jmi} \omega_k (a+x)_n \omega_m \\ &= m \dot{x}_j \epsilon_{jki} \omega_k + m \epsilon_{jki} \epsilon_{jmn} \omega_k \omega_m (a+x)_n \\ &= m \dot{x}_j \epsilon_{jki} \omega_k + m \epsilon_{ijk} \left(\epsilon_{jmn} \omega_m (a+x)_n \right) \omega_k \\ &= m (\dot{\vec{x}} \times \vec{\omega})_i + m [(\vec{\omega} \times (\vec{a} + \vec{x})) \times \vec{\omega}]_i, \end{aligned} \quad (3.18)$$

Die partielle Ableitung nach \dot{x}_i liefert

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m \dot{x}_i + m (\vec{\omega} \times (\vec{a} + \vec{x}))_i, \quad (3.19)$$

und damit die Lagrange-Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= m \frac{d}{dt} \left[\dot{\vec{x}} + \vec{\omega} \times (\vec{a} + \vec{x}) \right] - m \dot{\vec{x}} \times \vec{\omega} - m [\vec{\omega} \times (\vec{a} + \vec{x})] \times \vec{\omega} + \vec{\nabla} V \\ &= m \ddot{\vec{x}} + m \dot{\vec{\omega}} \times (\vec{a} + \vec{x}) + m \vec{\omega} \times \dot{\vec{x}} \\ &\quad + m \vec{\omega} \times \dot{\vec{x}} - m (\vec{\omega} \times \vec{a}) \times \vec{\omega} - m (\vec{\omega} \times \vec{x}) \times \vec{\omega} + \vec{\nabla} V \\ &= m \ddot{\vec{x}} + m \dot{\vec{\omega}} \times (\vec{a} + \vec{x}) + 2m \vec{\omega} \times \dot{\vec{x}} \\ &\quad + m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{a}) + m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}) + \vec{\nabla} V, \end{aligned} \quad (3.20)$$

in Übereinstimmung mit dem ersten Teil der Vorlesung.

3.2.2 Kräftefreier symmetrischer Kreisel

Als Anwendung der Lagrange-Gleichungen auf physikalische Systeme nutzen wir auch Kreisel. Offensichtlich sind dort kartesische Koordinaten ungeeignet, und die Bewegungen können je nach Kraft komplex genügend komplex sein, um als Beispiele für den neuen Formalismus zu dienen und uns dann in Richtung von Erhaltungsgrößen zu führen.

- Die gesamte Energie des kräftefreien Kreisels setzt sich aus der Rotation und der Translation zusammen. Wir wählen zunächst ein Bezugssystem, in dem der Schwerpunkt des Kreisels ruht. Wir hatten im ersten Teil der Vorlesung gesehen, dass die kinetische Energie der Rotation eines starren Körpers

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \Theta \vec{\omega} \quad (3.21)$$

ist, wobei Θ der Trägheitstensor ist. Wir können die Rotationsenergie in einem beliebigen Bezugssystem auswerten, weil sie als Skalar unabhängig vom Bezugssystem ist. Dafür bietet sich das Hauptachsensystem des starren Körpers an,

$$\Theta = \text{diag}(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3) . \quad (3.22)$$

Nehmen wir der Einfachheit halber weiter an, dass der starre Körper symmetrisch gegenüber Drehungen um die x_3 -Achse ist, also $\Theta_1 = \Theta_2$. Die Lagrange-Funktion lautet dann

$$L = \frac{\Theta_1}{2} (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{\Theta_3}{2} \omega_3^2 . \quad (3.23)$$

- Außerdem hatten wir die drei Euler-Winkel $(\varphi, \vartheta, \psi)$ eingeführt und gezeigt, dass sich die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ eines starren Körpers allgemein durch

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi , \\ \omega_2 &= \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi , \\ \omega_3 &= \dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi} \end{aligned} \quad (3.24)$$

darstellen lässt. Die drei Euler-Winkel sind die nächstliegenden verallgemeinerten Koordinaten, durch die die drei Rotationsfreiheitsgrade des starren Körpers ausgedrückt werden können. Damit wird die Lagrange-Funktion

$$L(\varphi, \vartheta, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\vartheta}, \dot{\psi}) = \frac{\Theta_1}{2} (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{\Theta_3}{2} (\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi})^2 \quad (3.25)$$

- Allgemein muss immer die Energie erhalten bleiben. Außerdem hängt L nicht von φ und ψ ab. Wir finden also aus der Lagrange-Gleichung und der expliziten Form der Lagrange-Funktion drei

Erhaltungsgrößen

$$\begin{aligned}
 E &:= T_{\text{rot}} = L \\
 p_\psi &:= \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \Theta_3 (\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}) \\
 p_\varphi &:= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \Theta_1 \dot{\varphi} \sin^2 \vartheta + \Theta_3 (\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}) \cos \vartheta, \quad (3.26)
 \end{aligned}$$

die sogenannten *konjugierten Impulse*. Die Energie kennen wir schon, der zweite Term ist offensichtlich gleich $\Theta_3 \omega_3$, also der Drehimpuls in x_3 -Richtung, und der dritte Term ist der gesamte Drehimpuls.

