

Mathematische(-physikalische!)  
Ergänzungen zur Physik I

WS 2000/1

Michael G.Schmidt  
Inst. f. Theoretische Physik der Universität Heidelberg  
69121 Heidelberg, Philosophenweg 16

bearbeitet von

Börge Hemmerling  
Jan Hofmann  
Stefan Vehoff

17. Mai 2005

## Bücherliste

- C.B.Lang, N.Pucker** *Mathematische Methoden in der Physik* (Spektrum Verlag, HTb) (für die Vorlesung besonders empfohlen!)
- M.L.Boas** *Mathematical Methods in the Physical Sciences* (J.Wiley)
- G.B.Arften, H.J.Weber** *Mathematical Methods for Physicists* (Harcourt Acad. Press)
- S.Grossmann** *Mathematische Einführung für die Physik* (Teubner Studienbücher)
- G.Berendt, E.Weimar** *Mathematik für Physiker I,II* (Physikverlag, Weinheim) (2.Band: Elemente der mathematischen Physik, weiterführend)
- H.Fischer, H.Kaul** *Mathematik für Physiker* (Teubner Studienbücher) Analysis I, Algebra I
- S.Flügge** *Mathematische Methoden der Physik I,II* (Springer Verlag) anspruchsvoll
- G.Heber** *Mathematische Hilfsmittel der Physik* (Zimmermann-Neufang)
- J.Honerkamp, H.Römer** *Grundlagen der klassischen Theoretischen Physik* (Springer Studienreihe) Lehrbuch der klassischen Theoretischen Physik auf „einfachem“, jedenfalls kurzem Weg
- P.Bamberg, S.Sternberg** *A course in mathematics for students of physics I,II* (Cambridge University Press) Einführung in die moderne math. Sprache an elementaren Beispielen
- M.R. Spiegel** *Vector analysis* (Schaum-Reihe)

## Tabellenwerke

- M. Ryshik, S. Gradsteyn** *Tables of Integrals, Series and Products*
- I.N.Bronstein, K.A.Semendjajew** *Taschenbuch der Mathematik*

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<i>Differentialgleichungen („gewöhnliche“ DGL)</i>	4
1.1	<i>Begriffe</i>	5
1.2	<i>Gewöhnliche DGL 1. Ordnung</i>	6
1.2.1	<i>Existenz und Eindeutigkeit</i>	6
1.2.2	<i>Lineare DGL 1.Ordnung</i>	7
1.2.3	<i>Seperable DGL 1.Ordnung</i>	11
1.2.4	<i>Gewöhnliche DGL höherer Ordnung</i>	12
<b>2</b>	<i>Komplexe Zahlen; Lösung der Differentialgleichung für den gedämpften harmonischen Oszillator</i>	14
2.1	<i>Komplexe Zahlen</i>	14
2.2	<i>Gedämpfter harmonischer Oszillator ohne und mit Kraftereinwirkung (erzwungene Schwingungen)</i>	18
<b>3</b>	<i>Kurven-, Flächen- und Volumenintegrale</i>	22
3.1	<i>Kurvenintegral, Arbeitsintegral</i>	22
3.2	<i>Flächenintegrale</i>	27
3.3	<i>Volumenintegrale, Flächenintegrale im 3-dimensionalen Raum</i>	34
3.4	<i>Verwendung des Kreuz-Produkts (Bemerkungen)</i>	41
<b>4</b>	<i>Taylorentwicklung von Funktionen und Potenzreihen</i>	43
4.1	<i>Taylorentwicklung von Funktionen einer Variablen</i>	43
4.2	<i>Entwicklung von Funktionen mehrerer Variablen</i>	45
<b>5</b>	<i>Lineare Transformationen, Matrizen, Drehungen, Vektoren, Tensoren</i>	47
5.1	<i>Lineare Transformationen, Matrizen</i>	47
5.2	<i>Lineare Gleichungen</i>	50
5.3	<i>Drehungen</i>	52
5.4	<i>Lorentztransformationen als modifizierte Drehungen</i>	59
<b>6</b>	<i>Wahrscheinlichkeitsverteilung und Fehlerrechnung</i>	62
6.1	<i>Definitionen; Wahrscheinlichkeit; Verteilungsfunktionen; Erwartungswert</i>	62
6.1.1	<i>Axiomatik (Kolmogorow) (kurz, im folgenden nicht wichtig!)</i>	64
6.2	<i>Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen</i>	65
6.2.1	<i>Binomialverteilung (Bernoulli-Verteilung)</i>	65
6.2.2	<i>Poisson-Verteilung</i>	67
6.2.3	<i>Gleichverteilung</i>	68
6.2.4	<i>Normalverteilung (Gauß-Verteilung)</i>	68
6.3	<i>Schätzwert <math>x_0</math>, Zentraler Grenzwertsatz</i>	69
6.4	<i>Fehlerfortpflanzung</i>	72

Diese Bearbeitung meiner Vorlesungsnotizen soll nicht die Mitschrift und auch nicht die Lehrbücher ersetzen.

Übungen sind extrem wichtig, nur im steten Umgang mit den Begriffen eines Gebietes lernt man dieses gründlich kennen. Ihre Zusammenarbeit mit Kommilitonen ist sehr wünschenswert, oft bringen erst Diskussionen die Probleme ans Licht. Fragen in der Vorlesung beleben, Sie sollten sich immer bemühen, aktiv an Veranstaltungen teilzunehmen. Abschreiben/„Scheinstudium“ hilft ihnen nicht, wollen Sie sich so auf ihren Beruf vorbereiten?

Wie auch im von mir empfohlenen „Lang und Pucker“ betont, ist der zwanglose Umgang mit dem Computer für die junge Physikergeneration unumgänglich. Sie sollten sich früh daran gewöhnen, nicht nur numerische Probleme mit dem Computer anzugehen, sondern auch Computer-Algebra (Maple, Mathematica) zu benutzen. Es gibt im übervollen ersten Semester ein Zeitproblem, aber prinzipiell sollten Sie für einen Teil der Übungsaufgaben den Computer zur Hilfe nehmen.

Die Physik ist eine sehr schöne Wissenschaft, ist nicht mehr in den Gründerjahren, hat einen Fundus wohlverstandener Gebiete - trotzdem: wo immer Sie genauer hinschauen, bleiben Fragen. Die Methoden der Physik werden heute auf ganz anderen Gebieten angewandt, sie sind eine solide Grundlage, auch wenn man auf Probleme der Wirtschaft ... Biochemie losgeht. Es ist gut einige Dinge gründlich zu verstehen, das gibt Fundament und das nötige Selbstvertrauen; natürlich kann man nicht alles auf einmal verdauen, lebenslang arbeitet man an einem - dann hoffentlich immer dichter werdenden - Netzwerk. Oft ist es effektiver, eine Sache einmal „richtig“ zu verstehen als zum x-ten Male oberflächlich über eine Sache zu hören und dabei unnötige Berührungsgänge aufzubauen - das geht aber leider nicht immer, man muß flexibel sein - dies ist die Hauptsekundärtugend des Physikers!

Nun speziell zu dieser Vorlesung: Sie haben zwei große Vorlesungen in Mathematik, gehalten von Professoren („Bekennern“) der Mathematik. Dies soll Sie ohne Abstriche mit den Beweismethoden und der Diktion der Mathematik vertraut machen - so die alte Tradition des Physikstudiums (worüber man trotzdem streiten kann ...). Allerdings sollten Sie sich als Physiker vom ersten Semester an ernsthaft mit Physik beschäftigen. Dies erfordert eine Menge Mathematik, zwar nicht sehr anspruchsvoll aber doch weit über das (mit hohem Anspruch) in den Anfänger-Mathematikvorlesungen gebotene hinausgehend. Die Mathematik ist die Sprache des Physikers - nicht nur des theoretischen Physikers. Letzteres ist eine Spezialisierung, die sich erst sehr spät herausgebildet hat. Die Entwicklung der Physik und der Mathematik gingen historisch Hand in Hand. Die Mathematik erlaubt es dem Physiker, viele Phänomene einheitlich zu beschreiben, physikalische Sätze zu formulieren. Physik kann man nicht auswendig lernen, man muß die Denkweise und Methodik durch Anwendung auf eine Kette von Problemen kennenlernen; die zugehörige Mathematik muß im Kern verstanden sein, Auswendiglernen irgendwelcher Formeln allein hilft überhaupt nicht. Dies ist für viele Studenten erfahrungsgemäß eine schwere Aufgabe. Aber es ist wie mit der Mathematik schon in der Schule: lassen Sie keine Berührungsgänge aufkommen und üben ... üben Sie! Hierzu soll diese Vorlesung dienen. Sie ist anders als eine Mathematikvorlesung aufgebaut: keine strenge Beweistechnik, Erklären der notwendigen Begriffe und Rechnen! Für eine saubere Ausarbeitung im Sinne der Mathematik müssen Sie lange auf fortgeschrittene Vorlesungen warten. Die Vorlesung ist also kein Ersatz für Math.-Vorlesungen. Sie soll es Ihnen ermöglichen, der Experimentalphysik-Vorlesung und (ab 3. Semester) den theoretischen Physik-Vorlesungen zu folgen und Übungsaufgaben zu lösen. Regelmäßige Nacharbeit empfiehlt sich sehr.

Michael G. Schmidt

# Kapitel 1

## *Differentialgleichungen* („gewöhnliche“ DGL)

**Kinematik:** Ort in Abhängigkeit von der Zeit

$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$  kartesischer Koordinaten-Vektor  $\Rightarrow$  zur Einfachheit zunächst 1-dim.  $x(t)$

- Geschwindigkeit  $v(t) = \frac{dx}{dt}$  („ $\dot{x}$ “)
- Beschleunigung  $a(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$  („ $\ddot{x}$ “)

sind **differentielle** Größen ( $\leadsto$  Newton, für die Mechanik eingeführt!)

**Dynamik:** Newtonsche Bewegungsgleichung

$\frac{d}{dt}(m v(t)) = m \frac{d^2}{dt^2} x(t) = F(x(t), \dot{x}(t))$  keine höheren Ableitungen! (Kraft  $F$  in Abhängigkeit von Ort und Geschwindigkeit sei bekannt!)

ist **Differentialgleichung**, enthält unbekanntes  $x(t)$  (z.B. Planetenbewegung mit Newtons Gravitationskraft)

**Bemerkung:** für „punktförmiges Teilchen“ mit Masse  $m$ :

dies ist ein theoretisches Modell bei Fragestellungen, bei denen die typische Länge  $d$  viel größer ist als die Ausdehnung des massiven Körpers  $D_m$ :  $d \gg D_m$  und bei denen keine weiteren Freiheitsgrade (Drehimpuls-Spin) im Spiel sind.  $\left(\frac{d}{D_m} - \text{Korrektur}\right)$   
z.B.

- Planeten ( $r \gg D_{\text{Planet}}$ ) - Paradebeispiel der klassischen Mechanik!
- Elementarteilchen, Atome, Ionen (sind auch **nicht** ideal punktförmig)

**aber hier:**

relativistische Mechanik falls  $v$  groß:  $\frac{v}{c} \not\ll 1$   
Quantenmechanische Effekte

**trotzdem:**

idealer „Testgrund“ für Gültigkeit der (rel.) Mechanik, da viele  $10^{(\dots)}$  Umläufe im Beschleuniger ...

### grundsätzliches zu Modellen/Theorien in der Physik:

- theoretisches (mathematisches) Modell nicht verifizierbar
  - kann nicht  $\sqrt{2}$  vom „Pythagoras“ auf beliebig viele Stellen messen  
(- andererseits hat schon Gauß durch Dreiecksmessungen im Harz die euklidische Geometrie in Frage gestellt!)
  - aber falsifizierbar
- Jedes Modell (bisher: keine TOE „Theory of everything“) hat Anwendungsgrenzen

### allgemeiner:

Gleichungen, die Differentiation einer gesuchten unbekanntem Funktion enthalten, heißen Differentialgleichungen (DGL).

(i.a. wird es sich um Funktionen mehrerer Variablen handeln, dann muß man sagen, nach welchen Variablen differenziert wird → partielle Ableitung (später), partielle Differentialgleichung)

## 1.1 Begriffe

„gewöhnliche“ DGL: eine unabhängige Variable (oben: t)  
eine abhängige Variable (oben: x)

$$f\left(y^{(n)}(x), y^{(n-1)}(x), \dots, y'(x), y(x), x\right) = 0$$

ist eine DGL n-ter Ordnung mit  $y^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} \dots$

i.a. gibt es mehrere Lösungen. Diese sind eingeschränkt durch zusätzliche Bedingungen: **Anfangswerte**

z.B. bei Newtonscher Gleichung - 2.Ordnung - kann  $x(t_0), v(t_0) = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_0}$  vorgeben.

- Falls  $y(x)$  mit Ableitungen nur linear auftritt: **lineare DGL**
- lineare DGL ohne Term, der  $y$  nicht enthält: **homogene DGL**
- DGL's n-ter Ordnung lassen sich auf ein **DGL-System 1.Ordnung** reduzieren für

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_0(x) \\ \vdots \\ y_{n-1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} y'_{n-2} = y_{n-1}; & \dots & y'_1(x) = y_2; & y'_0(x) = y_1 \\ f(y'_{n-1}(x), y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_0 = y, x) = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{(Anfangsbed.} \\ y_0(x_0) = y(x_0) = \bar{y} \\ y_1(x_0) = y^{(1)}(x_0) = \bar{y}^{(1)} \\ \vdots \\ y_{n-1}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0) = \bar{y}^{(n-1)} \quad \text{mit n Parametern)} \end{array}$$

## 1.2 Gewöhnliche DGL 1. Ordnung

### 1.2.1 Existenz und Eindeutigkeit

allgemeine Form: 
$$\begin{array}{l} y'(x) = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2 \quad \text{„Gebiet“}$$

Satz von Picard:

[Wenn  $f(x, y)$  in  $D$  stetig und  $\frac{\partial f}{\partial y}$  (halte  $x$  fest, differenziere nach  $y$ ) in  $D$  stetig, gibt es eine eindeutige Lösung  $\leadsto$  viel Arbeit mit Abschätzungen in der Mathematik!]

Anschauliche Interpretation von Lösungen einer DGL 1. Ordnung:

Zeichne „Ableitungsfeld“: bei jedem  $(x, y)$  eine „kleine“ Gerade mit der Steigung  $f(x, y)$

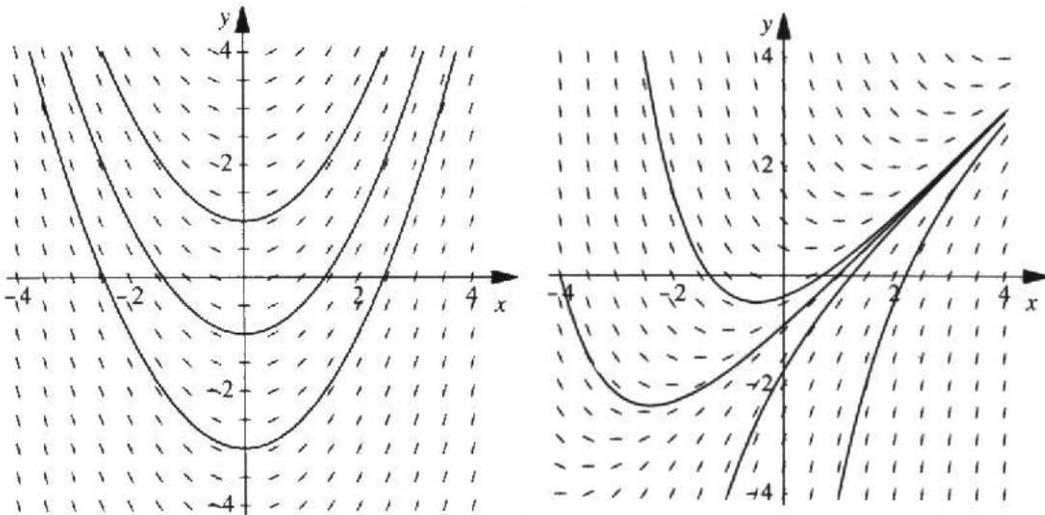
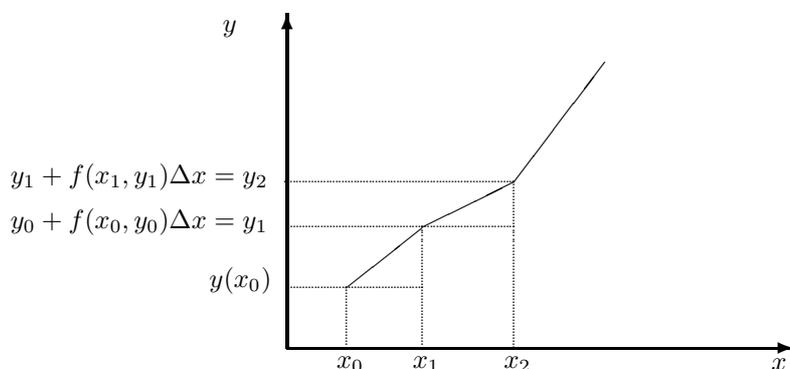


Abbildung 1.1: Ableitungsfelder (Lang, Pucker)

Zeichne glatte Kurven; die Geradensegmente zu verbinden stellt für „anständige“ Funktionen (Physikerjargon) kein Problem dar.

