Theoretische Physik 4 (Quantentheorie)

Sommersemester 2014

Übungsblatt 1

Aufgabe 1.1: Separationsansatz in der Schrödingergleichung

Machen Sie in der Schrödingergleichung den Separationsansatz

$$\psi(t,x) = f(t) \cdot \phi(x) \tag{1}$$

und zeigen Sie, dass gelten muss:

$$f(t) = c\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{2}$$

mit einer *reellen* Frequenz ω und einem Vorfaktor $c \in \mathbb{C}$. Falls der räumliche Anteil $\phi(x)$ normiert ist, d.h. $\int |\phi(x)|^2\,\mathrm{d}x = 1$, so gilt außerdem $|c| = 1$ und folglich $|f(t)| = 1$.

Tipp: Verwenden Sie die Hermitizität des Hamiltonoperators oder die Eigenschaft, dass

$$\int |\psi(t,x)|^2\,\mathrm{d}x = \int |\psi(0,x)|^2\,\mathrm{d}x, \tag{3}$$

d.h. die Norm der Wellenfunktion zeitlich erhalten bleibt.

Aufgabe 1.2: Hermitizität des Impulsoperators

Zeigen Sie, dass für differenzierbare Wellenfunktionen $\phi(x)$ und $\psi(x)$, die für $|x| \to \infty$ gegen Null gehen, gilt

$$\langle \phi | P\psi \rangle = \langle P\phi | \psi \rangle, \tag{4}$$

wobei $P = (\hbar/\mathrm{i})(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)$ der Impulsoperator ist.

Aufgabe 1.3: Wasserstoff-Atom und De-Broglie-Wellenlänge

Die exakten Energieniveaus des Wasserstoffatoms lassen sich auf einfache Weise bestimmen, wenn man annimmt, dass der Umfang eines Elektronenorbitals in einem Wasserstoff-Atom ein ganzzahliges Vielfaches der De-Broglie-Wellenlänge λ betragen muss. Gehen Sie von der klassischen Relation zwischen Radius r und Impuls p (für die Bewegung des Elektrons im Coulomb-Potential des Atomkerns) aus und identifizieren dann $p = h/\lambda$. Leiten Sie auf diese Weise die möglichen Radien und zugehörigen Energieniveaus des Wasserstoffatoms her.

Aufgabe 1.4: Hamilton-Jacobi-Gleichung und WKB-Näherung

(a) Betrachten Sie die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V\psi = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{5}$$

und setzen Sie darin

$$\psi(t,x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}S(t,x)/\hbar}\,. \tag{6}$$

(Dieser Ansatz ist allgemeingültig, wenn $S(t,x)$ komplexe Werte annehmen darf.) Leiten Sie die Differentialgleichung für $S(t,x)$ her und zeigen Sie, dass sich diese im klassischen Limes $\hbar \to 0$ zur Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + V(x) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{7}$$

der klassischen Mechanik vereinfacht.

(b) Setzen Sie in der Differentialgleichung für $S(t,x)$ (bevor der klassische Limes genommen wurde)

$$S(t,x) = W(x) - Et, \tag{8}$$

und leiten Sie die Differentialgleichung für $W(x)$ her. Um diese näherungsweise zu lösen, stellen wir eine Entwicklung in Potenzen von $\hbar$ auf,

$$W(x) = W_0(x) + \hbar W_1(x) + \hbar^2 W_2(x) + \dots \tag{9}$$

Finden Sie die Gleichungen für $W_0(x)$ und $W_1(x)$ durch Einsetzen und Koeffizientenvergleich. Lösen Sie die Gleichung für $W_0(x)$ und geben Sie die allgemeine Lösung der Schrödingergleichung $\psi(t,x)$ in dieser Näherung "nullter Ordnung" an. (Die entsprechende Näherung erster Ordnung in $\hbar$ bezeichnet man als WKB-Näherung nach ihren Begründern Wenzel, Kramers und Brillouin.)

Abgabe am 29.04.2014, vor Beginn der Vorlesung