- Um diese Bewegung zu beschreiben können wir zunächst ψ aus p_φ eliminieren,

$$\begin{aligned}
 p_\varphi &= \Theta_1 \dot{\varphi} \sin^2 \vartheta + p_\psi \cos \vartheta \\
 \Leftrightarrow \quad \dot{\varphi} &= \frac{p_\varphi - p_\psi \cos \vartheta}{\Theta_1 \sin^2 \vartheta}. \quad (3.27)
 \end{aligned}$$

Damit können wir die erhaltene Energie durch

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{\Theta_1}{2} \left(\frac{p_\varphi - p_\psi \cos \vartheta}{\Theta_1 \sin^2 \vartheta} \right)^2 \sin^2 \vartheta + \frac{\Theta_1}{2} \dot{\vartheta}^2 + \frac{p_\psi^2}{2\Theta_3} \\
 \Leftrightarrow \quad \frac{2}{\Theta_1} \left(E - \frac{p_\psi^2}{2\Theta_3} \right) &= \left(\frac{p_\varphi - p_\psi \cos \vartheta}{\Theta_1 \sin^2 \vartheta} \right)^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2 \quad (3.28)
 \end{aligned}$$

ausdrücken. Diese Gleichung enthält weder φ noch ψ und ist eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung für ϑ . Um sie zu lösen, führen wir einige Abkürzungen ein, nämlich

$$\alpha := \frac{2}{\Theta_1} \left(E - \frac{p_\psi^2}{2\Theta_3} \right) \quad a := \frac{p_\psi}{\Theta_1} \quad b := \frac{p_\varphi}{\Theta_1}. \quad (3.29)$$

Außerdem führen wir $y := \cos \vartheta$ ein. Dann ist $\dot{y} = -\sin \vartheta \dot{\vartheta}$, und (3.28) lautet

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \left(\frac{p_\varphi - p_\psi \cos \vartheta}{\Theta_1} \right)^2 \frac{1}{\sin^2 \vartheta} + \frac{\dot{y}^2}{\sin^2 \vartheta} \\
 &= (b - ay)^2 \frac{1}{1 - y^2} + \frac{\dot{y}^2}{1 - y^2} \\
 \Leftrightarrow \quad \dot{y}^2 &= \alpha(1 - y^2) - (b - ay)^2. \quad (3.30)
 \end{aligned}$$

Ihre implizite Lösung erhalten wir durch Separation der Variablen,

$$t - t_0 = \int_{y_0}^{y(t)} \frac{dy}{\sqrt{\alpha(1 - y^2) - (b - ay)^2}}. \quad (3.31)$$

Man kann solche Gleichungen numerisch lösen, aber analytisch kommen wir an dieser Stelle nicht weiter.

- Wir wissen schon, dass in vielen Fällen Erhaltungsgrößen uns helfen ein System zu verstehen. Wie man aus der Definition der konjugierten Impulse sieht gilt das auch wenn wir die Lagrange-Gleichungen benutzen. Hier wird die Betrachtung mit Hilfe der Drehimpulserhaltung einfacher, wenn man das Inertialsystem so orientiert, dass die x'_3 -Achse in Richtung des konstanten gesamten Drehimpulses \vec{L}' zeigt. Der Euler-Winkel ϑ gibt an um welchen Winkel die Symmetrieachse des Kreisels aus der x'_3 -Richtung verkippt ist,

$$L_3 = |\vec{L}'| \cos \vartheta . \quad (3.32)$$

Da sowohl $|\vec{L}'|$ als auch L_3 Konstanten der Bewegung sind, muss auch ϑ konstant sein, also

$$\dot{\vartheta} = 0 . \quad (3.33)$$

Für die φ -Richtung folgt aus (3.27) dass der Kegel sich um die x'_3 -Achse des Inertialsystems mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi - p_\psi \cos \vartheta}{\Theta_1 \sin^2 \vartheta} . \quad (3.34)$$

dreht. Aus der Konstanz von p_ψ folgt schließlich mithilfe von (3.26) die konstante Winkelgeschwindigkeit des kräftefreien Kreisels um seine eigene Achse,

$$\dot{\psi} = \frac{p_\psi}{\Theta_3} - \dot{\varphi} \cos \vartheta . \quad (3.35)$$

3.2.3 Kegel im Schwerfeld

- Als Beispiel für einen Kegel mit Potential untersuchen wir unseren symmetrischen Kegel der Masse m im Schwerfeld der Erde, der außerhalb seines Schwerpunkts, aber auf der Figuren-achse unterstützt wird. Der Vektor vom Unterstützungspunkt zum Schwerpunkt sei \vec{s} . Er definiert eine zweite (mögliche) Drehbewegung. Die nach unten zeigende Schwerkraft \vec{g} übt dann das Drehmoment

$$\vec{M} = m\vec{s} \times \vec{g} \quad (3.36)$$

auf den Kegel aus.

- Die Lagrange-Funktion (3.25) enthält nun auch die potentielle Energie $V = -m\vec{g} \cdot \vec{s} = mgs \cos \vartheta$,

$$L = \frac{\Theta_1}{2} (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{\Theta_3}{2} (\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi})^2 - mgs \cos \vartheta . \quad (3.37)$$

Wieder kommen φ und ψ nicht in der Lagrange-Funktion vor, so dass p_φ und p_ψ wie in (3.26) Konstanten der Bewegung bleiben.

Damit bleibt auch (3.27) für $\dot{\varphi}$, aber die Energie ist

$$\begin{aligned} E &= T + V = L + 2V & (3.38) \\ &= \frac{\Theta_1}{2} (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{\Theta_3}{2} (\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi})^2 + mgs \cos \vartheta . \end{aligned}$$

Der Term $V = mgs \cos \vartheta$ kommt also auch auf der rechten Seite der erhaltenen Energie (3.28) dazu. Definieren wir zusätzlich zu den Abkürzungen (3.29) noch

$$\beta := \frac{2mgs}{\Theta_1} , \quad (3.39)$$

verändert sich die Differentialgleichung (3.30) zu

$$\dot{y}^2 = (\alpha - \beta u)(1 - u^2) - (b - au)^2 , \quad (3.40)$$

deren implizite Lösung im Allgemeinen auf elliptische Integrale führt. Wie schon in (3.31) sind wir an dieser Stelle am Ende unserer analytischen Möglichkeiten angelangt.