## „Naive“ Lösung (per Computer)

Einteilung  $x_0, x_1, x_2, \dots$  mit konstantem  $\Delta x_i = \Delta x$



Stabilität der Lösung bei Variation der Anfangsbedingungen

~> Chaostheorie ... numerische Stabilität

### 1.2.2 Lineare DGL 1. Ordnung

$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$ $y(x_0) = y_0$	(ist für $b \neq 0$ inhomogene Gleichung)
--	---

- speziell  $a(x) = 0$  :

$$y' = b(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = b(x) \quad \left( \Rightarrow dy = b(x)dx \right)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \frac{dy}{dx} = \int_{x_0}^{x_1} dx b(x) \quad \Rightarrow \quad \int_{y(x_0)}^{y(x_1)} dy = \int_{x_0}^{x_1} dx b(x)$$

$x_1 = x :$	$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x dx' b(x')$
-------------	--

- speziell  $b(x) \equiv 0$  :

$$y' = a(x)y(x)$$

$$\frac{dy}{dx} \frac{1}{y(x)} = a(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = a(x) dx \quad \text{„Separation der Variablen“}$$

(Fixiere „Integrationskonstante“)

$$\int_{x_0}^x dx \frac{dy}{dx} \frac{1}{y} = \int_{x_0}^x dx' a(x')$$

$$\int_{y_0}^y \frac{dy}{y} = \int_{x_0}^x dx' a(x')$$

$$\ln y - \ln y_0 = \int_{x_0}^x dx' a(x')$$

exponentieren

$$y(x) = y_0 \exp\left(\int_{x_0}^x dx' a(x')\right)$$

$e^{\ln y} = y$  !

[**Beispiel** Hagen-Poiseuille'sches Gesetz

$$v_{\perp} = 0$$

$$v_{\perp \max} \rightarrow$$

Druck  $\Delta p$  über Länge  $L$

laminare Strömung

$$\begin{aligned} F_R &= \eta A \frac{dv(r_{\perp})}{dr_{\perp}} \quad \text{mit } A = 2 \pi r_{\perp} L \quad (\text{Reibungsfläche}) \\ &= \Delta p \pi r_{\perp}^2 \end{aligned}$$

$$\eta A \frac{dv(r_{\perp})}{dr_{\perp}} = \Delta p \pi r_{\perp}^2$$

$$\int_0^{v(r_{\perp})} dv(r_{\perp}) = \int_R^0 \frac{\Delta p}{\eta 2 \pi r_{\perp} L} \pi r_{\perp}^2 dr_{\perp}$$

$$v(r_{\perp}) = \frac{\Delta p}{4 \eta L} (R^2 - r_{\perp}^2)$$

$$d\left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right) = 2 \pi r_{\perp} dr_{\perp} v(r_{\perp}) \quad \text{Integration (obiger Fall } a(x) \equiv 0)$$

Durchfluß/Zeit durch „Ring“

$$\text{Integration} \quad \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\pi \Delta p}{2 \eta L} \int_0^R dr_{\perp} r_{\perp} (R^2 - r_{\perp}^2) = \frac{\pi \Delta p}{8 \eta L} R^4$$

„Hagen-Poiseuille“]

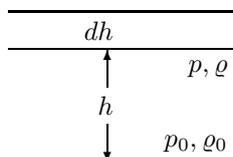
**Beispiel** radioaktiver Zerfall

$$\frac{dN}{dt} \quad \left( = \dot{N} \right) = -\frac{1}{\tau} N ; \quad N(t_0) = N_0$$

$$\int_{N_0}^N \frac{dN'}{N'} = -\frac{1}{\tau} \int_{t_0}^t dt' \quad \text{Trennung der Variablen}$$

$$\begin{aligned} \ln N - \ln N_0 &= -\frac{(t - t_0)}{\tau} \\ N &= N_0 e^{-(t-t_0)/\tau} \end{aligned}$$

**Beispiel** barometrische Höhenformel (Gerthsen)



$$dp = -\varrho g dh$$

konst. Temperatur  $\rightarrow pV = \text{const.} = p_0V_0$  (ideales Gas)  
 konst. Masse  $M = \varrho V$   $\frac{p}{\varrho} = \frac{p_0}{\varrho_0}$

$$\rightarrow dp = -\frac{\varrho_0}{p_0} p g dh \rightarrow \int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = - \int_0^h \frac{\varrho_0}{p_0} g dh \quad \text{Trennung der Variablen}$$

$$\rightarrow \boxed{p = p_0 e^{-\frac{\varrho_0}{p_0} g h}}$$

**Bemerkung:**

- **Differentialschreibweise** ist nichts schmutziges! Ist im Rahmen der **Differentialgeometrie** (siehe auch Bücher von P. Bamberg, Sh. Sternberg) (Begriff des Tangentialraums etc.) sauber beschrieben.
- In obigem haben wir immer die **bestimmte Integration** angewandt und dabei schon den Anfangswert  $y(x_0) = y_0$  eingearbeitet.
- Manchmal sucht man die allgemeine Lösung ohne Angabe des Anfangswertes, hat dann einen freien Parameter, diesen kann man später durch Einbau der  $y(x_0) = y_0$  Bedingung festlegen. In diesem Fall benutzt man unbestimmte Integration („Stammfunktion“)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= b(x) \\ \int dy &= \int dx b(x) \\ y &= \int dx b(x) + C \\ &= F(x) + C \\ y(x_0) &= F(x_0) + C \stackrel{!}{=} y_0 \\ &\Rightarrow C = -F(x_0) + y_0 \\ y &= F(x) - F(x_0) + y_0 \end{aligned}$$

- volle DGL (inhomogen, linear)

$$y' = a(x)y + b(x); \quad y(x_0) = y_0 \quad (*)$$

zwei Lösungsverfahren:

- (a) „Variation der Konstanten“

löse die homogene Gleichung ( $b \equiv 0$ )

$$y(x) = y_0 \exp \left( \underbrace{\int_{x_0}^x dx' a(x')}_{A(x)} \right)$$

und mache Lösungsansatz (!)

$$y(x) = c(x) \exp(A(x))$$

einsetzen in (\*):

$$\begin{aligned} c(x) \underbrace{A'(x)}_{a(x)} e^A + c'(x)e^A &= a(x) c(x) e^A + b(x) \\ c'(x) &= b(x) e^{-A} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Anfangsbed.: } (x = x_0) \\ y(x_0) = y_0 \\ \Rightarrow c(x_0) = y_0 \end{array} \right\} c(x) = y_0 + \int_{x_0}^x dx' b(x') e^{-A(x')}$$

$$y(x) = \left[ y_0 + \int_{x_0}^x dx' b(x') \exp \left( - \int_{x_0}^{x'} a(x'') \right) \right] \exp \left( + \int_{x_0}^x a(x') \right)$$

- (b) Lösung als Summe von Lösung der homogenen Gleichung plus spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

Nur DGL. (keine Anfangsbedingungen):  $y' = a(x)y + b(x)$

sei  $y^{\text{inh}}(x)$  Lösung („speziell“) dieser inhomogenen Gleichung  
 und  $y^{\text{hom}}(x)$  Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung,  
 dann ist  $y^{\text{hom}}(x) + y^{\text{inh}}(x)$  allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung.

Probe:

$$\begin{aligned} (y^{\text{hom}})' + (y^{\text{inh}})' &= a(x) (y^{\text{hom}} + y^{\text{inh}}) + b(x) \\ \text{mit } (y^{\text{hom}})' &= a(x) y^{\text{hom}} \quad (y^{\text{inh}})' = a(x) y^{\text{inh}} + b(x) \end{aligned}$$

Die Anfangsbedingung legt dann die Freiheit bei der homogenen Lösung fest.

### Beispiel

$$\begin{aligned}
 y' &= y + 1, & y(0) &= 0 \\
 y^{\text{inh}} &= -1 & & \text{(einfache spezielle Lösung)} \\
 (y^{\text{hom}})' &= y^{\text{hom}} & y^{\text{hom}} &= ce^x \\
 \rightarrow y &= y^{\text{hom}} + y^{\text{inh}} = ce^x - 1 \\
 y(0) &= c - 1 = 0 & \rightarrow c &= 1
 \end{aligned}$$

### 1.2.3 Separable DGL 1. Ordnung

i.a. nicht linear:

$y' = a(x)b(y) \quad ; \quad y(x_0) = y_0$	$a(x)$ stetig $b(y)$ stetig diff'bar im Gebiet D
--	---

(i) speziell:  $b(y_0) = 0 \rightarrow y = y_0$  Lösung

(ii)  $b(y_0) \neq 0 \quad \frac{dy}{dx} = a(x)b(y)$

$b(y) \neq 0$  im Gebiet D

$$\underbrace{\int_{y_0}^y \frac{dy'}{b(y')}}_{F(y) - F(y_0)} = \underbrace{\int_{x_0}^x a(x') dx'}_{A(x) - A(x_0)} \quad \text{„Trennung der Variablen“}$$

mit Stammfunktionen  $F(y), A(x)$

$$y = F^{-1}(F(y)) = \underbrace{F^{-1}(F(y_0) + A(x) - A(x_0))}_{\text{Lösung}}$$

### Beispiel

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= y' = 2xy^2, & y(0) &= y_0 > 0 & \text{(Spezialfall der Riccati-Gleichung)} \\
 \int_{y_0}^y \frac{d\tilde{y}}{\tilde{y}^2} &= \int_{x_0}^x d\tilde{x} (2\tilde{x}) \\
 -\frac{1}{\tilde{y}} \Big|_{y_0}^y &= x^2 \Big|_{x_0=0}^x \\
 \leadsto -\frac{1}{y} + \frac{1}{y_0} &= x^2 - \underbrace{x_0^2}_{=0} \\
 -\frac{1}{y} &= x^2 - \frac{1}{y_0} \\
 y &= -\frac{1}{x^2 - \frac{1}{y_0}} = \frac{y_0}{1 - y_0 x^2}
 \end{aligned}$$

Umkehrfunktion ist in diesem Fall wieder  $F$ !

### 1.2.4 Gewöhnliche DGL höherer Ordnung

hier nur ein paar Hinweise und vorbereitende Bemerkungen zum nächsten Kapitel:

- lassen sich (s.o.) auf DGL-System 1. Ordnung zurückführen  $\leadsto$  i.a. kompliziert, analytische Verfahren zu finden, aber leicht mit Computer zu behandeln
- **lineare** DGL höherer Ordnung:

Insbesondere Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten - dafür ist Exponentialansatz wichtig

#### Beispiel

$$\begin{aligned} y'' &= cy, \quad (c > 0) \quad \text{Ansatz: } y = y_0 e^{\alpha x} \\ \alpha^2 y_0 e^{\alpha x} &= y_0 e^{\alpha x} \\ \alpha^2 &= c \quad \alpha = \pm\sqrt{c} \end{aligned}$$

wollen nun  $y'' = -y$  lösen:  $A \cos x + B \sin x$  ist Lösung!

eleganter: wieder Ansatz  $y = A e^{\alpha x} \rightarrow A \alpha^2 e^{\alpha x} = -A e^{\alpha x}$  ;  $\alpha^2 = -1$

Führt auf **komplexe Zahlen!**

konkreter:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx(t)$$

„harmonischer Oszillator“ (Federschwingung um  $x = 0$ )  
mit  $x(t_0) = x_0$ ;  $\dot{x}(t_0) = v_0$

Ansatz:  $x(t) = x_0 e^{\alpha t}$

$$\leadsto m \alpha^2 = -k \quad ; \quad \alpha = \sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{zwei Lösungen der homogenen Gleichung})$$

hier  $x(t) \Rightarrow z(t)$  komplex

$$z(t) = a e^{i \sqrt{\frac{k}{m}} t} + b e^{-i \sqrt{\frac{k}{m}} t}$$

ist allgemeine komplexe Lösung mit komplexen  $a, b$

speziell:  $a \rightarrow a, \quad b \rightarrow ib$  mit  $a, b$  reell; dann

$$\text{Re } z(t) \stackrel{\text{„Euler“}}{=} a \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + b \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi\right) \quad \text{ist allgemeine reelle Lösung}$$

lege  $a, b$  durch  $x(t_0) = x_0$ ;  $\dot{x}(t_0) = v_0$  fest. (bzw.  $x_0, \varphi$ )

**Bemerkung:** alternativ bei Rückführung auf DGL-System 1.Ordnung:

$$\begin{aligned}
 y'(x) &= y^{(1)}(x) \\
 \left(y^{(1)}(x)\right)' &= -y(x) \\
 \left(\begin{array}{c} y(x) \\ y^{(1)}(x) \end{array}\right)' &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(x) \\ y^{(1)}(x) \end{pmatrix} \\
 \text{mit Ansatz } \left(\begin{array}{c} y(x) \\ y^{(1)}(x) \end{array}\right) &= \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} e^{\alpha x} \\
 \text{folgt } \alpha \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} e^{\alpha x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} e^{\alpha x} \\
 \text{Eigenwert } \rightarrow \alpha \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \leftarrow \text{Eigenvektor} \quad (\text{auch hier ist nat\u00fcrlich} \\
 & \hspace{15em} \alpha \text{ imagin\u00e4r})
 \end{aligned}$$

Eigenwertproblem  $\Rightarrow$  lineare Algebra

**Bemerkung:**

Anfangsbedingungen nur eine M\u00f6glichkeit, die DGL enth\u00e4lt keine „Kausalit\u00e4t“  
(betrachte auch: Invarianz unter Zeitumkehr ( $t \rightarrow -t$ ) !)

$$\begin{array}{l}
 \text{z.B. auch m\u00f6glich} \quad \left\{ \begin{array}{l} x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0 + T) = v_0 \end{array} \right. \\
 \text{oder} \quad \left\{ \begin{array}{l} x(t_0 + T) = x_0 \\ \dot{x}(t_0 + T) = v_0 \end{array} \right. \text{ etc.}
 \end{array}$$

**Bemerkung:** Differentialgleichung

- betrachte Verh\u00e4ltnisse im (lokalen) Tangentialraum; in diesem Sinne: Linearisierung  
einfacher mit globaler Linearisierung wie in der Schule:  $U = RI$ ;  $x = vt$ ;  $v = bt$ ; Dreisatz ...
- L\u00f6sung der DGL enth\u00e4lt noch freie Parameter, die durch Zusatzbedingungen (s.o.) festgelegt werden
- nehmen „glatte“ (stetig, stetig diff'bar) Funktionen an  $\rightsquigarrow$  „klassische Physik“ ist Modell („Theorie“) mit begrenztem Anwendungsbereich.
  - im mikroskopischen Bereich (Quantenphysik):  
**fluktierende** Bahnen („Feynman-Pfad-Integral“ Formulierung)!
  - auch: in der Thermodynamik, stat. Mechanik.

DGL's kennzeichnen den Weg der sog. exakten Naturwissenschaften. Nach Experimenten werden Gleichungen, hier meist DGL im grundlegenden Teil, formuliert, die dann das theoretische Fundament bilden.

## Kapitel 2

# *Komplexe Zahlen; Lösung der Differentialgleichung für den gedämpften harmonischen Oszillator*

(eine sehr praxisorientierte Einführung; grundsätzlicher in der Mathematik!)

### 2.1 Komplexe Zahlen

Lösung der quadratischen Gleichung

$$x^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = -b/2 \pm \underbrace{\left( (b/2)^2 - c \right)^{1/2}}_{D:\text{Diskriminante}} \quad (\leadsto \text{„quadr. Ergänzung“})$$

falls  $D < 0$ : keine Lösung!

**Will** immer Lösungen („Hauptsatz der Algebra...“)

**Nenne**  $\underbrace{\sqrt{(-1)}}_{\text{„pos.“ Wurzel}} = i$  und rechne weiter wie mit reellen Zahlen

$$\boxed{i^2 = -1}$$

$\boxed{z = x + iy}$ ,  $z$  ist komplexe Zahl mit **Realteil**  $-b/2$  und **Imaginärteil**  $\pm\sqrt{D}$

wie gesagt: **rechne** wie mit reellen Zahlen („Körper“)

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\ z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(y_1x_2 + x_1y_2) \end{aligned}$$

**konjugiert komplexes**  $\bar{z} = x - iy$  ( $\bar{z}$  auch „ $z^*$ “ (Spiegelung an x-Achse))

$$z \bar{z} = \bar{z} z = x^2 + y^2 = |z|^2 \text{ ist reell, } |z| \text{ ist } \mathbf{Betrag} \text{ von } z$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

**Polarkoordinaten:**

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad x + iy = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots$$

Taylorentwicklung bei  $\varphi = 0$

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots$$

**Einschub: Taylorentwicklung** (siehe auch Kapitel 5)

Allgemein gilt:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} \Delta x + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=x_0} \Delta x^2 + \dots \text{ (oft lässt man } \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_{x=x_0} \text{ weg)}$$

$f$  ausgedrückt durch Ableitungen bei  $x_0$

„Operator“-Schreibweise:

$$f(x_0 + \Delta x) = 1 + \Delta x \frac{d}{dx} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2}{dx^2} + \dots = \exp \left( \Delta x \frac{d}{dx} \right) f(x) \Big|_{x=x_0}$$

mit  $\frac{df}{dx} = \left( \frac{d}{dx} \right) f$   
(mache aus Funktion  $f$  neue Funktion  $\frac{df}{dx}$  !)