- Den Effekt der Gewichtskraft können wir leichter unter der Annahme untersuchen, dass sie eine kleine Störung der oben beschriebenen Bewegung ist. Wenn der Kreisel außerdem schnell um seine Figurenachse rotiert, dann ist auch der gesamte Drehimpulsvektor nahe der Figurenachse. Unter dieser Annahme ist \vec{s}' etwa parallel zu \vec{L}' , also

$$\frac{\vec{s}'}{s'} \approx \frac{\vec{L}'}{L'} . \quad (3.41)$$

Die Änderung der Richtung des gesamten Drehimpulses \vec{L}' durch die Gewichtskraft ist dann

$$\begin{aligned} \vec{M}' &= \frac{d\vec{L}'}{dt} = m(\vec{s}' \times \vec{g}') \approx \frac{ms'}{L'} (\vec{L}' \times \vec{g}') \\ \Rightarrow \quad \vec{L}'(t + dt) &\approx \vec{L}'(t) + \frac{ms'}{L'} (\vec{L}' \times \vec{g}') dt . \end{aligned} \quad (3.42)$$

Das ist eine infinitesimalen Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit $-ms'/L' \times \vec{g}'$. Der Drehimpulsvektor weicht also bei gleichbleibender Länge senkrecht zur Schwerkraft aus. Die Figurenachse des um sich selbst rotierenden Kreisels folgt im wesentlichen dem Drehimpulsvektor. Man kann zeigen dass je rascher der Kreisel rotiert, desto langsamer präzediert er, weil dann seine potentielle gegenüber seiner kinetischen Energie immer unwichtiger wird.

Kapitel 4

Extremalprinzipien

Im vorigen Kapitel haben wir die Lagrange-Gleichungen abgeleitet und damit ein Werkzeug eingeführt, das mit leichten Modifikationen in der aktuellen Forschung eine wichtige Rolle einnimmt. Lagrange-Funktionen sind in der Hochenergiephysik das Bindeglied zwischen experimentellen Messungen und theoretischen Annahmen. In diesem Kapitel geht es nun nicht darum, diesen Mechanismus weiterzuentwickeln, sondern darum, ähnlich universelle Zugänge für andere Felder der Physik anzuleiten. Wir werden zeigen, dass sowohl das Prinzip der Stationären Wirkung als auch die Hamilton-Gleichungen äquivalent zu den Lagrange-Gleichungen sind.

4.1 Prinzip der stationären Wirkung

In einem ersten Schritt führen wir ein neues Konzept in die Mechanik ein, das Extremalprinzip. Wir werden zeigen, dass für eine entsprechend definierte *Wirkung* die Lagrange-Gleichungen äquivalent sind zur Aussage, dass diese Wirkung extremal ist.

4.1.1 Das Fermatsche Prinzip

- Bisher haben wir mechanische Systeme differentiell beschrieben: Aus dem Zustand zur Zeit t wurde eine Änderung innerhalb der Zeit dt vorhergesagt. Jetzt bereiten wir eine Beschreibung vor, die die gesamte Bahn eines Systems zur Grundlage nimmt. Gegeben sei dazu ein System mit f Freiheitsgraden und verallgemeinerten Koordinaten (q_1, \dots, q_f) . Diese mögen in einem Bereich $B \in \mathbb{R}_f$ variieren, dem so genannten Konfigurationsraum. Durch die Bewegung des Systems zwischen den t_0 und $t_1 > t_0$ wird eine Kurve im Konfigurationsraum durchlaufen, die als Bahn des Systems bezeichnet wird.

- Wir nehmen an, dass die Bewegungsgleichungen des Systems aus einer Lagrange-Funktion $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ ableitbar seien. Wodurch unterscheidet sich dann die wirkliche Bahn $\vec{q}(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, zwischen den zwei festen Punkten P_0 und P_1 von allen denkbaren anderen Bahnen $\vec{q}'(t)$ mit $\vec{q}'(t_0) = \vec{q}(t_0)$ und $\vec{q}'(t_1) = \vec{q}(t_1)$? Ein Beispiel liefert das Fermatsche Prinzip der geometrischen Optik, das besagt, dass längs des tatsächlich realisierten Lichtstrahls die Lichtlaufzeit extremal wird.
- Betrachten wir den Übergang eines Lichtstrahls aus dem linken Halbraum mit dem Brechungsindex n_1 in den rechten Halbraum mit dem Brechungsindex n_2 . Der Lichtstrahl soll zwischen zwei festen Punkten \vec{x}_1 und \vec{x}_2 verlaufen, und seine Bahnebene sei die x - y -Ebene. Das Licht folgt in beiden Halbräumen Geraden. Der Übergang vom linken in den rechten Halbraum finde im Punkt $(0, y)$ statt. Die gesamte Lichtlaufzeit ist dann

$$\tau = \frac{n_1}{c} \sqrt{x_1^2 + (y - y_1)^2} + \frac{n_2}{c} \sqrt{x_2^2 + (y_2 - y)^2}, \quad (4.1)$$

weil die Lichtgeschwindigkeit durch die Brechungsindizes auf $c/n_{1,2}$ reduziert ist. Fermats Prinzip besagt

$$\delta\tau = 0, \quad (4.2)$$

weil die Lichtlaufzeit extremal werden soll. Wir können die Störung $\delta\tau$ als Funktion der Koordinate y parametrisieren, also

$$\begin{aligned} \delta\tau &= \delta y \frac{d\tau}{dy} = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{n_1}{c} \frac{y - y_1}{\sqrt{x_1^2 + (y - y_1)^2}} - \frac{n_2}{c} \frac{y_2 - y}{\sqrt{x_2^2 + (y_2 - y)^2}} &= 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

oder, mit den Winkeln $\alpha_{1,2}$ der Lichtstrahlen bezüglich der Normalen zur Trennfläche zwischen den beiden Halbräumen,

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2. \quad (4.4)$$

Das ist das Brechungsgesetz, abgeleitet aus einer Extremalbedingung.

4.1.2 Hamiltons Prinzip

- In der Mechanik postulieren wir dass entlang der wirklichen Bahn die *Wirkung*

$$S[\vec{q}(t)] := \int_{t_0}^{t_1} L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) dt \quad (4.5)$$



William Rowan Hamilton

extremal wird. Sie hat die Dimension Energie \times Zeit und ist ein *Funktional* der Kurve $\vec{q}(t)$, d.h. eine Funktion einer Funktion. Das *Hamiltonsche Prinzip der stationären Wirkung* lautet dann

$$\delta S [\vec{q}(t)] = \delta \left[\int_{t_0}^{t_1} L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) dt \right] = 0 . \quad (4.6)$$

- Wie man das Extremum eines Funktionals findet, ist Gegenstand der *Variationsrechnung* von Leonhard Euler, die uns wieder an die totale Ableitung und entsprechende Differentiale erinnern wird. Seien $\vec{q}(t)$ die wahre und $\vec{q}'(t) = \vec{q}(t) + \delta\vec{q}(t)$ eine leicht gestörte Bahn. Dann muss δS in erster Ordnung von $\delta\vec{q}$ verschwinden,

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} L(\vec{q} + \delta\vec{q}, \dot{\vec{q}} + \delta\dot{\vec{q}}, t) dt - \int_{t_0}^{t_1} L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) dt = 0 . \quad (4.7)$$

Wir Taylorn zunächst die Lagrange-Funktion längs der gestörten Bahn bis zur ersten Ordnung in $\delta\vec{q}$,

$$\begin{aligned} L(\vec{q} + \delta\vec{q}, \dot{\vec{q}} + \delta\dot{\vec{q}}, t) &= L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) + \sum_{j=1}^f \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) \\ \Leftrightarrow \delta S &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^f \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt = 0 . \end{aligned} \quad (4.8)$$

Partielle Integration des zweiten Terms nach der Zeit gibt

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt . \quad (4.9)$$

Der Oberflächenterm verschwindet, wenn die Endpunkte der Bahn festgehalten werden, $\delta q_j(t_0) = 0 = \delta q_j(t_1)$. Daher folgt

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{j=1}^f \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j = 0 . \quad (4.10)$$

Für beliebige δq_j gibt uns das die bekannten Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 . \quad (4.11)$$

Da jeder der vorangegangenen Rechenschritte reversibel war, ist das Hamiltonsche Prinzip der stationären Wirkung *äquivalent* zu den Lagrange-Gleichungen.

- Das Wirkungsprinzip zeigt auch, dass die Lagrange-Funktion nicht eindeutig ist: Wenn man die Lagrange-Funktion L durch

einen Term ergänzt, der die totale Zeitableitung einer beliebigen Funktion $f(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ der Koordinaten und der Zeit ist,

$$\begin{aligned} L &\rightarrow L + \frac{df(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)}{dt} \\ \Rightarrow S &\rightarrow S + f(\vec{q}_1, t_1) - f(\vec{q}_0, t_0). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Die Wirkung ändert sich dadurch um eine Konstante, die bei der Variation verschwindet. Die Bewegungsgleichungen bleiben dadurch unverändert. Das ist ein sehr einfaches Beispiel für eine so genannte Eichinvarianz, die in der Feldtheorie eine entscheidend wichtige Rolle spielt.

4.2 Hamilton-Funktion

In einem zweiten Schritt entwickeln wir eine weitere, zu den Lagrange-Gleichungen äquivalente Methode. Sie führt uns auf die Hamilton-Funktion, die in der Quantenmechanik oder der Festkörperphysik eine zentrale Rolle spielt.

4.2.1 Die kanonischen Gleichungen

- Die Lagrange-Funktion des freien Teilchens und ihre Ableitung sind

$$\begin{aligned} L_{\text{frei}} &= \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) \\ \frac{\partial L_{\text{frei}}}{\partial \dot{x}_j} &= m\dot{x}_j = p_j. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Weil die Lagrange-Funktion ohne Potentialterm die kinetische Energie beschreibt, ist es naheliegend die Ableitung $\partial L_{\text{frei}}/\partial \dot{x}_j$ wie schon in (3.26) mit dem zu x_j gehörigen Impuls zu identifizieren.

- Analog wird anhand der verallgemeinerten Koordinaten ein *verallgemeinerter Impuls* definiert,

$$p_j := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}. \quad (4.14)$$

Er heißt der zu q_j *kanonisch konjugierte Impuls*. Er hat im Allgemeinen nicht die Dimension eines Impulses, aber $q_j p_j$ behält die Dimension einer Wirkung, also Energie \times Zeit. Seine Zeitableitung kann durch die Lagrange-Gleichungen vereinfacht werden,

$$\dot{p}_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j}. \quad (4.15)$$

Wenn die Transformation von \dot{q}_j auf p_j umkehrbar ist, können die \dot{q}_j durch p_j ersetzt werden. Die verallgemeinerten Koordinaten \vec{q} und ihre kanonisch konjugierten Impulse \vec{p} spannen einen $2f$ -dimensionalen Raum auf, den sogenannten *Phasenraum*. Indem sich das gesamte System zeitlich verändert, werden diese $2f$ Werte einen Bereich $P \subset \mathbb{R}^{2f}$ des gesamten Phasenraums überstreichen. Einer Kurve im Phasenraum entspricht eine Bahn im Konfigurationsraum $B \subset \mathbb{R}^f$. Damit stellt sich die Frage wie nun die Bewegungsgleichungen ausgedrückt in (\vec{q}, \vec{p}) aussehen?