**Fortsetzung**

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r \left( 1 + i\varphi + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{4!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \dots \right)$$

(mit  $i^2 = -1, i^4 = 1$ )

$$\stackrel{!}{=} r e^{i\varphi}$$

$$\boxed{\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}} \quad \text{Euler-Formel}$$

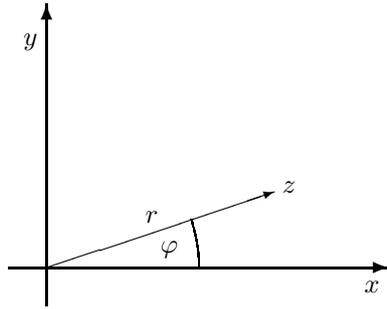
**Definition:**

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \stackrel{!}{=} \sqrt{r^2} = r$$

$$(z = r e^{i\varphi}, \bar{z} = r e^{-i\varphi})$$

mit  $\bar{i} = -i$

$r$  ist **Betrag**,  $\varphi$  die **Phase** von  $z$



**Bemerkung:**  $e$ -Funktion  $\exp(x)$  definiert durch

$$\frac{d}{dx} \exp(x) = \exp(x) \quad \text{mit } \exp(0) = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_1} \frac{\exp(x_1 + x_2)}{\exp(x_1)} &= \dots 0 \quad \text{Quotientenregel} \quad \rightsquigarrow \exp(x_1 + x_2) = \underbrace{f(x_2)}_{\text{nur von } x_2 \text{ abh. Konstante}} \exp(x_1) \\ &= c \exp(x_2) \exp(x_1) \quad , \text{ da sym. in } x_{1,2} \\ c &= 1 \quad \text{wegen } \exp(0) = 1 \\ e^x &\equiv \exp(x) \end{aligned}$$

„umgekehrt“

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varphi} (e^{i\varphi}) &= i e^{i\varphi} \\ \frac{d}{d\varphi} (\cos \varphi + i \sin \varphi) &= \frac{d}{d\varphi} \cos \varphi + i \frac{d}{d\varphi} \sin \varphi \\ &= i \cos \varphi + \underbrace{(i^2)}_{-1} \sin \varphi \end{aligned}$$

**vergleiche** Real und Imaginärteile

$$(z_1 = z_2, \quad \text{genau wenn } x_1 = x_2, y_1 = y_2) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varphi} \cos \varphi &= -\sin \varphi \\ \frac{d}{d\varphi} \sin \varphi &= \cos \varphi \end{aligned}$$

mit  $z_{1,2} = r_{1,2} e^{i\varphi_{1,2}}$  folgt „Additionstheorem“

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 \underbrace{e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}}_{\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)} = r_1 r_2 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ \Rightarrow \cos(\varphi_1 + \varphi_2) &= \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \\ \sin(\varphi_1 + \varphi_2) &= \dots \end{aligned}$$

es gilt  $e^{2\pi i n} = 1!$

Wir gehen nicht auf „Funktionentheorie“ ein, d.h. Theorie der komplexwertigen Funktionen auf **komplexer** Ebene - die Krönung der Analysis und für ein tieferes Verständnis der math. Physik unumgänglich! hier nur  $z(t)$ : komplexwertige Funktion von **reellen** Zahlen.

Algebraische Gleichungen **höherer** Ordnung:

$$\begin{aligned} \text{z.B. } z^3 &= 1 \\ (re^{i\varphi})^3 &= r^3 e^{3i\varphi} = 1 \\ \leadsto r^3 = 1, r = 1 & \quad ; \quad 3i\varphi = 0, 2\pi i, 4\pi i \quad \text{bzw. } -2\pi i \end{aligned}$$

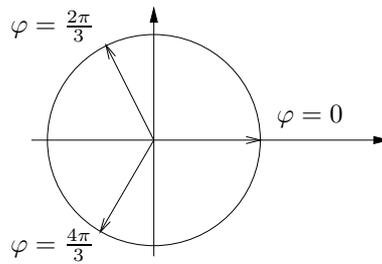


Abbildung 2.1: Kubikwurzel aus 1 im Komplexen

## 2.2 Gedämpfter harmonischer Oszillator ohne und mit Krafteinwirkung (erzwungene Schwingungen)

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \underbrace{-kx(t)}_{\substack{\text{Federkraft} \\ \text{(Hookesches} \\ \text{Gesetz)}}} - \underbrace{\gamma \frac{dx(t)}{dt}}_{\substack{\text{Dämpfung} \\ \text{Reibung}}} + \underbrace{F(t)}_{\substack{\text{äußere} \\ \text{Kraft}}} \quad (*)$$

ist inhomogene (F!) lineare DGL 2. Ordnung mit **konstanten** Koeffizienten.

(a) **ohne äußere Kraft**  $F(t) \rightsquigarrow$  homogene DGL

$$\text{Ansatz } x(t) = x_0 e^{At} \rightarrow m A^2 x_0 e^{At} = -k x_0 e^{At} - \gamma A x_0 e^{At}$$

$$A^2 + \frac{\gamma}{m} A + \frac{k}{m} = 0$$

$$A_{1,2} = -\frac{\gamma}{2m} \pm \left( \left( \frac{\gamma}{2m} \right)^2 - \underbrace{\frac{k}{m}}_{\text{def. } \omega_0^2} \right)^{1/2}$$

(i) **starke Dämpfung**  $\frac{\gamma}{2m} > \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$x(t) = B \exp \left\{ \left( -\frac{\gamma}{2m} + \left( \left( \frac{\gamma}{2m} \right)^2 - \frac{k}{m} \right)^{1/2} \right) t \right\} + C \exp \left\{ \left( -\frac{\gamma}{2m} - \left( \left( \frac{\gamma}{2m} \right)^2 - \frac{k}{m} \right)^{1/2} \right) t \right\}$$

bestimme freie Konstanen  $B, C$  aus  $x(t_0) = x_0$  ,  $\frac{dx}{dt}(t_0) = v_0$

(ii) **schwache Dämpfung**  $\frac{\gamma}{2m} < \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$A_{1,2}$  sind komplex!

**Trick:** nehme  $x(t)$  als Realteil (bzw. Imaginärteil) einer komplexen Variablen  $z(t) = x(t) + iy(t)$ , schreibe DGL für  $z(t)$ . Da die Koeffizienten der DGL  $m, k, \gamma$  reell sind, ist die ursprüngliche DGL der Realteil (Imaginärteil) dieser DGL; Differentiation ist nach reellem t:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + i \frac{dy}{dt}$$

Dann **allgemeine Lösung** der komplexen DGL  $\frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{k}{m}z(t) - \frac{\gamma}{m}\frac{dz(t)}{dt}$ :

$$z(t) = z_{01} \exp \left\{ \left( -\frac{\gamma}{2m} + i \left( \frac{k}{m} - \left( \frac{\gamma}{2m} \right)^2 \right)^{1/2} \right) t \right\} \\ + z_{02} \exp \left\{ \left( -\frac{\gamma}{2m} - i \left( \frac{k}{m} - \left( \frac{\gamma}{2m} \right)^2 \right)^{1/2} \right) t \right\}$$

mit  $z_{01} = |z_{01,2}| e^{i\varphi_{01,2}}$

$$\operatorname{Re} z(t) = x(t) = |z_{01}| e^{-\frac{\gamma}{2m}t} \cos \left( \left( \omega_0^2 - \left( \frac{\gamma}{2m} \right)^2 \right)^{1/2} t + \varphi_{01} \right) \\ + |z_{02}| e^{-\frac{\gamma}{2m}t} \cos \left( - \left( \omega_0^2 - \left( \frac{\gamma}{2m} \right)^2 \right)^{1/2} t + \varphi_{02} \right)$$

beide Teile haben gleiche Form ( $\cos(-x) = \cos(x)$ !)

$\leadsto$  allgemeine reelle Lösung

$x(t) =  z_0  e^{-\frac{\gamma}{2m}t} \cos \left( \left( \omega_0^2 - \left( \frac{\gamma}{2m} \right)^2 \right)^{1/2} t + \varphi_0 \right)$ <p style="text-align: center;">Umrechnung <math>\stackrel{=}{=}</math></p> $+ B e^{-\frac{\gamma}{2m}t} \cos \left( \left( \omega_0^2 - \left( \frac{\gamma}{2m} \right)^2 \right)^{1/2} t \right) \\ + C e^{-\frac{\gamma}{2m}t} \sin \left( \left( \omega_0^2 - \left( \frac{\gamma}{2m} \right)^2 \right)^{1/2} t \right)$
---

also wieder zwei Parameter  $|z_0|, \varphi$  bzw.  $B, C$ , die aus  $x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = v_0$  zu bestimmen sind.

(iii) **asymptotischer Grenzfall (Kriechfall)**  $\frac{\gamma}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$

$A = -\frac{\gamma}{2m}$ ; gewinne 2.Lösung aus 1.Lösung durch Variation der Konstanten, oder mache gleich Ansatz

$$(a + bt) e^{At} \\ (A^2(a + tb) + 2A b) = -\frac{k}{m}(a + tb) - \frac{\gamma}{m}(A(a + tb) + b) \\ \underbrace{b(2A + \frac{\gamma}{m})}_{=0} = 0 \quad \text{für beliebige } b$$

$a, b$  wieder durch Anfangsbedingungen bestimmt!

(b) **mit äußerer Kraft**  $F(t)$ ; diese sei harmonisch:  $F(t) = F_0 \cos \omega t$  (später (Fouriertransformation) werden wir in solche Kraftkomponenten zerlegen können)

Lösung der DGL. (\*) als Summe der allgemeinen homogenen Lösung (s.o.) + spezielle inhomogene Lösung.

Für größere  $t$  klingt die Schwingung ohne äußere Kraft ab (homogene Lsg.); Stoß regelmäßig an, zwingt dem System die Frequenz der äußeren Kraft auf. („stationärer Fall“)

Lösungsansatz in komplexer DGL mit  $F(t) = F_0 e^{i\omega_F t}$

$$\begin{aligned}
 z(t) &= z_0 e^{i\omega_F t} \\
 \text{DGL } \leadsto -\omega_F^2 z_0 &= -\frac{k}{m} z_0 - i \frac{\gamma}{m} \omega_F z_0 + \frac{F_0}{m} \quad (\text{nach Kürzung der } e^{i\omega_F t} \text{ Terme}) \\
 z_0 &= \frac{F_0}{m} \underbrace{\left( \frac{k}{m} - \omega_F^2 + i \frac{\gamma}{m} \omega_F \right)^{-1}}_{r e^{i\varphi}, \text{ „Euler“}} \\
 r &= \left( \left( \frac{k}{m} - \omega_F^2 \right)^2 + \frac{\gamma^2}{m^2} \omega_F^2 \right)^{1/2} \\
 \tan \varphi &= \frac{y}{x} = \gamma \frac{\omega_F}{m} / \left( \frac{k}{m} - \omega_F^2 \right)
 \end{aligned}$$

$x(t) = \text{Re}z(t) = \text{Re} (z_0 e^{i\omega_F t}) = \frac{F_0}{m} \frac{\cos(\omega_F t - \varphi)}{\left[ (\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + \frac{\gamma^2}{m^2} \omega_F^2 \right]^{1/2}}$	mit $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$
--	--------------------------------

- Resonanzphänomene ( $\leadsto$  Exp. Vorlesung)
- Phasenverschiebung ( $\leadsto$  s.u., Exp. Vorl.)

$z(t)$  : umlaufender Zeiger in komplexer Ebene mit Kreisfrequenz  $\omega = \left(\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2\right)^{1/2}$   
 $x(t)$  : **Projektion** auf  $x$ -Achse

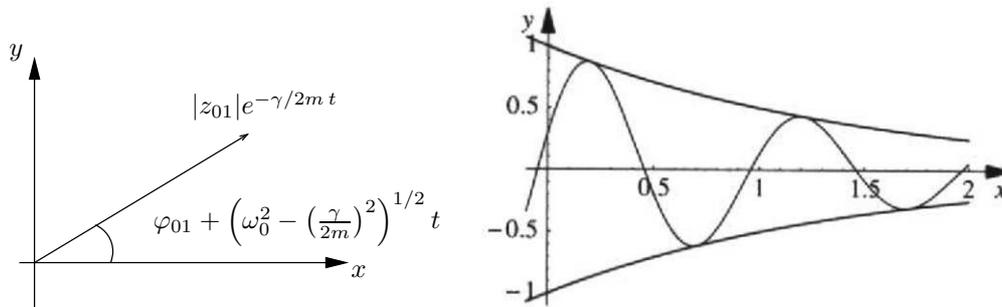


Abbildung 2.2: Zeigerlänge exponentiell gedämpft

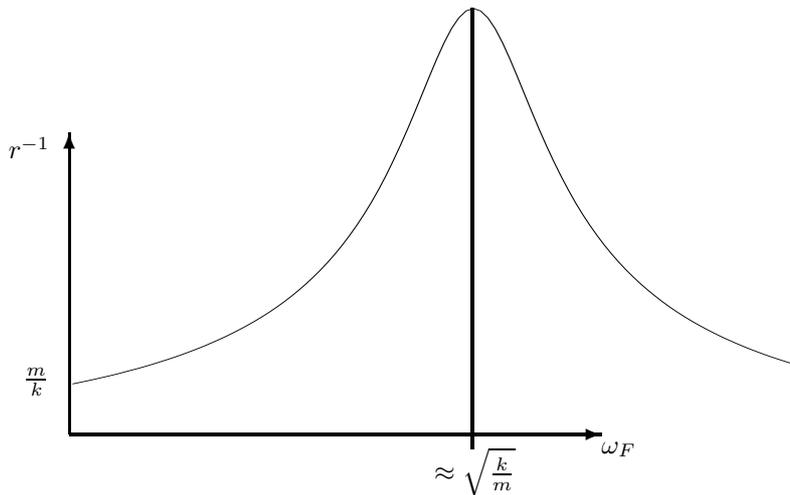
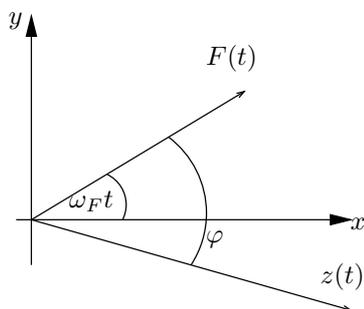


Abbildung 2.3: Resonanz

**erzwungene** Schwingung nach Einschwingvorgang (bei schwacher Dämpfung)



$\varphi > 0$  für  $\frac{k}{m} > \omega_F^2$  („klein“)

$\varphi < 0$  für  $\frac{k}{m} < \omega_F^2$  („groß“)

„Phasenverschiebung“: Bewegung hinkt Kraft hinterher  
 $\rightsquigarrow$  vgl. Exp. Physik

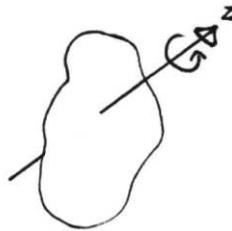
Abbildung 2.4: Phasenverschiebung

# Kapitel 3

## *Kurven-, Flächen- und Volumenintegrale*

Motivation hier besonders leicht: in der Experimentalphysikvorlesung häufig solche Objekte:

- Arbeitsintegral  $\int \vec{F} \cdot d\vec{s}$  über Weg in der Punktmechanik
- starrer Körper, Kontinuumsmechanik: Volumen, Trägheitsmoment um Achse z



### 3.1 *Kurvenintegral, Arbeitsintegral*

a)  $\int_a^b dx f(x)$  ist Grenzwert einer Summe  $\sum \Delta x_n f(x_n)$ , wir integrieren über die x-Achse

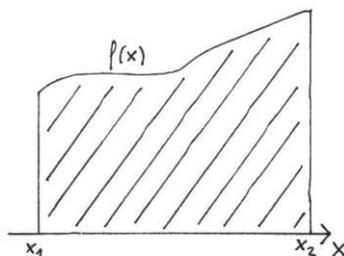
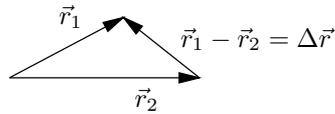


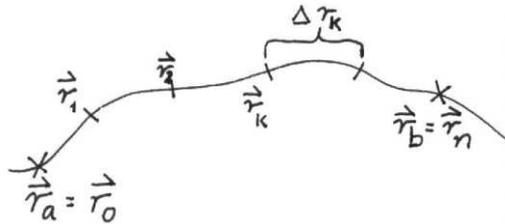
Abbildung 3.1: Integral über  $f(x)$  von  $x_1$  bis  $x_2$

betrachten nun allgemeinen Weg im dreidimensionalen Raum, d.h. **Raumkurve**:  
Einzelne Punkte auf der Kurve werden durch **Ortsvektoren**  $\vec{r}$  beschrieben, sind an

einem willkürlich gewählten „Ursprung“  $O$  angeheftet. **Abstandsvektoren**  $\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$  sind die eigentlichen Vektoren.



- (i) Zerlege das Wegstück von  $\vec{r}_a$  nach  $\vec{r}_b$  in kleine Teilstücke durch Einführung einer Punktkette  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{n-1}$ . Der Weg ist nun durch ein Polygon mit Vektoren  $\Delta\vec{r}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}$  angenähert.