- Wir definieren zuerst ohne weitere Motivation die *Hamilton-Funktion*

$$H(\vec{q}, \vec{p}, t) := \dot{\vec{q}}\vec{p} - L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) \tag{4.16}$$

und ersetzen $\dot{\vec{q}}$ durch \vec{p} . Die totale Ableitung nach der Zeit ist

$$\begin{aligned} dH &= \sum_{j=1}^f \frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \sum_{j=1}^f \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial H}{\partial t} dt \\ &= \sum_{j=1}^f \left(-\frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_j} p_i dp_j + \dot{q}_j dp_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_j} dp_j \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_{j=1}^f \left(-\frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j + p_j d\dot{q}_j + \dot{q}_j dp_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_{j=1}^f \left(\dot{q}_j dp_j - \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Daraus können wir die drei partiellen Ableitungen der Hamilton-Funktion

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j \quad \frac{\partial H}{\partial q_j} = -\frac{\partial L}{\partial q_j} = -\dot{p}_j \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{4.18}$$

ablesen. Die ersten beiden Gleichungen heißen *Hamiltonschen kanonischen Gleichungen*. Sie sind wiederum äquivalent mit den Lagrange-Gleichungen. Wir hatten schon bemerkt, dass der zu q_j konjugierte Impuls p_j erhalten ist, wenn L nicht explizit von q_j abhängt. Solche Koordinaten heißen *zyklisch*.

- Zum Beispiel ist die Lagrange-Funktion des harmonischen Oszillators in einer Dimension

$$\begin{aligned} L(x, \dot{x}) &= \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{k}{2} x^2 = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 - \omega_0^2 x^2) \\ \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x} = p. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Er beschreibt eine Ellipse im zweidimensionalen Phasenraum,

$$\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ m\dot{x} \end{pmatrix} = A_0 \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t - \delta_0) \\ -m\omega_0 \sin(\omega_0 t - \delta_0) \end{pmatrix}. \tag{4.20}$$

Wir erhalten die Hamilton-Funktion

$$\begin{aligned} H(x, p) &= \dot{x}p - L(x, \dot{x}) \\ &= \frac{p}{m}p - \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega_0^2x^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega_0^2x^2 \end{aligned} \quad (4.21)$$

und die Hamilton-Gleichungen

$$\dot{x} = \frac{p}{m} \quad \text{und} \quad \dot{p} = m\ddot{x} = -m\omega_0^2x. \quad (4.22)$$

Die erste Gleichung ist identisch mit der Definition des Impulses, und die zweite ist die Bewegungsgleichung.

4.2.2 Hamilton-Funktion und Energie

- Die totale zeitliche Änderung der Hamiltonfunktion ist

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \sum_{j=1}^f \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= \sum_{j=1}^f \left(-\dot{p}_j \dot{q}_j + \dot{q}_j \dot{p}_j \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

Wenn also H nicht explizit von der Zeit abhängt, ist es eine Erhaltungsgröße.

Anhand eines Beispiels können wir diese Erhaltungsgröße erraten: Für einen Massenpunkt der Masse m , der im Feld einer Potentialkraft die potentielle Energie $V(x_1, x_2, x_3)$ hat, lautet die Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - V(x_1, x_2, x_3) \\ \Rightarrow \quad p_j &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = m\dot{x}_j \\ \Rightarrow \quad H &= \sum_{j=1}^3 p_j \dot{x}_j - L = \sum_{j=1}^3 \frac{p_j^2}{2m} + V = E. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Die Hamiltonfunktion sollte die Gesamtenergie sein.

- Sei allgemein ein konservatives System von N Massenpunkten gegeben. Es unterliege r holonom-skleronomen Zwangsbedingungen $g_j(\vec{x}_i) = 0$. Diese werden durch Einführung von $f = 3N - r$ verallgemeinerten Koordinaten \vec{q} erfüllt. Wegen der skleronomen Zwangsbedingungen kommt in der Relation zwischen den \vec{x}_i und \vec{q} die Zeit nicht explizit vor. Für die kinetische Energie

gilt wir schon in (1.14)

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \sum_{j=1}^f \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j, \quad 1 \leq i \leq N \\ T &= \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{x}_i^2 = \sum_{j,k=1}^f \left(\sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Sie ist eine homogene Funktion zweiten Grades in \dot{q}_j . Weiterhin hänge V nicht explizit von \dot{q}_j ab, dann erhalten wir aus der Lagrange-Funktion $L = T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) - V(\vec{q})$ die kanonischen Impulse

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \quad (4.26)$$

und damit die Hamiltonfunktion

$$H = \sum_{j=1}^f p_j \dot{q}_j - L = \sum_{j=1}^f \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - T + V \quad (4.27)$$

Wenn die kinetische Energie ausschliesslich quadratische Terme in \dot{q} hat, dann gilt offensichtlich

$$\sum_{j=1}^f \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 2T \quad \Rightarrow \quad H = 2T - T + V = T + V = E. \quad (4.28)$$

Wenn H nicht explizit von der Zeit abhängt, folgt die Erhaltung der Gesamtenergie, Das bedeutet dass wir im Hamilton-Zugang über die Hamilton-Funktion physikalische Aussagen über unser System machen können, selbst wenn wir in keinem der Zugänge die Bewegungsgleichungen lösen können oder wollen.

4.2.3 Nicht-konservative Kräfte

Es gibt zahlreiche weitere Extremalprinzipien; als Beispiel verallgemeinern wir nun das Hamiltonsche Prinzip auf nichtkonservative Systeme. Seien N Massenpunkte gegeben, die $r < 3N$ holonomen Zwangsbedingungen unterliegen. Für solche Systeme verschwindet die Variation

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta A_e dt = 0, \quad (4.29)$$

Wobei wie vorher angenommen wird, dass die Bahnen im Konfigurationsraum dieselben Anfangs- und Endpunkte durchlaufen,

$$\delta \vec{q}(t_0) = \vec{0} = \delta \vec{q}(t_1). \quad (4.30)$$

Unter Verwendung der verallgemeinerten Kraft in (3.1) lautet die Variation (4.29)

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{j=1}^f \left[\frac{\partial T}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j + Q_j \delta q_j \right] = 0, \quad (4.31)$$

woraus nach partieller Integration

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{j=1}^f \left[\frac{\partial T}{\partial q_j} + Q_j - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right] \delta q_j + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_{t_0}^{t_1} \quad (4.32)$$

folgt. Die Randterme in (4.32) verschwinden wegen (4.30), und da die δq_j beliebig sind, folgt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0. \quad (4.33)$$

Das sind die Lagrange-Gleichungen 2. Art für den Fall nichtkonservativer Kräfte. Die Umkehrung erfolgt völlig analog, wodurch gezeigt ist, dass das Extremalprinzip (4.29) zu den Lagrange-Gleichungen 2. Art (4.33) äquivalent ist, auch im Falle nicht konservativer Kräfte.

4.2.4 Hamilton-Gleichungen und Wirkungsprinzip

- Bislang haben wir gezeigt, dass das Prinzip der stationären Wirkung äquivalent zu den Lagrange-Gleichungen ist, und dass die Hamilton-Gleichungen äquivalent zu den Lagrange-Gleichungen sind. Zur Illustration zeigen wir jetzt die verbleibende direkte Verknüpfung zwischen der Wirkung und den Hamilton-Gleichungen.
- Entsprechend der Definition der Hamiltonfunktion lässt sich die Wirkung auch in die Form

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(\vec{q}, \vec{\dot{q}}, t) dt = \int_{t_0}^{t_1} [\vec{\dot{q}} \vec{p} - H(\vec{q}, \vec{p}, t)] dt \quad (4.34)$$

bringen. Die Variation der Wirkung führt dann auf

$$0 = \delta S = \sum_{j=1}^f \int_{t_0}^{t_1} \left[p_j \delta \dot{q}_j + \dot{q}_j \delta p_j - \frac{\partial H}{\partial q_j} \delta q_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \delta p_j \right] dt. \quad (4.35)$$

Der erste Term in eckigen Klammern kann partiell integriert werden,

$$\sum_{j=1}^f \int_{t_0}^{t_1} p_j \delta \dot{q}_j dt = \sum_{j=1}^f p_j \delta q_j \Big|_{t_0}^{t_1} - \sum_{j=1}^f \int_{t_0}^{t_1} \dot{p}_j \delta q_j = - \sum_{j=1}^f \int_{t_0}^{t_1} \dot{p}_j \delta q_j. \quad (4.36)$$

Damit erhält man

$$0 = \delta S = \sum_{j=1}^f \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) \delta p_j - \left(\dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \delta q_j \right] dt . \quad (4.37)$$

Es folgen die Hamilton-Gleichungen, weil die Variationen im Phasenraum δq_j und δp_j beliebig sind.

Kapitel 5

Symmetrien und Erhaltungssätze

Bei der Lösung von Bewegungsgleichungen in der Newtonschen Mechanik (Energie) oder in der Struktur der Lagrange-Gleichungen (Impuls) sind wir fast beiläufig auf Erhaltungsgrößen gekommen. Wir haben auch gesehen, dass sich manche Probleme wie der Kreisel sehr einfach mit Hilfe von Erhaltungsgrößen lösen lassen. Es wird daher Zeit, dass wir uns diesem Problem systematisch nähern. Dies wird es uns erlauben, über die Analyse der Lagrange-Funktion Symmetrien unseres Systems und Erhaltungsgrößen zu verknüpfen.

5.1 Galilei-Invarianz

- Inertialsysteme haben wir als Idealfall eingeführt, in dem einfache Physik-Gesetze gelten. Die naheliegende Frage ist, ob ein Beobachter in einem abgeschlossenen Kasten feststellen kann, ob sein Referenzsystem ein Inertialsystem ist. Offensichtlich wird er/sie zunächst überprüfen, welche Form die Bewegungsgleichungen in seinem System annehmen.

Man betrachte also N Massenpunkte der Massen m_i an den Orten \vec{x}_i , zwischen denen Potentialkräfte wirken, d.h. die potentielle Energie des Massenpunkts i relativ zum Massenpunkt j sei $V_{ji}(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|)$, und damit ist die Kraft des j -ten auf den i -ten Massenpunkt durch $\vec{F}_{ji}(\vec{x}_i) = -\vec{\nabla}_i V_{ji}(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|)$ gegeben. Das System lässt sich also durch eine Lagrange-Funktion beschreiben,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)}{\partial \dot{x}_{i,j}} - \frac{\partial L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)}{\partial x_{i,j}} = 0, \quad (5.1)$$

mit $1 \leq i \leq N$ and $j = 1, 2, 3$.

- Das Beobachtungssystem sei wie immer (t, \vec{x}) , ein sicherlich existierendes Inertialsystem (t', \vec{x}') . Allgemein gilt dann

$$t' = t + \tau \quad \text{und} \quad \vec{x}' = \vec{a}(t) + R(t) \cdot \vec{x}(t). \quad (5.2)$$

Falls der bewegte Beobachter keine Bewegung feststellen kann müssen $R(t)$ und $\vec{a}(t)$ konstant sein, denn sonst träten Scheinkräfte zum Beispiel bei einem Foucaultschen Pendel auf. Die allgemeine Form der Transformationen, die im Beobachtersystem nicht nachweisbar sind, weil sie die Bewegungsgleichungen invariant lassen, ist also

$$t' = t + \tau \quad \vec{x}' = \vec{a}_0 + \dot{\vec{a}}t + R \cdot \vec{x} \quad \vec{a}_0 = \dot{\vec{a}} = R = \text{konst.} \quad (5.3)$$

mit den zehn freien Parameter $\tau, \vec{a}_0, \dot{\vec{a}}$ und R .