- (ii) Berechne auf Teilstücken diverse Ausdrücke, insbesondere

- Arbeit einer Kraft  $\vec{F}(\vec{r})$  auf Teilstück  $\Delta\vec{r}_i$ : approximiere  $\vec{F}(\vec{r})$  durch  $\vec{F}(\vec{r}_i)$ ,  $\Delta A_i = \Delta\vec{r}_i \cdot \vec{F}(\vec{r}_i)$
- Länge des Wegstücks  $\Delta s_i = (\Delta\vec{r}_i \cdot \Delta\vec{r}_i)^{1/2}$

- (iii) Summiere über alle  $i$ -Beiträge

z.B. Arbeit:  $A_n = \sum_{i=1}^n \Delta\vec{r}_i \cdot \vec{F}(\vec{r}_i)$

Weglänge:  $S_n = \sum_{i=1}^n (\Delta\vec{r}_i \cdot \Delta\vec{r}_i)^{1/2}$

- (iv) Mache die Einteilung feiner, d.h. nehme  $n \rightarrow \infty$ , wobei jedes Teilstück beliebig klein wird, und berechne den  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum$  der Summe. Dies ist das **Wegintegral**.

z.B. für Arbeitsintegral

$$A = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (|\Delta\vec{r}_i| \rightarrow 0)}} \sum_{i=1}^n \Delta\vec{r}_i \cdot \vec{F}(\vec{r}_i) = \underbrace{\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r})}_{\text{Schreibweise: hängt i.a. nicht nur von Endpunkten, sondern vom vollen Weg ab}}$$

b) **Wegparameter** (zur konkreten Ausrechnung des Wegintegrals!)

**1-dim.** Kurve:  $\vec{r}(\sigma)$

verschiedene Bedeutungen von  $\sigma$ , z.B.

- $\sigma = t$  Zeit(Physik)
- $\sigma = x$  , falls  $y = y(x); z = z(x)$  eindeutig (besonders nützlich im 2-dim.)
- $\sigma = s$  Weglänge( $\rightsquigarrow$  Math.)

$\Delta s = |\Delta\vec{r}| = (\Delta\vec{r} \cdot \Delta\vec{r})^{1/2} \rightsquigarrow$  später berechne  $s$  aus  $\vec{r}(\cdot)$

mit  $\vec{r}(\sigma) : \quad \Delta \vec{r} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta \sigma} \Delta \sigma$

$$\begin{aligned} \sum_i \Delta \vec{r}_i &= \sum_i \frac{\Delta \vec{r}_i}{\Delta \sigma_i} \Delta \sigma_i \\ n \rightarrow \infty : \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} d\vec{r} &= \int_{\sigma_a}^{\sigma_b} d\sigma \frac{d\vec{r}}{d\sigma} \\ \vec{r}(\sigma) = \begin{pmatrix} x_1(\sigma) \\ x_2(\sigma) \\ x_3(\sigma) \end{pmatrix} ; \quad \frac{d\vec{r}}{d\sigma} &= \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{d\sigma} \\ \frac{dx_2}{d\sigma} \\ \frac{dx_3}{d\sigma} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das Integral über  $\sigma$  ist wieder ein wohlbekanntes Integral über die Variable  $\sigma$ ! z.B.

für Arbeitsintegral

$$\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \int_{\sigma_a}^{\sigma_b} d\sigma \cdot \underbrace{\frac{d\vec{r}}{d\sigma} \cdot \vec{F}(\vec{r}(\sigma))}_{\frac{dx_1}{d\sigma} F_1(\vec{r}(\sigma)) + \frac{dx_2}{d\sigma} F_2(\vec{r}(\sigma)) + \frac{dx_3}{d\sigma} F_3(\vec{r}(\sigma))}$$

Wechsel zwischen verschiedenen Parametrisierungen:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= f(\sigma) \\ \int_{\sigma_a}^{\sigma_b} d\sigma \dots &= \int_{\bar{\sigma}_a}^{\bar{\sigma}_b} d\bar{\sigma} \frac{d\sigma}{d\bar{\sigma}} \rightsquigarrow \text{Substitutionsregel} \\ \bar{\sigma}_a = f(\sigma_a) \quad , \quad \bar{\sigma}_b = f(\sigma_b) \end{aligned}$$

### c) Beispiele

- freier Fall mit horizontaler Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$

$$x = v_0 t \quad \text{Parameter } t \text{ (Zeit)}$$

$$y = \frac{1}{2} g t^2$$

$$z = 0$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} v_0 \\ gt \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ mg \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \int_0^t dt' \frac{d\vec{r}}{dt'} \cdot \vec{F} = \int_0^t m g^2 t' dt' = \frac{1}{2} m g^2 t^2 = m g y \quad \text{von der Schwerkraft geleistete Arbeit}$$

auch Parameter  $x$ :

$$y = \frac{1}{2} g \left( \frac{x}{v_0} \right)^2$$

$$\frac{d\vec{r}}{dx} = \begin{pmatrix} 1 \\ gx/v_0^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \int_0^x dx' \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dx'} \cdot \vec{F}}_{mg^2 x'/v_0^2} = \frac{1}{2} m g^2 \frac{x^2}{v_0^2} = m g y$$

- **Bogenlänge**

zunächst mit Parameter  $t$   $\int_{t_0}^{t_1} dt \sqrt{\left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2} = s$

z.B. obige **Parabel**

$$\left. \begin{array}{l} \int_0^t dt' \sqrt{(v_0)^2 + g^2 t'^2} \\ \int_0^x dx' \sqrt{1 + \frac{g^2 x'^2}{v_0^4}} \end{array} \right\} \text{ nach Substitution gleich!}$$

bzw

$$\dots \frac{g}{v_0^2} \sqrt{\frac{v_0^4}{g^2} + x'^2} \quad \xrightarrow{\text{Bronstein}} \quad \text{etwas komplizierte Integration}$$

- einfacher: **Kreisbogen**

$$\vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \frac{d\vec{r}}{d\varphi} = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi \\ R \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$s = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi \sqrt{\left( \frac{d\vec{r}}{d\varphi} \right)^2} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi R \sqrt{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}$$

$$= R(\varphi_1 - \varphi_0)$$

- **Schraubenlinie**

$$\vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ a\varphi \end{pmatrix} ; \quad \frac{d\vec{r}}{d\varphi} = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi \\ R \cos \varphi \\ a \end{pmatrix}$$

$$s = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi \sqrt{(R^2 \sin^2 \varphi + R^2 \cos^2 \varphi) + a^2} = \sqrt{R^2 + a^2}(\varphi_1 - \varphi_0)$$

- **Arbeitsintegral**

$$\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \int_{t_a}^{t_b} dt \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{F}(\vec{r}(t)) \quad (\leadsto \text{Übungen})$$

**Bemerkung zu Vektoren  $\vec{r}, \Delta\vec{r}, \vec{v}, \dots$**

- zunächst sind Vektoren (wie in der Math.) abstrakt - genügen den Vektorraumaxiomen (Add., Skalarmult.) mit innerem Produkt.  
Haben Basisvektoren  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ , aus denen sich ein beliebiger Vektor  $\vec{v}$  linear kombinieren lässt

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3$$

Besonders einfach: Orthonormalsystem  $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = \delta_{ik}$ ; die  $v_i$  bezeichnen die

**Komponenten** [für  $\vec{r} = \sum_{i=1}^3 x_i \vec{e}_i$ ;  $x_i$  sind kartesische Koordinaten] des

Vektors. Bei Physikern wird der Vektor oft durch seine Komponenten beschrieben.

$$\vec{r} = (x_1, x_2, x_3) \text{ bzw. } \vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ (Zeilenvektor, Spaltenvektor gebildet aus Koeffizienten)}$$

- Ortsvektor  $\vec{r}$  und endliche Differenzen  $\Delta\vec{r}$  spielen nur im euklidischen Raum eine Rolle - nicht z.B. auf der Kugeloberfläche.  
infinitesimale Vektoren  $d\vec{r}, \dots$  sind im Tangentialraum, deshalb viel allgemeiner,  $\rightsquigarrow$  z.B. allgemeine Relativitätstheorie in gekrümmten Räumen.

### 3.2 Flächenintegrale

a) betrachten zunächst Flächen in Ebene ( $x - y$ )

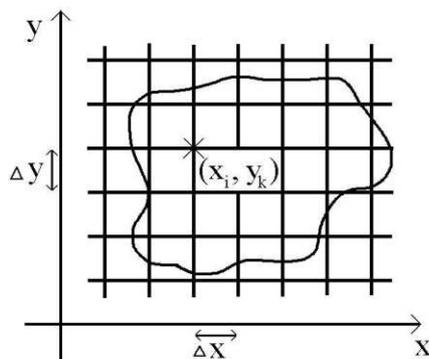


Abbildung 3.2: Gitternetz über bel. Fläche

- überziehe Ebene mit Raster („Gitter“)  $\leadsto x_i, y_k$
- Fläche der Rechtecke ist  $\Delta x \Delta y$
- berechne Funktion  $\varphi(x, y)$  an einem Punkt des jeweiligen Rechtecks (z.B. Mitte, linke Ecke, ...)
- summiere über alle Rechtecke
  - , die voll in der Fläche liegen (Untersumme)
  - , die wenigstens teilweise die Fläche überlappen (Obersumme)

$$(*) \quad \sum_{i,k} \Delta x \Delta y \varphi(x_i, y_k)$$

- nehme den Limes  $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \sum_{i,k} \Delta x \Delta y \varphi(x_i, y_k)$$

(haben uns hier das Leben leicht gemacht: „Äquipartition“) schreiben Grenzen für  $i, k$  nicht aus!

$$= \int_F dx dy \varphi(x, y) \quad \text{„Flächenintegral über } \varphi(x, y)\text{“}$$

In (\*) haben wir noch nicht über die Reihenfolge (beliebig) der Summation befunden, z.B. erst über  $k$  ( $y$ -Richtung), dann über  $i$  ( $x$ -Richtung); die einzelnen Summen kennen wir aus der gewöhnlichen Riemann-Summe, die zum Integral führt:

$$\sum = \sum_i \Delta x \sum_{\underline{\underline{k}}} \Delta y \varphi(x_i, \underline{\underline{y_k}})$$

Im Limes  $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$  erhalten wir dann ein doppeltes Integral; nicht ohne Grund haben wir die Grenzen der  $i, k$  bisher nicht geschrieben; entsprechende Probleme für

die Grenzen des Doppelintegrals im allgemeinen Fall.  $\leadsto$  konkret: Rand der Fläche sei durch zwei Kurven begrenzt:

$$y = f_0(x) \text{ und } y = f_1(x) \text{ mit } f_1(x) \geq f_0(x) \text{ und } f_1(x) = f_0(x) \text{ für } x = x_0, x_1$$

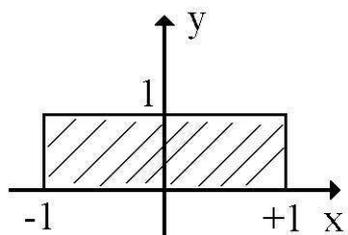
dann

$$\int_F dx dy \varphi(x, y) = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{f_0(x)}^{f_1(x)} dy \varphi(x, y)$$

die  $x$ - und  $y$ -Integrale sind beide normale Integrale!

### Beispiele

- F sei Rechteck

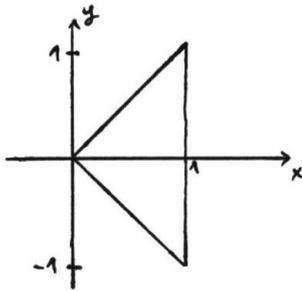


$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \cos(x + y) \\ \int_F dx dy \cos(x + y) &= \int_{-1}^1 dx \underbrace{\int_0^1 dy \cos(x + y)}_{\sin(x+y)|_{y=0}^{y=1}} \\ &= \int_{-1}^1 dx (\sin(x + 1) - \sin(x)) \\ &= \cos(x + 1) \Big|_{-1}^1 - \cos x \Big|_{-1}^1 \\ &= \cos(2) - \cos(0) - \cos(1) + \cos(-1) \\ &= -1 + \cos(2) \end{aligned}$$

hier gleiches Ergebnis leicht auch durch  $\int_0^1 dy \int_{-1}^1 dx \cos(x + y)$ !

- F sei Dreieck

$$\int_F dx dy \sin(x + y) = \int_0^1 dx \int_{-x}^{+x} dy \sin(x + y)$$



$$\begin{aligned}
 &= - \int_0^1 dx \left\{ \cos(x+y) \right\}_{y=-x}^{y=+x} \\
 &= - \int_0^1 dx \left\{ \cos(2x) - \cos(0) \right\} \\
 &= - \left( \frac{\sin(2x)}{2} - x \cos(0) \right) \Big|_0^1 = \dots
 \end{aligned}$$

schon bei einfachen Beispielen klar: **oft** Parametrisierung der Fläche durch kartesische Koordinaten nicht ideal!

- Schwerpunktsberechnung von Flächen mit homogener Massenbelegung  $\rho$

$$\vec{r}_s = \frac{\rho \Delta z \int df \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{\rho \Delta z F}$$

hierbei kann es praktisch sein, in andere Koordinaten umzurechnen!

$$\begin{aligned}
 df &= dx dy \\
 df &= r dr d\varphi \quad \text{etc. } (\leadsto \text{Übungen!})
 \end{aligned}$$

### Bemerkungen

- Das Flächenintegral ohne „Belegung“ ist aus der Schule bekannt:

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{f_0(x)}^{f_1(x)} dy = \int_{x_0}^{x_1} dx (f_1(x) - f_0(x))$$

- **Beispiel** für Flächenintegral mit Funktion  $\varphi(x, y)$   
 $\leadsto$  Hagen-Poiseuillesches Gesetz:  
 Integral über Querschnittfläche (Kreisfläche)  
 $\varphi(x, y) \sim (R^2 - r_{\perp}^2) = (R^2 - (x^2 + y^2))$  also besser in Polarkoordinaten!
- die wenigsten Flächenintegrale können Sie analytisch berechnen! Der Physiker (u. auch Mathematiker) will grundsätzlich die Begriffe klären, heute gibt es natürlich auch die Möglichkeit numerisch auf dem Computer auszuwerten!

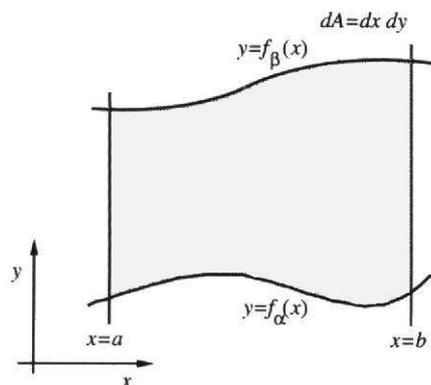


Abbildung 3.3: Flächenintegral über eine durch  $f_\alpha$  und  $f_\beta$  begrenzte Fläche (Lang, Pucker)

**(b) 2-dim. Fläche in allgemeinen Koordinaten**

- (α) Allgemeiner wird Fläche aufgespannt durch zwei Richtungsvektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ ,  $\varphi_{\vec{a},\vec{b}} \leq \pi$

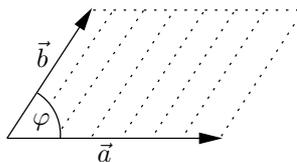


Abbildung 3.4: Fläche, aufgespannt durch zwei Richtungsvektoren

Vorzeichen der von  $\vec{a}, \vec{b}$  aufgespannten Fläche ist positiv, wenn man beim Drehen von  $\vec{a}$  nach  $\vec{b}$  über die Fläche gegen den Uhrzeigersinn geht. Bezeichnungswiese für **Fläche**:  $F(\vec{a}, \vec{b})$ ,  $\vec{a} \wedge \vec{b}$

**Definierende** Beziehung für Fläche („äußeres Produkt“)

- (i)  $\vec{a} \wedge \vec{b}$  ist **bilinear** in  $\vec{a}, \vec{b}$

$$\begin{aligned} (\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2) \wedge \vec{b} &= \lambda_1 \vec{a}_1 \wedge \vec{b} + \lambda_2 \vec{a}_2 \wedge \vec{b} \\ \vec{a} \wedge (\lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2) &= \lambda_1 \vec{a} \wedge \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{a} \wedge \vec{b}_2 \end{aligned}$$

- (ii)  $\vec{a} \wedge \vec{a} = 0$  sehr einleuchtend für Fläche

$$\rightsquigarrow (\vec{a} + \vec{b}) \wedge (\vec{a} + \vec{b}) = 0 \stackrel{!}{=} \vec{a} \wedge \vec{a} + \vec{b} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{b} \wedge \vec{a}$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}} \quad \text{antisymmetrisch}$$

mit kartesischen Koordinaten

$$\begin{cases} \vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 \\ \vec{b} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 \end{cases} \quad (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0; \vec{e}_1^2 = \vec{e}_2^2 = 1)$$

$$\begin{aligned}\vec{a} \wedge \vec{b} &= (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2) \wedge (b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2) \\ &= a_1 b_1 \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_1 + a_2 b_2 \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_2 + a_1 b_2 \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 + a_2 b_1 \underbrace{\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1}_{= -\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2} \\ &= (\mathbf{a}_1 \mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_1) \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2\end{aligned}$$

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 \stackrel{\text{Schreibweise}}{=} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{„Determinante“ (eines Zahlenkastens (siehe später (Matrix)))}$$

$$\text{auch: } a_1 b_2 - a_2 b_1 = \sum_{i,k=1}^2 \varepsilon_{ik} a_i b_k$$

„ $\varepsilon$ “ **psilon-Symbol**:  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$ ;  $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = 1$   
 $|\dots|$  = „Betrag der Fläche“

( $\beta$ ) habe nun **allgemeine Koordinaten** in der Ebene

$$\left\{ \begin{array}{l} s = s(x, y) \\ t = t(x, y) \end{array} \right. \text{ bzw. } \left\{ \begin{array}{l} x = x(s, t) \\ y = y(s, t) \end{array} \right\} = \vec{r}(s, t)$$

z.B. Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ \rightarrow r &= (x^2 + y^2)^{1/2} \\ \tan \varphi &= y/x\end{aligned}$$

Abbildung 3.5: Fläche in allgemeinen Koordinaten

neue Linien  $s = \text{const.}; t = \text{const.}$

**s = const.:**

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x \vec{e}_x + y \vec{e}_y \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} &= \frac{\partial x(s, t)}{\partial t} \vec{e}_x + \frac{\partial y(s, t)}{\partial t} \vec{e}_y \\ \text{auch } d\vec{r} \Big|_{s=\text{const.}} &= \frac{\partial x}{\partial t} dt \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial t} dt \vec{e}_y\end{aligned}$$

**t = const.:**

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} &= \frac{\partial x}{\partial s} \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial s} \vec{e}_y \\ d\vec{r} \Big|_{t=\text{const.}} &= \frac{\partial x}{\partial s} ds \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial s} ds \vec{e}_y\end{aligned}$$

**speziell** für die ursprünglichen kartesischen Koordinaten  $x = x(x, y); y = y(x, y)$

$$\begin{aligned} d\vec{r} \Big|_{x=\text{const.}} &= \overbrace{\frac{\partial x}{\partial y} dy}^{=0} \vec{e}_x + \overbrace{\frac{\partial y}{\partial y} dy}^{=1} \vec{e}_y \\ d\vec{r} \Big|_{y=\text{const.}} &= \overbrace{\frac{\partial x}{\partial x} dx}^{=1} \vec{e}_x + \overbrace{\frac{\partial y}{\partial x} dx}^{=0} \vec{e}_y \quad (\text{trivial!}) \end{aligned}$$

dann ist die von  $d\vec{r} \Big|_{x=\text{const.}}$  und  $d\vec{r} \Big|_{y=\text{const.}}$  aufgespannte Fläche

$$d\vec{r} \Big|_{x=\text{const.}} \wedge d\vec{r} \Big|_{y=\text{const.}} = dx dy \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y \quad (\text{„Basis für Fläche“})$$

natürlich (wie gehabt)  $dx dy$ !

Nun in **allgemeinen** Koordinaten:

$$\begin{aligned} &d\vec{r} \Big|_{s=\text{const.}} \wedge d\vec{r} \Big|_{t=\text{const.}} \\ &= \left( \frac{\partial x}{\partial s} ds \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial s} ds \vec{e}_y \right) \wedge \left( \frac{\partial x}{\partial t} dt \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial t} dt \vec{e}_y \right) \\ &= \frac{\partial x}{\partial s} ds \frac{\partial y}{\partial t} dt \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y + \frac{\partial y}{\partial s} ds \frac{\partial x}{\partial t} dt \vec{e}_y \wedge \vec{e}_x \end{aligned}$$

$$= \left( \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} \right) ds dt \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y$$

$$\int dx dy = \int ds dt \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix}$$

Fläche soll von Koordinaten unabhängig sein!  
Grenzen sind umzurechnen!

$$\frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{„Jacobi-Determinante“} \\ \text{entspricht „Substitutionsregel“ (1-dim.):} \\ \int dx = \int dt \left| \frac{dx}{dt} \right| \end{array}$$

**Beispiel** Polarkoordinaten

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \varphi; \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi; \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \varphi; \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r \cos \varphi$$

$$\begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \cos^2 \varphi - (-r \sin^2 \varphi) = r$$

d.h.

$$\int dx dy = \int r dr d\varphi$$

(Grenzen der Integration sind umzurechnen!)

**Bemerkung:** das ist natürlich hier leichter zu bekommen:  
(Polarkoordinaten stehen infinitesimal senkrecht aufeinander)

$$df = dr (r d\varphi) = r dr d\varphi$$

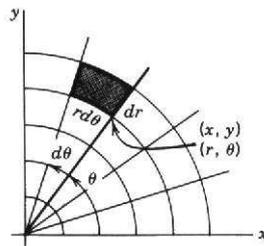


Abbildung 3.6: Flächenelement  $dA = r d\theta dr$  in Polarkoordinaten (Boas)

### Beispiele

(i) Kreisfläche

$$F = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr r = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{R^2}{2} = 2\pi \frac{R^2}{2} = \pi R^2$$

(ii) Trägheitsmoment einer homogenen Kreisplatte mit Achse im Mittelpunkt

$$\begin{aligned} I &= \varrho_0 \Delta z \iint_F dx dy (x^2 + y^2) \\ &= \varrho_0 \Delta z \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr r r^2 \\ &= \varrho_0 \Delta z 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2} \quad \text{mit } M = \varrho_0 \Delta z \pi R^2 \end{aligned}$$

### 3.3 *Volumenintegrale, Flächenintegrale im 3-dimensionalen Raum*

(a) **Volumen sei durch geschlossene Fläche begrenzt** (z.B. Kugeloberfläche)

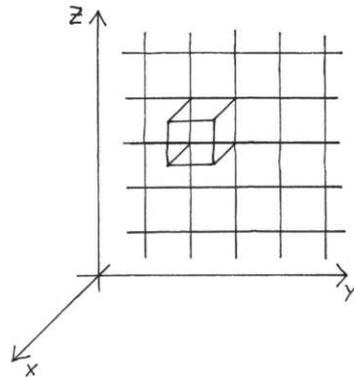


Abbildung 3.7: Quader mit  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$

- zerlege wieder allgemeines Volumen durch Gittereinteilung in Quader mit Kanten  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ ; diese haben Volumen  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$
- summiere über  $\varphi(x_i, y_k, z_l) \Delta x \Delta y \Delta z$
- nehme limes  $\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \sum_{i,k,l} \Delta x \Delta y \Delta z \varphi(x_i, y_k, z_l) = \int_V dx dy dz \varphi(x, y, z)$$

auch durch „Umorganisation“ der Summe

$$\int_V dx dy dz \varphi(x, y, z) = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{g_0(x)}^{g_1(x)} dy \int_{f_0(x,y)}^{f_1(x,y)} dz \varphi(x, y, z)$$

falls sich das Volumen so einfach beschreiben läßt.  
 $\leadsto$  allgemeinere Koordinaten!

z.B. **Kugelkoordinaten** (siehe Abb. 3.8)

wollen allgemeine Koordinaten  $s, t, u$ ! Dazu zunächst:

(b) **allgemeines Volumen**, das von drei Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  aufgespannt wird:

$V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}), \vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c}$  Bezeichnungsweise

**Definierende Beziehungen**

(i)  $\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c}$  trilinear

Spherical coordinates:

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

$$dV = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \, d\phi^2$$

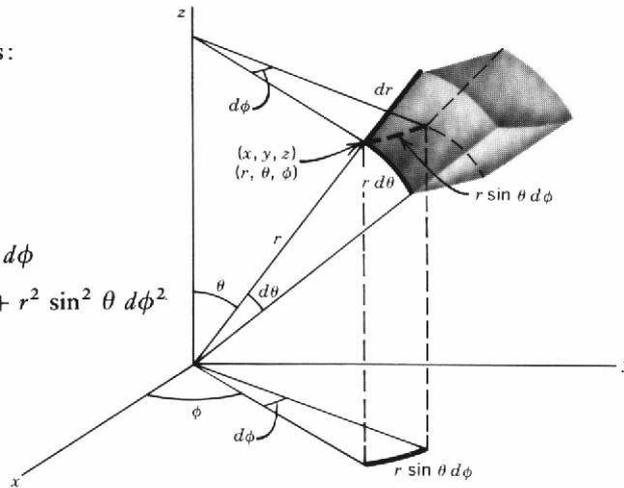


Abbildung 3.8: Kugelkoordinaten (Boas)

- (ii)  $\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c} = 0$ , falls sich einer der drei Vektoren durch die beiden anderen linearkombinieren läßt. (z.B.  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ , oder allgemeiner  $\vec{a} = \lambda_1 \vec{b} + \lambda_2 \vec{c}$ )  
 $\leadsto \vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c} = -\vec{b} \wedge \vec{a} \wedge \vec{c} = -\vec{c} \wedge \vec{b} \wedge \vec{a} = \dots$  (Minuszeichen bei Vertauschung von 2 Faktoren)

„total antisymmetrisch“

In kartesischen Koordinaten

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$$

$$\vec{b} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3$$

$$\vec{c} = c_1 \vec{e}_1 + c_2 \vec{e}_2 + c_3 \vec{e}_3$$

$$\rightarrow \vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c} = \sum_{i,k,l} a_i b_k c_l \vec{e}_i \wedge \vec{e}_k \wedge \vec{e}_l$$

$$= \left( \sum_{i,k,l} a_i b_k c_l \varepsilon_{ikl} \right) \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3$$

$$\text{mit } \begin{cases} \varepsilon_{ikl} = 1 & \text{für } i, k, l \text{ zyklisch} \\ \varepsilon_{ikl} = -1 & \text{antizyklisch} \\ \varepsilon_{ikl} = 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3$  ist das Einheitsvolumen

$$\sum a_i b_k c_l \varepsilon_{ikl} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2$$

ist eine „Determinante“!

$$\text{Es gilt } \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad (\text{Zahlenkasten (Matrix) ist „transponiert“!})$$

(c) **Volumen in allgemeinen Koordinaten**  $s, t, u$

$$\begin{aligned} d\vec{r} \Big|_{t,u=\text{const.}} &= \frac{\partial x}{\partial s} ds \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial s} ds \vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial s} ds \vec{e}_z \\ d\vec{r} \Big|_{u,s=\text{const.}} &= \frac{\partial x}{\partial t} dt \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial t} dt \vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial t} dt \vec{e}_z \\ d\vec{r} \Big|_{s,t=\text{const.}} &= \frac{\partial x}{\partial u} du \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial u} du \vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial u} du \vec{e}_z \end{aligned}$$

**infin. Volumen**

$$\begin{aligned} & d\vec{r} \Big|_{t,u=\text{const.}} \wedge d\vec{r} \Big|_{u,s=\text{const.}} \wedge d\vec{r} \Big|_{s,t=\text{const.}} \\ = & \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial u} \end{vmatrix}}_{\text{Zahlenmäßiges Volumen}} ds du dt \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y \wedge \vec{e}_z \quad (\text{wieder Jacobi-Determinante}) \end{aligned}$$

**Beispiele**

- **Kugelvolumen** (mit  $s = r, t = \vartheta, u = \varphi$ ) (in Abb. 3.8 sind große griechische Buchstaben verwandt)

$$\begin{aligned} \int_{V_{\text{Kugel}}} dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^R dr \underbrace{\begin{vmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -r \sin \vartheta & 0 \end{vmatrix}}_{r^2 \sin \vartheta} \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d(\cos \vartheta) \int_0^R dr r^2 \quad (\sin \vartheta d\vartheta = d(\cos \vartheta)) \\ &= 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^3}{3} \\ &= \frac{4\pi}{3} R^3 \end{aligned}$$

(Warum es sich leicht machen, wenn es schwer besser geht?)

Das infinitesimale Kugelvolumen ergibt sich auch simpel:

$r d\vartheta$  Längen(Groß)kreissegment,  $\varrho d\varphi$  Breiten(Klein)kreissegment

$$\begin{aligned} dV &= dr (rd\vartheta) \varrho d\varphi \quad (\text{„rechtwinklige } r, \vartheta, \varphi \text{ Koordinaten“ im Infinitesimalen!}) \\ &= dr d\vartheta d\varphi r^2 \sin \vartheta \quad \text{mit } \varrho = r \sin \vartheta \end{aligned}$$

- **Trägheitsmoment einer Kugel** (homogen), die um Schwerpunktsachse rotiert (sei  $z$ -Achse)

$$\begin{aligned} & \varrho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \int_0^R dr r^2 \sin \vartheta \overbrace{r^2 \sin^2 \vartheta}^{x^2+y^2} \quad \left( \int_{-1}^1 d \cos \vartheta \underbrace{\sin^2 \vartheta}_{1-\cos^2 \vartheta} = \frac{4}{3} \right) \\ &= 2\pi \varrho_0 \frac{4 R^5}{3 \cdot 5} \\ &= \frac{2}{5} M R^2 \quad \text{mit } M = \varrho_0 \frac{4}{3} \pi R^3 \end{aligned}$$

- **Volumen eines Zylinders** Radius  $R$ , Höhe  $h$   
→ Zylinderkoordinaten:  $r, \varphi, z$

$$\begin{aligned} dV &= r dr d\varphi dz \\ V &= \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr r \\ &= 2\pi \frac{R^2}{2} h \end{aligned}$$

natürlich ist das von uns angegebene Schema allgemeiner!

### Bemerkungen zu allgemeinen Koordinatensystemen

$$\vec{r}(s, t, u): \quad \text{bilde } \left. \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \right|_{t, u = \text{const.}} = \frac{\partial x}{\partial s} ds \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial s} ds \vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial s} ds \vec{e}_z$$

$\frac{\partial \vec{r}}{\partial s}$  liegt in Richtung der neuen „ $s$ -Achse“ (ist eine Kurve!)

$\frac{\partial \vec{r}}{\partial s}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$  geben drei Richtungen an und spannen lokales Basisvektorensystem auf.

Normierung

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} = \underbrace{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \right|}_{\text{„Skalenfaktor } f_s\text{“}} \vec{e}_s \quad (\text{entsprechend normierte } \vec{e}_t, \vec{e}_u)$$

z.B. für **Kugelkoordinaten**  $s, t, u = r, \vartheta, \varphi$  (siehe Abb. 3.8)

$$\begin{aligned} f_r &= (\sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi + \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi + \cos^2 \vartheta)^{1/2} = 1 \\ f_\vartheta &= (r^2 \cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi + r^2 \cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \vartheta)^{1/2} = r \\ f_\varphi &= (r^2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi)^{1/2} = r \sin \vartheta \end{aligned}$$

die  $\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi$  stehen wieder senkrecht aufeinander. Wir haben ein **lokales** Orthonormalsystem - dies ist nicht allgemein so, aber für prominente Koordinaten oft z.B. Kugelkoordinat., Zylinderkoordinat., Paraboloidkoordinat. ...

(d) Allgemeine Flächen im 3-dim. Raum

$$\begin{aligned}
 \vec{a} \wedge \vec{b} &= (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3) \wedge (b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3) \\
 &= \underbrace{a_1 b_2 \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 + a_2 b_1 \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1}_{=(a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2} \\
 &\quad + \dots + \dots \\
 &= (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \\
 &\quad + (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 \quad (\text{beachte zyklische Ordnung!}) \\
 &\quad + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1
 \end{aligned}$$

d.h. Zusammensetzung aus drei Flächen, die von Einheitsvektoren aufgespannt werden! Ordne nun  $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$  den **Flächenvektor**  $\vec{e}_3$  zu (das geht nur im 3-dimensionalen!) und  $\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 \rightarrow \vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 \rightarrow \vec{e}_2$ :  
dann hat  $\hat{a} \wedge \hat{b}$  den Flächenvektor („Igelvektor“)

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{e}_3 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{e}_2$$

mit „Determinantenregel“:

$$= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Wir schreiben dann auch  $\vec{a} \wedge \vec{b}$  als  $\vec{a} \times \vec{b}$  Vektor („Kreuzprodukt“) (wie gesagt geht das nur in 3 dim!)

$\vec{a} \times \vec{b}$  hat natürlich genau die oben aufgeführten Eigenschaften von  $\vec{a} \wedge \vec{b}$ :

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}; \quad \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

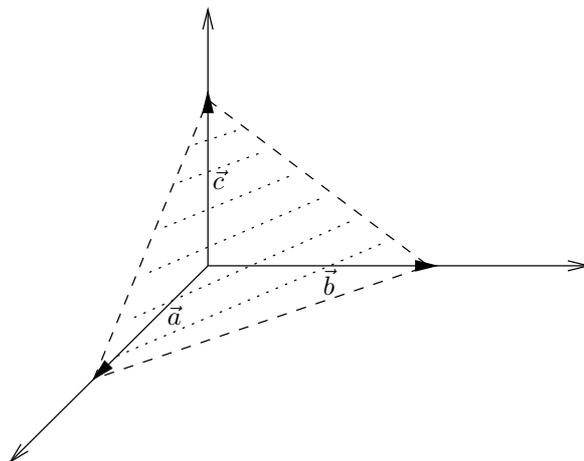


Abbildung 3.9: Flächenvektor als Zusammensetzung der Flächenvektoren in den Koordinatenebenen

**Bemerkung:**

$$\begin{aligned}
 \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ seien } \parallel \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \\
 \vec{F} &= (\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})/2 \\
 &\stackrel{\text{Orthogonalität!}}{=} (\vec{b} \times \vec{c} - \vec{a} \times \vec{c} - \vec{b} \times \vec{a})/2 \\
 &= (\vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b})/2 \\
 &= (b\vec{e}_2 \times c\vec{e}_3 + c\vec{e}_3 \times a\vec{e}_1 + a\vec{e}_1 \times b\vec{e}_2)/2 \\
 &= (bc\vec{e}_1 + ca\vec{e}_2 + ab\vec{e}_3)/2
 \end{aligned}$$

d.h. Flächenvektor ist die **Summe!** der Flächenvektoren der Flächen in den Koordinatenebenen!