- Damit können wir die Lagrange-Funktion vom Inertialsystem ins Beobachtersystem umrechnen,

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}'^2 &= (\dot{\vec{a}}(t) + R\dot{\vec{x}}(t))^2 = \dot{\vec{a}}(t)^2 + 2\dot{\vec{a}}^T(t)R\dot{\vec{x}}(t) + \dot{\vec{x}}(t)^2 \\ L &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left[m_i \dot{\vec{x}}_i'^2 - \sum_{j \neq i} V_{ji}(|\vec{x}_i' - \vec{x}_j'|) \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left[m_i \dot{\vec{x}}_i^2 - \sum_{j \neq i} V_{ji}(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|) \right] + \dot{\vec{a}}^T \sum_{i=1}^N m_i R \dot{\vec{x}}_i + \frac{\dot{\vec{a}}^2}{2} \sum_{i=1}^N m_i. \end{aligned} \quad (5.4)$$

In der ersten Zeile haben wir benutzt, dass die Rotation R die Länge des Vektors \vec{x} erhält.

- Nach (4.12) kann man zur Lagrange-Funktion die totale Zeitableitung einer beliebigen Funktion $f(\vec{x}, t)$ addieren, ohne die Physik zu ändern. Dies ist die einzige Willkür, die die Lagrange-Funktion erlaubt. Falls es also eine Funktion $f(x, t)$ gibt, deren totale zeitliche Ableitung die zusätzlichen Terme in (5.4) darstellen kann, dann sind die beobachteten Bewegungsgleichungen mit denen im Inertialsystem identisch,

$$\begin{aligned} \frac{df(\vec{x}, t)}{dt} &= \frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \dot{\vec{x}}_i^T \cdot \vec{\nabla}_i f(\vec{x}, t) \\ &= \dot{\vec{a}}^T \sum_{i=1}^N m_i R \dot{\vec{x}}_i + \frac{\dot{\vec{a}}^2}{2} \sum_{i=1}^N m_i \\ &= \frac{\dot{\vec{a}}^2}{2} \sum_{i=1}^N m_i + \sum_{i=1}^N \dot{\vec{x}}_i^T m_i R^T \dot{\vec{a}}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Nach der \vec{x} -Abhängigkeit ist das (genau dann) der Fall, wenn

$$\frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial t} = \frac{\dot{\vec{a}}^2}{2} \sum_{i=1}^N m_i \quad \text{und} \quad \vec{\nabla}_i f(\vec{x}, t) = m_i R^T \dot{\vec{a}}. \quad (5.6)$$

$\vec{a}(t) = \vec{a}_0 + \dot{\vec{a}}t$ Damit hat (5.6) eine einfache Stammfunktion, nämlich die Translation

$$f(\vec{x}, t) = \frac{\dot{\vec{a}}^2 t}{2} \sum_{i=1}^N m_i + \dot{\vec{a}}^T \sum_{i=1}^N m_i R \vec{x}_i, \quad (5.7)$$

und wir können die Transformationen in (5.3) in der Tat in eine physikalisch nicht relevante Umdefinition der Lagrange-Funktion absorbieren.

- Diese Methode ist charakteristisch für die moderne Physik: Wir haben aus der Eichinvarianz der klassischen Mechanik, ausgedrückt durch (4.12), ihre Symmetrie gegenüber der so definierten zehnparametrischen *Galilei-Gruppe* gefolgert. Mit ihren zehn Parametern oder sogenannten Generatoren hat sie den physikalischen Gehalt:

1. $t' = t + \tau$ und $\vec{x}' = \vec{x}$ entspricht einer Nullpunktverschiebung der Zeit. Die Invarianz bedeutet *Homogenität der Zeit*.
2. $t' = t$ und $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{a}_0$ entsprechen der Wahl des Koordinatenursprungs. Die Invarianz bedeutet *Homogenität des Raums*.
3. $t' = t$ und $\vec{x}' = R \cdot \vec{x}$ ist eine Drehung der Koordinatenachsen. Die Invarianz bedeutet *Isotropie des Raums*.
4. $t' = t$ und $\vec{x}' = \vec{x} + \dot{\vec{a}}t$ ist eine *geradlinig-gleichförmiger Bewegung*. Eine beschleunigte Bewegung wäre feststellbar.

5.2 Noether-Theoreme

Nachdem wir Symmetrien der Lagrange-Funktion für die Galilei-Transformationen verstanden haben, gehen wir einen Schritt weiter und verknüpfen sie mit Erhaltungssätzen, von denen wir ja wissen wie sie mit den Lagrange-Gleichungen zusammenhängen.

- Wir beginnen mit infinitesimale Koordinaten-Transformationen der Art (5.3), die die Lagrange-Funktion nur um eine totale zeitliche Ableitung ändern,

$$\begin{aligned} t &\rightarrow t' = t + \delta t \\ \vec{x}(t) &\rightarrow \vec{x}'(t') = \vec{x}(t) + \delta \vec{x}(t) \\ L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) &\rightarrow L(\vec{x}', \dot{\vec{x}}', t') = L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) + \frac{df(\vec{x}, t)}{dt}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Durch die Koordinatentransformation ändert sich das Wirkungsintegral zu

$$\begin{aligned}
 S' &= \int_{t'_0}^{t'_1} dt' L(\vec{x}', \dot{\vec{x}}', t') \\
 &= S + \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\frac{\partial L}{\partial x_j} (\vec{x}' - \vec{x})_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} (\dot{\vec{x}}' - \dot{\vec{x}})_j \right] \\
 &\quad + \delta t \left[L(\vec{x}(t_1), \dot{\vec{x}}(t_1), t_1) - L(\vec{x}(t_0), \dot{\vec{x}}(t_0), t_0) \right], \quad (5.9)
 \end{aligned}$$

mit $j = 1, 2, 3$. Partielle Integration und die Euler-Lagrange-Gleichungen geben wie schon einmal

$$\begin{aligned}
 \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} (\dot{\vec{x}}' - \dot{\vec{x}})_j &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} (\vec{x}' - \vec{x})_j \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} (\vec{x}' - \vec{x})_j \\
 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} (\vec{x}' - \vec{x})_j \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial x_j} (\vec{x}' - \vec{x})_j dt \\
 \Rightarrow S' &= S + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} (\vec{x}'(t) - \vec{x}(t))_j + L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) \delta t \right]_{t_0}^{t_1}. \quad (5.10)
 \end{aligned}$$