**Bemerkung:**

**Volumen:**

$$\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \underbrace{\vec{c}}_{c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3} \quad (\text{„Spatprodukt“})$$

**nachprüfen:**

$$(a_1b_2 - a_2b_1)c_3 + (a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2 \quad \text{die Volumendeterminante}$$

**aufpassen!** nicht  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$  (s.unten)

**Beispiele:**

• **Kugeloberfläche**

$$\left. d\vec{r} \right|_{r,\varphi=\text{const.}} = \frac{\partial x}{\partial \vartheta} d\vartheta \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \vartheta} d\vartheta \vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \vartheta} d\vartheta \vec{e}_z = f_\vartheta d\vartheta \vec{e}_\vartheta \quad \begin{array}{l} \text{mit Einheitvektoren} \\ \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi \\ \text{und Skalenfaktoren} \\ f_\vartheta, f_\varphi \end{array}$$

$$\left. d\vec{r} \right|_{r,\vartheta=\text{const.}} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi \vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \varphi} d\varphi \vec{e}_z = f_\varphi d\varphi \vec{e}_\varphi$$

$$\begin{aligned}
 \left. d\vec{r} \right|_{r,\varphi=\text{const.}} \wedge \left. d\vec{r} \right|_{r,\vartheta=\text{const.}} &= \left( \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) \underbrace{\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y}_{\Rightarrow \vec{e}_z} d\vartheta d\varphi \\
 &+ \left( \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \frac{\partial z}{\partial \varphi} - \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) \underbrace{\vec{e}_x \wedge \vec{e}_z}_{\Rightarrow -\vec{e}_y} d\vartheta d\varphi \\
 &+ \left( \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \frac{\partial z}{\partial \varphi} - \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) \underbrace{\vec{e}_y \wedge \vec{e}_z}_{\Rightarrow \vec{e}_x} d\vartheta d\varphi
 \end{aligned}$$

Der zahlenmäßige Ausdruck für die Fläche - der Betrag des Flächenvektors - ergibt sich dann als  $\left| \left( \left. d\vec{r} \right|_{r,\varphi=\text{const.}} \times \left. d\vec{r} \right|_{r,\vartheta=\text{const.}} \right) \right|$

$$\begin{aligned}
 &= d\vartheta d\varphi \left| \vec{e}_x (R^2 \sin^2 \vartheta \cos \varphi) + \vec{e}_y (R^2 \sin^2 \vartheta \sin \varphi) + \vec{e}_z (R^2 \sin \vartheta \cos \vartheta) \right| \\
 &= R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \text{„df“}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{F_{\text{Kugel}}} df &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta R^2 \sin \vartheta \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d \cos \vartheta R^2 \\
&= 4\pi R^2
\end{aligned}$$

geht natürlich in diesem Fall auch einfacher durch Betrachtung des Flächenelements:

$$\underbrace{R d\vartheta} \cdot \underbrace{\varrho d\varphi} = R R \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

- **Fluß durch Fläche  $\vec{A}$**

Fluß (z.B. Wasser, Gas, ...)  $\vec{j} = \varrho \vec{v} = \frac{\text{Masse}}{\text{Zeiteinheit}}$  ( $\varrho = \text{Dichte}$ ;  $\vec{v} = \text{Flußgeschwindigkeit}$ )  
durch die Einheitfläche mit Richtungsvektor  $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

Fluß  $\Phi$  durch beliebige Fläche  $\vec{A}$ :  $\Phi = \vec{j} \cdot \vec{A}$

später auch für elektromagnetischen Feldfluß wichtig!

### 3.4 Verwendung des Kreuz-Produkts (Bemerkungen)

typisch **3-dim.** Größe  $\vec{a} \times \vec{b}$

(i) gibt von  $\vec{a}, \vec{b}$  aufgespannten Flächenvektor  $\perp$  auf der Ebene

$$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}, \vec{b} \quad \text{„Igelvektor“}$$

(ii) ist für **Drehbewegung** wichtig

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( m \frac{d\vec{r}}{dt} \right) &= \vec{F} \quad \text{Newton} \\ \vec{r} \times \left( m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right) &= \underbrace{\vec{r} \times \vec{F}}_{\text{Drehmoment } \vec{M}} \\ \vec{r} \times m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} &\stackrel{!}{=} \frac{d}{dt} \left( \underbrace{\vec{r} \times \left( m \frac{d\vec{r}}{dt} \right)}_{\vec{p}} \right) + \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \left( m \frac{d\vec{r}}{dt} \right)}_{=0!} \\ \vec{r} \times \vec{p} &: \text{ Drehimpuls } \vec{L} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{r} \times \vec{F}} \quad \text{oder} \quad \boxed{\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{M}}$$

für **Zentralkräfte** ( $\vec{F} \sim \vec{r}$ ) ist rechte Seite 0

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow (\vec{r} \times \vec{p}) &= m \left( \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \vec{c} \quad \text{konstanter Vektor} \\ &= 2m \frac{d\vec{f}}{dt} \quad \text{mit } d\vec{f} = \vec{r} \times d\vec{r}/2 \end{aligned}$$

„Flächensatz“ (in gleichen Zeiten gleiche „Flächen“  $\rightsquigarrow$  Kepler!)

(iii)

$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \times \left( (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) \times (c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3) \right) \\ &= (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \times \left( (b_1c_2 - b_2c_1) \underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}_{\vec{e}_3} + (b_2c_3 - b_3c_2)\vec{e}_1 + (b_3c_1 - b_1c_3)\vec{e}_2 \right) \\ &= \left( a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2) \right) \underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}_{\vec{e}_3} \\ &\quad + \left( a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_2c_3 - b_3c_2) \right) \vec{e}_2 \\ &\quad + \left( \dots \right) \vec{e}_1 \\ &= \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad \text{„bac-cab Regel“} \\ &\quad \text{feiner: Grassmannscher Entwicklungssatz} \end{aligned}$$

auch

$$\begin{aligned}
 (\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}))_i &= \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} a_j (\vec{b} \times \vec{c})_k \\
 &= \sum_{jklm} \varepsilon_{ijk} a_j \varepsilon_{klm} b_l c_m \\
 &\text{mit } \left[ \sum_k \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \right] ! \\
 &= b_i (\vec{a} \cdot \vec{c}) - c_i (\vec{a} \cdot \vec{b})
 \end{aligned}$$

(iv) **Drehbewegung:**  $d\vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}$

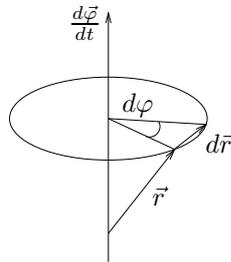


Abbildung 3.10: Drehbewegung

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{r}}{dt} &= \underbrace{\frac{d\vec{\varphi}}{dt}}_{\vec{\omega}} \times \vec{r} \quad (*) \\
 \vec{\omega} &\text{ in Richtung der Drehachse; Winkelgeschwindigkeit} \\
 \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} &= \underbrace{\frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}}_{\text{Winkelbeschleunigung}} \times \vec{r} + \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (*) \text{ einsetzen; bac-cab} \\
 &= \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2} \times \vec{r} + \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \left( \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \cdot \vec{r} \right) - \vec{r} \left( \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \right)^2 \\
 &= \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2} \times \vec{r} + \vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \vec{r} \omega^2
 \end{aligned}$$

(siehe später: infinitesimale Drehungen)

(v) **Drehbewegung von starrem Körper um feste Achse** ( $\leadsto$  Exp. Vorl)

summiere in (ii) und projiziere auf  $\vec{e}_\omega = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} / \left| \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \right|$

$$\begin{aligned}
 \sum_i m_i \vec{r}_i \times \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} &\stackrel{\text{s.o.}}{=} \sum_i m_i \vec{r}_i \times \left[ \ddot{\vec{\varphi}} \times \vec{r}_i + \dot{\vec{\varphi}} (\dot{\vec{\varphi}} \cdot \vec{r}_i) - \vec{r}_i (\dot{\vec{\varphi}})^2 \right] \\
 &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i \\
 \leadsto \text{Entwicklungssatz} \quad \sum_i m_i \underbrace{\ddot{\varphi} (\vec{r}_i^2 - z_i^2)}_{x_i^2 + y_i^2} &= \vec{M} \cdot \vec{e}_z \quad \text{Drehmoment um z-Achse}
 \end{aligned}$$

$$I \ddot{\varphi} = M$$

# Kapitel 4

## *Taylorentwicklung von Funktionen und Potenzreihen*

(„die genauen Regeln des ungenauen Rechnens“ ( $\Rightarrow$  Hüfner))

### 4.1 *Taylorentwicklung von Funktionen einer Variablen*

Funktion  $f(x)$  wird in der Nähe von  $x = x_0$  durch Ableitungen bei  $x_0$  beschrieben, falls  $f$  „glatt“ (diesen Ausdruck mögen Mathematiker nicht!), d.h. Ableitungen stetig.

**Satz (Taylor):**  $f(x)$  sei bei  $x = x_0$   $n$ -fach stetig differenzierbar, dann

$$\rightsquigarrow f(x_0 + \varepsilon) = f(x_0) + \varepsilon f^{(1)}(x_0) + \frac{\varepsilon^2}{2!} f^{(2)}(x_0) + \cdots + \underbrace{\frac{\varepsilon^n}{n!} f^{(n)}(\tilde{x})}_{\text{„Restglied“}}$$

$$\text{mit } x_0 < \tilde{x} < x_0 + \varepsilon \quad \text{und} \quad f^{(n)}(x_0) = \left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{x=x_0}$$

Wichtig ist, daß das Restglied mit  $\frac{\varepsilon^n}{n!}$  eingeht, also für große  $n$  sehr klein wird.

( $\rightsquigarrow$  schätze  $f^{(n)}$  ab ...)

Sehr oft wird nur bis zur Ordnung  $\varepsilon$  entwickelt, d.h. Approximation der Funktion durch Tangente  $\rightsquigarrow$  nützliche Formeln

$f(\varepsilon)$	Approximation	Restglied
$\frac{1}{1+\varepsilon}$	$1 - \varepsilon$	$\varepsilon^2$
$\sqrt{1+\varepsilon}$	$1 + \frac{1}{2}\varepsilon$	$\frac{1}{8}\varepsilon^2$
$(1+\varepsilon)^\alpha$	$1 + \alpha\varepsilon$	$\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\varepsilon^2$
$e^\varepsilon$	$1 + \varepsilon$	$\frac{1}{2!}\varepsilon^2$
$\ln(1+\varepsilon)$	$\varepsilon$	$\frac{1}{2}\varepsilon^2$
$\sin \varepsilon$	$\varepsilon$	$\frac{1}{3!}\varepsilon^3$
$\cos \varepsilon$	$1$	$\frac{1}{2!}\varepsilon^2$

**z.B. :**

$$\begin{aligned}
 E_{\text{rel}} = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} &= \sqrt{m^2c^4} \left(1 + \frac{p^2c^2}{m^2c^4}\right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{p^2c^2}{m^2c^4}\right) + O\left(\frac{p^4}{m^3c^2}\right) = \underbrace{mc^2}_{\text{Ruhenergie}} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{p^2}{m}}_{\text{kinetische Energie}} + \dots
 \end{aligned}$$

Falls die Funktion beliebig oft differenzierbar ist:

$$\begin{aligned}
 f(x_0 + \varepsilon) &= f(x_0) + \dots + \frac{\varepsilon^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \dots \quad \text{„Taylorreihe“} \\
 &= \exp\left\{\varepsilon \frac{d}{dx}\right\} f(x) \Big|_{x=x_0} \quad \text{Operatorschreibweise} \quad (\leadsto \text{dem werden Sie in der Quantenmechanik begegnen!})
 \end{aligned}$$

**Konvergenz** der  $\infty$ -Potenzreihe

$$f(x) = f(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \dots$$

für  $|x-x_0| < r$  „Konvergenzradius“

- kommt aus der Taylorentwicklung für komplexe Funktionen  $f(z)$  ( $\leadsto$  „Funktionentheorie“)
- Konvergenz im Sinne des Cauchy-Kriteriums ( $\leadsto$  Mathematik)

**Beispiel** geometrische Reihe

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots$$

konvergiert für  $|z| < 1$  (alterniert für negative  $z$ ; hier: Konvergenzradius  $r = 1$ )

## 4.2 Entwicklung von Funktionen mehrerer Variablen

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) && \text{Entwicklung bei } (x_0, y_0) \\
 &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) \\
 &\quad + f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\
 &\quad + f(x_0, y_0) \\
 &&& \Delta x, \Delta y \sim \varepsilon \\
 &= \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0+\Delta y}} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \Delta y + \underbrace{o(\Delta x, \Delta y)}_{\substack{\text{klein o} \\ \text{geht stärker als} \\ \Delta x, \Delta y \text{ gegen} \\ \text{Null}}} + f(x_0, y_0)
 \end{aligned}$$

Der erste Ausdruck läßt sich bei  $y = y_0$  (weiter) nach Taylor entwickeln

$$\begin{aligned}
 \rightsquigarrow \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \Delta x \Delta y + \dots &\quad \text{sind höherer Ordnung in } \varepsilon \\
 = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0, y_0} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x_0, y_0} \Delta y + f(x_0, y_0) + o(\Delta x, \Delta y)
 \end{aligned}$$

Differentialschreibweise

$$df_{x_0, y_0} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0, y_0} dx + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x_0, y_0} dy$$

(heißt „totales Differential“)

analog zur Taylorentwicklung: höhere Terme ...

3.) für drei Variablen  $f(x, y, z)$

$$\begin{aligned}
 \Delta f &= \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0, y_0, z_0} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x_0, y_0, z_0} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{x_0, y_0, z_0} \Delta z \\
 &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \quad (\text{inneres Produkt in Matrizenproduktschreibweise}) \\
 &= \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) f \right\} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \quad (\text{Funktionalschreibweise}) \\
 &= \vec{\nabla} f \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \quad (\vec{\nabla} \text{ Nabla - Operator}) \\
 &= (\text{grad } f) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \quad (\text{„Gradient } f\text{“})
 \end{aligned}$$

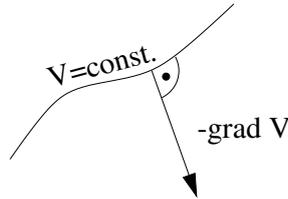


Abbildung 4.1: Gradient von V

z.B. 

$$\vec{F}(x, y, z) = -\text{grad } \underbrace{V(x, y, z)}_{\text{„Potentielle Energie“}}$$
 (s. zweiter Teil der Vorlesung)

Sei  $\vec{F} = -\text{grad } V(x, y, z) = -\vec{\nabla}V$  „konservative“ Kraft

$$\begin{aligned} \rightarrow \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) &= - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} d\vec{r} \cdot \vec{\nabla}V(\vec{r}) \stackrel{\text{s.o.}}{=} \int_{V(\vec{r}_0)}^{V(\vec{r}_1)} dV(\vec{r}) \\ &= V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_0) \quad \text{wegunabhängig;} \\ &\quad V(\vec{r}) \text{ ist eindeutige} \\ &\quad \text{Funktion!} \end{aligned}$$

auf geschlossenem Wege:  $\oint d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \left( \int_I - \int_{II} \right) d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r})$

$$= 0, \quad \text{d.h. konservative Kräfte } (\leadsto \text{zeitun-})$$

abhängig) erlauben nicht die Erzeugung von gespeicherter Arbeit (**potentieller Energie**) auf geschlossenem Wege - kein perpetuum mobile ! (1.Art)

**Bemerkung:**

Die „Differentialform“  $df_{x_0, y_0}$  ist **lineare Abbildung** (Math. lineare Algebra, Lit.

Bamberg, Sternberg) von  $\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$  (Raum  $R_2$ ) auf reelle Zahlen ( $R_1$ )

$$\begin{aligned} df_{x_0, y_0} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} &= \left[ f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \right] \quad \text{linearer Anteil} \\ &= \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} \Delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x_0, y_0} \Delta y \end{aligned}$$

(ist inneres Produkt von  $\left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$  mit  $\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$  ... später)

speziell  $dx \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \Delta x$

( $f = x$ ) also konsistent  $df_{x_0, y_0} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} dx + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x_0, y_0} dy$

Schreibweise wird bei (älteren) Physikern wenig benutzt; oft auch:  $df(x_0, y_0, z_0) \leadsto$  dies verschleiert den Abbildungscharakter.

## Kapitel 5

# *Lineare Transformationen, Matrizen, Drehungen, Vektoren, Tensoren*

### 5.1 *Lineare Transformationen, Matrizen*

speziell: Koordinatentransformation: (hier gleich in n Dimensionen)

$$\begin{aligned} \text{festes } \vec{r} &= \underbrace{\sum_{k=1}^n x_k \vec{e}_k}_{\boxed{1}} \quad \text{im Basissystem } \{\vec{e}_k\} \\ &= \sum_{j=1}^n x'_j \vec{e}'_j \quad \text{im Basissystem } \{\vec{e}'_j\} \end{aligned}$$

entwickle die  $\{\vec{e}'_j\}$  nach dem alten Basissystem  $\{\vec{e}_k\}$

$$\vec{e}'_j = \sum_{k=1}^n a_{jk} \vec{e}_k$$

einsetzen:

$$= \underbrace{\sum_{j=1}^n x'_j \sum_{k=1}^n a_{jk} \vec{e}_k}_{\boxed{2}}$$

Koeffizientenvergleich  $\boxed{1}$  mit  $\boxed{2}$   $\rightsquigarrow$

$$x_k = \sum_{j=1}^n x'_j a_{jk}$$

Matrizenschreibweise für Koordinatentransformation:

$$(x_1, \dots, x_n) = (x'_1, \dots, x'_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

andere Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{umgeklappte (transponierte) Matrix}} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Diese Dinge sind natürlich auch simple Bestandteile der **Linearen Algebra**. Es soll hier nicht versucht werden, dies noch nachzurüsten, wir wollen nur eine gewisse Vertrautheit erwerben.

$$\begin{aligned} \text{Kurzschreibweise: } \underbrace{\vec{x}^T}_{\text{Zeilen}} &= \vec{x}^T A \\ \underbrace{\vec{x}}_{\text{Spalten}} &= A^T \vec{x}' \end{aligned}$$

Dies ist auch für  $\begin{pmatrix} \vec{e}'_1 \\ \vdots \\ \vec{e}'_n \end{pmatrix}$  („Spaltenvektor“) (cum granu salis) anwendbar.

$$\begin{pmatrix} \vec{e}'_1 \\ \vdots \\ \vec{e}'_n \end{pmatrix} = (A) \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vdots \\ \vec{e}_n \end{pmatrix}$$

Hintereinanderausführung zweier Transformationen (lin.):

$$\begin{aligned} \vec{e}_k &\xrightarrow{a} \vec{e}'_j \xrightarrow{b} \vec{e}''_i \\ x_k &\xleftarrow{a} x'_j \xrightarrow{b} x''_i \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \vec{e}'_j &= \sum_{k=1}^n a_{jk} \vec{e}_k \\ \vec{e}''_i &= \sum_{j=1}^n b_{ij} \vec{e}'_j \\ &= \sum_{j,k} b_{ij} a_{jk} \vec{e}_k \\ &= \sum_k c_{ik} \vec{e}_k \end{aligned}$$

$$\text{mit } \boxed{c_{ik} = \sum_j b_{ij} a_{jk}}$$

$c$  ist wieder Transformation (linear)

$$(x_1, \dots, x_n) = (x_1'', \dots, x_n'') \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}^T = \vec{x}''^T BA$$

bzw.  $\vec{x} = (BA)^T \vec{x}''^T$  mit  $(BA)^T = A^T B^T$

**Bemerkung:**

Oft lässt man bei der Summation von doppelt vorkommenden Indizes die Summe weg! (Einsteinkonvention)

$$x_i = a_{ik} x'_k \quad \text{etc.}$$

**Bemerkung:**

Kreuzprodukt ist Matrizenmultiplikation!

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b})_i &= \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} a_j b_k \\ &= \sum_k \underbrace{\left( \sum_j \varepsilon_{ijk} a_j \right)}_{=\tilde{a}_{ik}} b_k \end{aligned}$$

Matrix!  $\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$   
antisymmetrisch!

## 5.2 Lineare Gleichungen

Wir beschränken uns hier der Einfachheit halber auf 3 Variablen.

(i) **homogene** lineare Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \quad \text{kurz} \quad A\vec{x} = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &\longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \\ \vec{b} &\longrightarrow \\ \vec{c} &\longrightarrow \end{aligned}$$

Matrizenmultiplikation:  $\vec{x}$  steht auf  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  senkrecht.

$\leadsto \vec{x} = \vec{0}$  falls  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  linear unabhängig.

Für nichttriviale Lösung müssen  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  linear abhängig sein, d.h. in einer Ebene liegen, d.h. das von ihnen aufgespannte Volumen ist  $= 0$  !

$$\begin{aligned} \left| \text{Volumen} \right| &= \begin{vmatrix} \cdots & \vec{a} & \cdots \\ \cdots & \vec{b} & \cdots \\ \cdots & \vec{c} & \cdots \end{vmatrix} \quad \text{Determinante} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{13} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{31} & \cdots & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{es ist die zur Matrix} \\ A \text{ gehörige Determinante!} \\ \text{"}|A|"} \end{array} \\ &= \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k} \end{aligned}$$

Falls  $|A| = 0$ , läßt sich das Gleichungssystem nichttrivial lösen.

Sei nun o.B.d.A.  $x_1 \neq 0$  (um sicherzustellen, daß nichttriviale Lösung existiert!)

$\leadsto$  löse z.B. die ersten beiden Gleichungen nach  $x_2, x_3$  ( $\leadsto$  Fortsetzung der Diskussion für 2 Variablen ...)

(ii) **inhomogene** lineare Gleichungen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad A\vec{x} = \vec{b}$$

Wir brauchen also " $A^{-1}$ " mit  $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$  (multipliziere auf beiden Seiten mit  $A^{-1}$ )

$$(*) \quad \boxed{A^{-1}A = 1}$$

betrachte dazu „**Determinantenentwicklungssatz**“ (in einfacher Form!)

$$\begin{aligned}
 |A| &= \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k} \\
 &= \sum_i a_{1i} \underbrace{\sum_{j,k \neq i} \varepsilon_{ijk} a_{2j} a_{3k}}_{a_{1i}^{(\text{Minor})} = (-1)^{1+i} \begin{vmatrix} \dots\dots \end{vmatrix}} \\
 &\hspace{15em} \text{Det. der verbleibenden Matrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{11}^{(\text{Minor})} &= \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
 a_{12}^{(\text{Minor})} &= - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\
 a_{13}^{(\text{Minor})} &= \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

entsprechend für  $\sum_j a_{2j} \sum_{i,k \neq j} \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{3k}$  und  $\sum_k a_{3k} \sum \dots$

Anordnung für Matrizenmultiplikation:

$$\sum_k a_{jk} \frac{(a^{(\text{Minor})})^T_{ki}}{|A|} = \delta_{ji}$$

daraus ist abzulesen  $A^{-1} = \frac{a^{(\text{Minor})T}}{|A|}$  „Cramersche Regel“

~> Üben !! Lösen von inhomogenen Gleichungssystemen.  
 ~> Also existiert  $A^{-1}$  nur, falls  $|A| \neq 0$ .

**Bemerkung:**  
 Anwendungen bei homogenen/inhomogenen linearen Differential-Gleichungs-Systemen!  
 Dies wäre in diesem Zusammenhang vielleicht verwirrend:  
 Ansatz:  $\vec{x}(t) = e^{\omega t} \vec{x}(0) \dots \rightsquigarrow$  Reduktion auf algebraisches Problem.

Die Verallgemeinerung der Gleichungssysteme auf n Variablen ist trivial.

**Bemerkung:**  
**Komplexe Zahlen** kann man als spezielle 2x2-Matrizen auffassen:

$$\begin{aligned}
 z = x + iy &\sim x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 i &\sim \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : \quad i^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

### 5.3 Drehungen

(i) Die grundlegenden Gesetze sind in allen Inertialsystemen gleich. Drehungen sind Bestandteil der sog. Galilei-Transformation, die Inertialsysteme ineinander überführen.

Die Gesetze sollten also **Forminvarianz** bei Übergang zu gedrehten Bezugssystemen haben (Koordinatentransformation).

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \sum_k x_k \vec{e}_k = \sum_j x'_j \vec{e}'_j \quad (\text{s.o.}) \\ \vec{e}'_j &= \sum_{k=1}^3 a_{jk} \vec{e}_k \\ x_k &= \sum_{j=1}^3 x'_j a_{jk} \quad (*) \end{aligned}$$

allgemeine lineare Transformationen

#### Drehungen:

Die  $\{\vec{e}_k\}$  und die  $\{\vec{e}'_j\}$  bilden jeweils ein Orthonormalsystem (eine mögliche Definition der Drehungen!).

$$\begin{aligned} (\vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_j) &= \sum_{k,l=1}^3 a_{ik} a_{jl} \underbrace{(\vec{e}_k \cdot \vec{e}_l)}_{=\delta_{kl}} = \sum_{k=1}^3 a_{ik} a_{jk} \\ &\stackrel{\text{Forder.}}{=} \delta_{ij} \\ &\rightsquigarrow \sum_{k=1}^3 a_{ik} (a^T)_{kj} = \delta_{ij} \quad \text{bzw.} \quad AA^T = 1 \end{aligned}$$

Wir nennen dann  $A = D$  (Drehmatrix) mit

$$DD^T = 1$$

also

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_2 \\ \vec{e}'_3 \end{pmatrix} &= (D) \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= (D^T) \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} \boxed{\vec{x} = D^T \vec{x}'} \\ \text{(habe } (*) \text{ transponiert)} \end{matrix} \end{aligned}$$

$$\text{Aus } DD^T = 1 \rightsquigarrow \mathbf{D}^T = \mathbf{D}^{-1} \quad ! \quad ((D^{-1})^T = (D^T)^{-1} = D)$$

„Orthogonale 3x3 Matrix“

Diese Beziehungen lassen sich auch umkehren:

$$\begin{aligned} D^T D(\vec{e}) &= D^T(\vec{e}') \leftarrow (\vec{e}) = D^T(\vec{e}') \\ \underbrace{DD^T}_{=1} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} &= D \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} \boxed{\vec{x}' = D\vec{x}} \end{matrix} \end{aligned}$$

$D^{-1}$  ist entgegengesetzte Drehung!

Drehungen lassen sich durch Winkel (Eulerwinkel) beschreiben  $\leadsto$  Theor. Mechanik.

Leichter zu behandeln sind Drehungen in 2 Dimensionen: ( $\leadsto$  2x2 - Drehmatrizen)

$$\begin{aligned} D &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \\ D^T &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \\ D^T D &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = 1 = D^T D \quad ! \end{aligned}$$

anschauliche Form der 3x3-Drehmatrizen:

$$D = \begin{pmatrix} \vec{x}_1^{(e)} & \vec{x}_2^{(e)} & \vec{x}_3^{(e)} \end{pmatrix}, \text{ wobei die } \{\vec{x}_i^{(e)}\} \text{ ein orthonormales Spaltenvektorsystem bilden}$$

dann gilt  $D^T D = 1$ :

$$\begin{pmatrix} \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

wegen Orthogonalität!

und

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_1^{(e)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x}_1^{(e)} & \vec{x}_2^{(e)} & \vec{x}_3^{(e)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ usw.}$$

d.h.  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  werden durch Drehung in das Orthonormalsystem  $\vec{x}_1^{(e)}, \vec{x}_2^{(e)}, \vec{x}_3^{(e)}$  übergeführt.

(ii) Wir können auch statt Koordinatentransformation („passiver Standpunkt“) **aktiv** das Experiment drehen und sehen, ob wir das gleiche Resultat erhalten:

$$\text{Übergang von } \vec{r} = \sum_k x_k \vec{e}_k \quad \longrightarrow \quad \vec{r}' = \sum_k x_k \vec{e}'_k$$

So erhalten wir wieder eine Drehmatrix zwischen  $\vec{e}'$  und  $\vec{e}$ . Dies führt zu einer äquivalenten Betrachtungsweise. **Vorsicht!** Bei konkreten Gleichungen muß man in **einer** Betrachtungsweise bleiben. Bisher hatten wir hier nur den passiven Standpunkt betrachtet.

Fundamentale Naturgesetze (Grundlagen der Mechanik) bevorzugen keine Richtung und sind gegenüber Drehungen **forminvariant**; dies machen wir durch Vektorschreibweise deutlich. Ein Vektor in der Mechanik ist nicht nur eine Ansammlung von Angaben (z.B. Warenkorb: 10 Äpfel, 20 Birnen, 3 Pfund Mehl, ...), sondern beinhaltet auch ein Verhalten unter Drehungen (sie können nicht Äpfel - Birnen drehen! ... einheitliche Maßeinheit ...)

Es gibt dann gelegentlich auch Größen, die mehrere Vektorindizes (in Koordinatenschreibweise) haben. z.B. Trägheitstensor, wo also mehrere Indizes wie Vektoren transformieren, nennen wir allgemein „Tensoren n-ter Stufe“.

(iii) **infinitesimale Drehungen**

In diesem Abschnitt wollen wir das System drehen (**aktiv!**).

$$\vec{r}' = \mathbf{D} \vec{r} = \sum_i x_i \mathbf{D} \vec{e}_i = \sum_i x_i \vec{e}'_i = \sum_k x'_k \vec{e}_k$$

↑  
Zerlegung im  
alten System

kleine (infinitesimale) Drehungen:

$$\vec{r}' = \vec{r} + d\vec{r} = \vec{r} + \overrightarrow{d\varphi} \times \vec{r} \quad (\text{siehe Kapitel 5})$$

$\overrightarrow{d\varphi}$  = Vektor in Richtung Drehachse mit der Länge  $d\varphi$

$$\begin{aligned} x'_k &= x_k + \sum_{l,m} \varepsilon_{klm} (d\varphi)_l x_m \\ &= \sum_m \left( \delta_{km} + \sum_l \varepsilon_{klm} (d\varphi)_l \right) x_m \end{aligned}$$

Wir haben also wieder Kreuzprodukt durch Matrizenmultiplikation dargestellt!  
z.B. Drehung um die 3-Achse ( $l = 3$ )

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -d\varphi & 0 \\ d\varphi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Dies ist natürlich wohlbekannt:  $\cos / \sin$  für infinitesimales  $\varphi = d\varphi$

$$D^T = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Taylor}} \begin{pmatrix} 1 & -d\varphi \\ d\varphi & 1 \end{pmatrix}$$

**weiterführende Bemerkung:**

**endliche** Drehungen lassen sich durch Hintereinanderausführung von kleinen Drehungen verstehen.

endliche Drehungen werden durch Vektor mit der Richtung der Drehachse und Betrag des Drehwinkels beschrieben:  $\vec{\varphi}$

**infinitesimale** Drehungen:

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= \left( 1_{\text{Matrix}} + \underbrace{\overrightarrow{\delta\varphi} \times}_{\text{Matrix}} \right) (\vec{x}) \\ &= \left( 1_{\text{Matrix}} + \begin{pmatrix} 0 & -\delta\varphi_3 & \delta\varphi_2 \\ \delta\varphi_3 & 0 & -\delta\varphi_1 \\ -\delta\varphi_2 & \delta\varphi_1 & 0 \end{pmatrix} \right) (\vec{x}) \\ &= \left( 1_{\text{Matrix}} + \overrightarrow{\delta\varphi} \cdot \vec{\mathcal{L}} \right) (\vec{x}) \end{aligned}$$

,wobei  $\vec{\mathcal{L}}$  ein Vektor, bestehend aus drei antisymmetrischen Matrizen ist:

$$\mathcal{L}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{L}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{L}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**endliche** Drehung  $\vec{\varphi}$  als Hintereinanderausführung von  $n$  kleinen Drehungen  $\frac{\varphi}{n} = \overrightarrow{\delta\varphi}$

$$\begin{aligned}\vec{x}' &= \left(1_{\text{Matrix}} + \frac{\vec{\varphi}}{n} \cdot \vec{\mathcal{L}}\right)^n \vec{x} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} &: \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1_{\text{Matrix}} + \frac{\vec{\varphi}}{n} \cdot \vec{\mathcal{L}}\right)^n \vec{x} \\ &= \exp\left(\vec{\varphi} \cdot \vec{\mathcal{L}}\right) \vec{x} \quad \left(\text{erinnere! } e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right)\end{aligned}$$

wobei die Exponentialfunktion als  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\vec{\varphi} \cdot \vec{\mathcal{L}}\right)^n$  zu verstehen ist.