- Schließlich gilt entlang der Trajektorie eines Massenpunktes

$$\begin{aligned}
 \vec{x}'(t') &= \vec{x}'(t + \delta t) = \vec{x}(t) + \delta \vec{x} \\
 \Leftrightarrow \vec{x}'(t) &= \vec{x}(t - \delta t) + \delta \vec{x} = \vec{x}(t) - \dot{\vec{x}}(t) \delta t + \delta \vec{x}, \quad (5.11)
 \end{aligned}$$

womit sich der Term in eckigen Klammern in (5.10) zu

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} (\vec{x}' - \vec{x})_j + L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) \delta t &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \delta x_j - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \dot{x}_j - L \right) \delta t \\
 &= \vec{p} \delta \vec{x} - (\vec{p} \dot{\vec{x}} - L) \delta t \\
 &= \vec{p} \delta \vec{x} - H \delta t \delta t \quad (5.12)
 \end{aligned}$$

umformen lässt, wobei wir den konjugierten Impuls $p = \partial L / \partial \dot{x}$ und der Hamilton-Funktion $H = p \dot{x} - L$ verwenden. Für die Wirkung heißt das unter der Annahme, dass wir die Physik nicht ändern

$$\begin{aligned}
 S' &= S + \left[\vec{p} \delta \vec{x} - H \delta t \right]_{t_0}^{t_1} = S + \left[\delta f \right]_{t_0}^{t_1} \\
 \Leftrightarrow \left[\vec{p} \delta \vec{x} - H \delta t - \delta f \right]_{t_0}^{t_1} &= 0 \quad (5.13)
 \end{aligned}$$

Nach (5.6) hat die infinitesimale Verschiebung der Lagrange-Funktion für N Massenpunkte die Form

$$\delta f = \frac{\dot{\vec{a}}^2}{2} \left(\sum_{i=1}^N m_i \right) \delta t + \dot{\vec{a}}^T \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{R} \delta \vec{x}_i. \quad (5.14)$$

Weil t_0 und t_1 beliebige Zeitpunkte waren muss also

$$\sum_{i=1}^N \vec{p}_i \delta \vec{x}_i - \dot{\vec{a}}^T \sum_{i=1}^N m_i R \delta \vec{x}_i - H \delta t - \frac{\dot{\vec{a}}^2}{2} \left(\sum_{i=1}^N m_i \right) \delta t \quad (5.15)$$

erhalten sein.

- Zu welchen Erhaltungsgrößen führt daher die Symmetrie unter der Galilei-Gruppe?
 1. Zeittranslationen $t' = t + \delta t$ mit $\delta \vec{x}_i = 0$ und $\dot{\vec{a}} = 0$ führen auf $H = \text{konst.}$ Die Homogenität der Zeit führt also zur *Energieerhaltung*.
 2. Ortstranslationen $\vec{x}' = \vec{x} + \delta \vec{x}$ mit $\delta t = 0$ und $\dot{\vec{a}} = 0$ bedeuten $\vec{p}_i = \text{konst.}$, die Homogenität des Raums führt zur *Impulserhaltung*.
 3. Rotationen $\delta \vec{x} = \delta \vec{\varphi} \times \vec{x}$ um den infinitesimalen Drehwinkel $\delta \vec{\varphi}$ mit $\delta t = 0$ und $\dot{\vec{a}} = 0$ geben uns

$$\sum_{i=1}^N \vec{p}_i \cdot (\delta \vec{\varphi} \times \vec{x}_i) = \delta \vec{\varphi} \cdot \sum_{i=1}^N (\vec{x}_i \times \vec{p}_i) = \text{konst.} \quad (5.16)$$

Da $\delta \vec{\varphi}$ konstant ist, folgt aus der Isotropie des Raums die *Drehimpulserhaltung*.

4. Seien schließlich $\delta t = 0$ und $\delta \vec{x} = \dot{\vec{a}} t$ und ohne Rotation. Dann erhalten wir für kleine $\dot{\vec{a}}$ aus (5.7) statt aus (5.6) die Erhaltungsgröße

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \delta \vec{x}_i - \dot{\vec{a}}^T \sum_{i=1}^N m_i R \vec{x}_i &= \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \dot{\vec{a}} t - \dot{\vec{a}}^T \sum_{i=1}^N m_i \vec{x}_i \\ &= \dot{\vec{a}}^T \left(t \sum_{i=1}^N \vec{p}_i - \sum_{i=1}^N m_i \vec{x}_i \right), \\ &= \dot{\vec{a}}^T M \left(\frac{t}{M} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i - \vec{X} \right), \quad (5.17) \end{aligned}$$

also die *geradlinig-gleichförmige Bewegung des Schwerpunkts*.

Die zehn Parameter der Galilei-Gruppe gehören also zu zehn Erhaltungsgrößen: Eine ist die Energie, drei garantieren die Trägheitsbewegung des Schwerpunkts, und jeweils drei die Erhaltung des Impulses und des Drehimpulses.



Emmy Noether (1882-1935)