(iv) Drehungen muß man intensiv bei der Diskussion der Bewegungen eines **starren Körpers** benutzen  $\leadsto$  Kreiselgleichungen  
Hier sind zwei Bezugssysteme von Wichtigkeit:

- **raumfestes** System  $\{\vec{e}_i^{(R)}\}$
- **körperfestes** System  $\{\vec{e}_j^{(K)}\}$  (beides Orthogonalsysteme)

die durch Drehungen ineinander übergehen.

$$\begin{aligned}\left(\vec{e}^{(R)}\right) &= D\left(\vec{e}^{(K)}\right) \\ \vec{r} &= \sum_i x_i^{(R)} \vec{e}_i^{(R)} = \sum_j x_j^{(K)} \vec{e}_j^{(K)} \\ &= \sum_{i,j} x_i^{(R)} D_{ij} \vec{e}_j^{(K)} \\ \Rightarrow x_j^{(K)} &= \sum_i D_{ij} x_i^{(R)} = \sum_i D_{ji}^T x_i^{(R)}\end{aligned}$$

Der starre Körper sei nun im Nullpunkt fixiert (bzw. Kräftesumme sei gleich Null):  
die allgemeine Bewegung kann nun als Drehung aufgefaßt werden.  
Für  $t = 0$  seien  $\vec{e}_i^{(R)} = \vec{e}_i^{(K)}$ ;  $t \neq 0$ :  $D(t)$

$$x_i^{(R)}(t) = \sum_j D_{ij}(t) x_j^{(K)}$$

$$(DD^T = 1 \quad D^T = D^{-1})!$$

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}}_i^{(R)}(t) &= \frac{d}{dt} D(t) \vec{x}^{(K)} \\ &= \dot{D}(t) \underbrace{D^{-1}(t) D(t)}_{=1} \vec{x}^{(K)} = \underbrace{\dot{D}(t) D^T(t)}_{\Omega(t)} \vec{x}^{(R)}\end{aligned}$$

**Bemerkung:**

$\dot{\vec{x}} = \vec{\omega} \times \vec{x}$  in raumfesten Koordinaten entspricht der o.g. Beziehung  
 $\dot{\vec{x}}^{(R)} = \Omega(t) \vec{x}^{(R)}$ , wobei das Kreuzprodukt durch Matrizenmultiplikation ersetzt

ist!

$$\boxed{\vec{\omega} \longleftrightarrow \Omega(t)} = \dot{D}D^T(t)$$

$$\Rightarrow \left( \begin{array}{l} \text{mit } \Omega = \dot{D}(t)D^T(t) \Rightarrow \Omega^T = D \overbrace{\dot{D}^T}^{\text{transponieren und Zeitableitung vertauschen}} \\ \text{Produktregel} \underline{\underline{=}} \text{ r\"uckw\"arts } \frac{d}{dt}(DD^T) - \dot{D}D^T = \frac{d}{dt}(1) - \Omega = -\Omega \end{array} \right)$$

kennen wir schon:  $\Omega_{ik} = \sum_l \varepsilon_{ikl} \omega_l$

siehe Kap. V. f\"ur starren K\"orper:

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\left( \sum_i \vec{x}_{(i)} \times (m_i \dot{\vec{x}}_{(i)}) \right)}_{\text{Drehimpuls } \vec{L}} = \sum_i \vec{x}_{(i)} \times \vec{F}_i = \vec{M} \quad (\text{in raumfesten Koordinaten})$$

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_i m_i \vec{x}_{(i)} \times (\dot{\vec{x}}_{(i)}) = \sum_i m_i \vec{x}_{(i)} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}_i) \\ &= \sum_i m_i (\vec{\omega} \vec{x}_{(i)}^2 - \vec{x}_{(i)} (\vec{x}_{(i)} \cdot \vec{\omega})) \\ &= \sum_i m_i \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{x}_{(i)}^2 - x_{(i)1}^2 & -x_{(i)1}x_{(i)2} & -x_{(i)1}x_{(i)3} \\ \text{symmetrisch} & \vec{x}_{(i)}^2 - x_{(i)2}^2 & -x_{(i)2}x_{(i)3} \\ & & \vec{x}_{(i)}^2 - x_{(i)3}^2 \end{pmatrix}}_{\text{Tr\"agheitstensor } \mathbf{I}_{jk}} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\vec{L} = \mathbf{I} \vec{\omega}$$

Der \"Ubergang zu **k\"orperfesten Koordinaten** wird f\"ur (Koordinaten)Vektoren vermittelt durch (s.o.)

$$V_j^{(K)} = \sum_i D_{ji}^T(t) V_i^{(R)} \quad ; \quad \underbrace{\vec{V}^{(K)}}_{\text{Spaltenvektor}} = D^T(t) \underbrace{\vec{V}^{(R)}}_{\text{Spaltenvektor}} \quad ; \quad \underbrace{\vec{V}^{(K)T}}_{\text{Zeilenvektor}} = \underbrace{\vec{V}^{(R)T}}_{\text{Zeilenvektor}} D(t)$$

$$\boxed{\underbrace{D^T \vec{L}}_{\text{Matrix}} = \underbrace{D^T \mathbf{I}}_{\text{Matrix}} \underbrace{D D^T \vec{\omega}}_{\text{Matrix}}} \quad D^T \vec{L} \text{ und } D^T \vec{\omega} \text{ sind (Koord.)Vektoren im k\"orperfestem System.}$$

$$\boxed{\mathbf{I}^{(K)} = D^T(t) \mathbf{I} D(t)} \quad \text{ist Matrix im k\"orperfesten System. (Zeitunabh\"angig!)}$$

Der Tr\"agheitstensor (sowohl  $\mathbf{I}$  wie  $\mathbf{I}^{(K)}$ ) ist symmetrisch.

$$\left( \mathbf{I}^{(K)T} = (D^T \mathbf{I} D)^T = D^T \mathbf{I}^T D = D^T \mathbf{I} D = \mathbf{I}^{(K)} \right)$$

(v) Wir betrachten nun das **Eigenwertproblem für symmetrische Matrizen  $\mathbf{I}$**  ( $\leadsto$  Math.)

$\mathbf{I}\vec{x}_i = I_i\vec{x}_i$
--------------------------------------

(\*)  $\vec{x}_i$  sind Eigenvektoren!  
 $I_i$  sind Eigenwerte!

Die  $\{\vec{x}_i\}$  stehen wechselseitig senkrecht aufeinander.

Beweis:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\vec{x}_k^T \mathbf{I} \vec{x}_i}_{\text{Matrizenprodukt}} = I_i x_k^T \vec{x}_i \\ \vec{x}_i^T \mathbf{I} \vec{x}_k = I_k x_i^T \vec{x}_k \end{array} \right.$$

bilde Differenz:

$$\begin{aligned} (I_i - I_k) \vec{x}_i^T \vec{x}_k &= \vec{x}_k^T \mathbf{I} \vec{x}_i - \underbrace{\vec{x}_i^T \mathbf{I} \vec{x}_k}_{\vec{x}_k^T \mathbf{I}^T \vec{x}_i = x_k^T \mathbf{I} \vec{x}_i} \quad , \text{da Zahl} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{x}_i^T \cdot \vec{x}_k = \delta_{ik} \quad (\text{nach Normierung der } \vec{x} \text{ !!!})(\text{falls keine Entartung der } I_i)$$

d.h. die  $\vec{x}_i$  bilden dann **Orthonormalsystem**.

$\leadsto$  gibt Drehung  $\overline{\mathbf{D}}$  von den  $\{\vec{x}_i\}$  zu dem ursprünglichen Koord.-„Dreibein“  
 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ; diese ist zeitunabhängig für zeitunabhängiges  $\mathbf{I}$ !

aus (\*) folgt nun:

$$\overline{\mathbf{D}}^T \underbrace{\mathbf{I} \overline{\mathbf{D}} \overline{\mathbf{D}}^T}_{=1} \vec{x}_1 = I_1 \overline{\mathbf{D}}^T \vec{x}_1 \Rightarrow \overline{\mathbf{D}}^T \mathbf{I} \overline{\mathbf{D}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = I_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

etc. für  $\vec{x}_2, \vec{x}_3$

Diese Drehung hat eine sog. **Hauptachsentransformation** bewirkt, der Trägheitstensor ist in seiner gedrehten Form  $\overline{\mathbf{D}}^T \mathbf{I} \overline{\mathbf{D}}$  diagonal.  $\overline{\mathbf{D}}^T$  hat die Form:

$$\overline{\mathbf{D}}^T = \begin{pmatrix} \cdots \vec{x}_1 \cdots \\ \cdots \vec{x}_2 \cdots \\ \cdots \vec{x}_3 \cdots \end{pmatrix}$$

mit normierten  $\vec{x}_i$ , da dann gilt  $\overline{\mathbf{D}}^T \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  etc.

$\leadsto$  Dies wird in der theor. Mechanik fortgesetzt ( $\leadsto$  Trägheitsellipsoid ...)

### Lösen des **Eigenwert-Problems**

$$\mathbf{I} \vec{x}_i = I_i \vec{x}_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{(\mathbf{I} - I_i \mathbf{1}_{\text{Matrix}}) \vec{x}_i = \mathbf{0}} \quad (*)$$

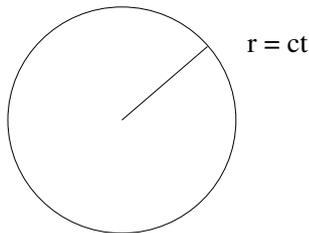
dann (vgl. lineare Gleichungen):  $\det(\mathbf{I} - I_i \mathbf{1}_{\text{Matrix}}) = 0$  „Säkulargleichung“  
ist Lösung einer **kubischen** Gleichung  
bei gegebenen  $I_i$ : sei o.B.d.A.  $(\vec{x}_i)_1$ -Komponente  $\neq 0$ , nehme die ersten zwei Gleichungen aus (\*) (dritte abhängig!) und löse inhomogene Gleichung für 2 Unbekannte, erhalte  $\vec{x}_i$ , die ich noch normieren muß.

## 5.4 Lorentztransformationen als modifizierte Drehungen

1.) Die Spezielle Relativitätstheorie bekam entscheidende Impulse aus der Elektrodynamik:

- die Lichtgeschwindigkeit ist in allen Inertialsystemen gleich („c“).
- (formales → Theorie-Vorlsg.) die Maxwellgleichungen ändern ihre Form bei Lorentztransformation nicht.

**einfacher Ansatz:** Kugelwelle bleibt bei Übergang zu einem anderen Inertialsystem („fahrender Zug“) Kugelwelle!



$$\begin{aligned} r &= ct \\ r^2 - (ct)^2 &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Übergang zu Bezugssystem mit

Geschwindigkeit  $\vec{v}$   $\xrightarrow{\text{„boost“}}$   $r'^2 - (ct')^2 = 0$

Man kann  $x, y, z, ct$  zu einem „4-Vektor“ zusammenfassen und ein inneres Produkt mit „indefiniter Metrik“ einführen:

$$x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = (x, y, z, ct) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{„metrischer Tensor } g\text{“}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix}$$

dann bleibt das neue innere Produkt unter diesem „boost“ invariant.

Der „boost“ (neudeutsch) ist eine spezielle Lorentztransformation.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix} = (\Lambda)_{4 \times 4} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix}; \quad \underbrace{(\dots)}_{\text{Zeilen}} = (\dots) \Lambda^T$$

Invarianz:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - (ct')^2 = (x, y, z, ct) \underline{\underline{\Lambda^T g \Lambda}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} (x, y, z, ct) \underline{\underline{g}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \boxed{\Lambda^T g \Lambda = g}$$

weil dies für alle 4-Vektoren  $(x, y, z, ct)$  gilt. (hier haben wir der Einfachheit halber nur sogenannte „lichtartige“ Vektoren hingeschrieben, das innere Produkt ist Null)

Reine Drehungen sind ebenfalls eine mögliche Transformation, dann  $ct = ct'$ :  
die Lorentztransformationen sind durch obige Beziehungen definiert und umfassen boosts und Drehungen.

2.) Wir machen uns nun das Leben einfacher und nehmen nur eine Raumdimension „X“.

Dann ergeben sich  $x'^2 - (ct')^2 = x^2 - (ct)^2$  als invariant.

Bei imaginärer Zeit wäre dies die Invarianz unter Drehungen in der  $[x, -ict]$  - Ebene, wir wollen also ähnlich wie bei den Drehungen vorgehen.

Drehungen	Lorentztransformationen
$D^T D = 1$	$\Lambda^T g \Lambda = g$
Ansatz: $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$	$\Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\underbrace{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} a & -c \\ b & -d \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a^2 - c^2 & ab - cd \\ ab - cd & b^2 - d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
$a^2 + b^2 = b^2 + d^2 = 1$	$a^2 - c^2 = -(b^2 - d^2) = 1$
$ab = -cd$	$ab = cd$
gelöst durch:	gelöst durch:
$a = d = \cos \varphi$	$a = d = \cosh \delta$
$b = -c = \sin \varphi \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$	$b = c = \sinh \delta \quad (-\infty \leq \delta \leq +\infty)$
	$(\cosh^2 - \sinh^2 = 1 \ !)$
$\leadsto D = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$	$\leadsto \Lambda = \begin{pmatrix} \cosh \delta & \sinh \delta \\ \sinh \delta & \cosh \delta \end{pmatrix}$

Interpretation von  $\cosh \delta, \sinh \delta$ :

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \delta & \sinh \delta \\ \sinh \delta & \cosh \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}$$

$$x' = \cosh \delta x + \sinh \delta ct$$

$$ct' = \sinh \delta x + \cosh \delta ct$$

bilde **festen** Punkt  $x = 0$  ab:  $\begin{pmatrix} 0 \\ ct \end{pmatrix}$

$$\left. \begin{array}{l} x' = \sinh \delta ct \\ ct' = \cosh \delta ct \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{dx'}{dt'} = v = c \tanh \delta$$

d.h.

$$\boxed{\tanh \delta = \frac{v}{c}}$$

wobei  $v$  die Geschwindigkeit des Ursprungs im neuen System ist.  
dann:

$$\left. \begin{array}{l} x' = \cosh \delta (x + \tanh \delta ct) \\ ct' = \cosh \delta (\tanh \delta x + ct) \end{array} \right\} ; \quad \cosh \delta = (1 - \tanh^2 \delta)^{-\frac{1}{2}}$$

oder:

$$\boxed{\begin{array}{l} x' = \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} (x + vt) \\ t' = \underbrace{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}}_{\gamma} \left(\frac{vx}{c^2} + t\right) \end{array}}$$

oft:  $v \rightarrow -v$  bei Betrachtung des Ursprungs  $x' = 0$  im ungestrichenen System.

**Bemerkung:**

können auch direkt spezielle Lorentztransformation aus Drehung mit imaginären Winkel gewinnen

$$\begin{pmatrix} x' \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \text{Drehung in } x - x_4\text{-Ebene}$$

wähle nun imaginäres  $x_4 = -ict$  und imaginären Winkel  $\varphi = i\delta$

$$\begin{pmatrix} x' \\ -ict' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \delta & i \sinh \delta \\ -\sinh \delta & \cosh \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -ict \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \delta & \sinh \delta \\ -\sinh \delta & \cosh \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}$$

da  $\cos(i\delta) = \frac{e^{i(i\delta)} + e^{-i(i\delta)}}{2} = \cosh \delta$  ,  $\sin(i\delta) = \frac{e^{i(i\delta)} - e^{-i(i\delta)}}{2i} = \frac{-\sinh \delta}{i}$

# Kapitel 6

## Wahrscheinlichkeitsverteilung und Fehlerrechnung

### 6.1 Definitionen; Wahrscheinlichkeit; Verteilungsfunktionen; Erwartungswert

zufällige Ereignisse: z.B.: Würfeln, Roulette, Kursschwankungen,...

..., physikalische Messung (Experiment)

auch dort Schwankungen im Messwert (unkontrollierbare thermische Schwankungen, andere Einflüsse,..., grundsätzlich Quantenmechanik, bei klassischen Phänomenen vernachlässigbar).

**Def.:**

Ein **Ereignis** (Messung) ist ein Vorgang (z.B.: Experiment), der zu einem quantifizierbaren Resultat (Messergebnis)  $x$  führt; ( $x$  heisst (Wert der) Zufallsvariablen).

**Bemerkung:**

allgemeiner: dem **Ereignis**  $A$  ordne ich die **Zufallsvariable**  $X$  mit dem **Wert**  $x$  zu („...,würfle eine 3“).

**Def.:**

**Wahrscheinlichkeit** für Resultat  $x$ :

$$P(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n}$$

m: messe  $x$  m-mal  
n : Anzahl der Messungen  
(allgemeiner:  $P(A)$ )

Es gebe nun *mehrere* mögliche Resultate der Messung; man mißt auf jeden Fall einen der möglichen  $x$ -Werte; Messungen ergeben „**Stichprobe**“  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  (n-malige Wiederholung der Messung).

- zunächst ist Ereignis die Messung eines **festen**  $x$  (oder „nicht  $x$ “)
- Messung erlaube mehrere sich gegenseitig ausschliessende Resultate  $x^{(k)}$ , messe jedenfalls einen dieser Werte; die obigen  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  sind dann eine **Kette** solcher  $x^{(k)}$  ( $k = 1 \dots N$ );  $x^{(k)}$  entsprechen **Elementarereignissen**.

es gilt:

$$\sum_{k=1}^N P(x^{(k)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{n} = 1$$

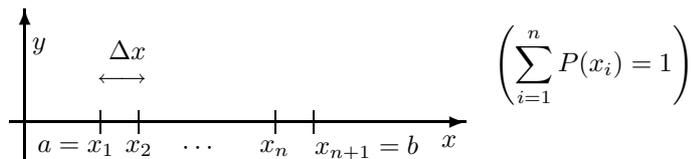
bei kontinuierlichen  $x$  :

$$\begin{aligned} P(x_k) &\rightarrow f(x) \\ \sum &\rightarrow \int dx \end{aligned}$$

$f(x)$  ist Wahrscheinlichkeits**dichte**:  $f(x) dx$  : Wahrscheinlichkeit für  $y$  mit  $x \leq y \leq x + dx$

diskrete - kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$\sum_{i=1}^n P(x_i) g(x_i) = \sum_{i=1}^n \Delta x_i \frac{P(x_i)}{\Delta x_i} g(x_i)$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overbrace{\sum_{i=1}^n \Delta x_i \frac{P(x_i)}{\Delta x_i} g(x_i)}^{\text{Riemann-Summe}} = \int_a^b dx f(x) g(x) \quad \left( \Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n} \right)$$

Wahrscheinlichkeitsdichte  
 $\rightarrow f(x_i)$  für  $n \rightarrow \infty$ ,  
 $\Delta x \rightarrow 0$

$$P(x) \approx f(x) \Delta x \quad \rightsquigarrow \quad f(x) \approx \frac{P(x)}{\Delta x}$$

(oft differentielle Schreibweise, dann  $P(x) = f(x) dx$ )

**6.1.1 Axiomatik (Kolmogorow)** (kurz, im folgenden nicht wichtig!)

- $P(A) \geq 0$
- $P(E) = 1$  sicheres Ereignis
- $P(A + B) = P(A) + P(B)$  für disjunkte Ereignisse ( $AB = \emptyset$ )

**Def.:**

- $C = A + B$  ( $A \cup B$ ,  $A$  oder  $B$  oder beide)
- $C = AB$  ( $A \cap B$ ,  $A$  und  $B$ )
- $\bar{A}$  nicht in  $A$  :  $E - A$
- $C = A - B \equiv A\bar{B}$

Es gilt:

- $\overline{A + B} = \bar{A}\bar{B}$
- $\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$

bedingte Wahrscheinlichkeit:

- $P(\underbrace{A | B}_{\text{wenn } B}) := \frac{P(AB)}{P(B)}$

$A, B$  **unabhängig**:

$$\boxed{\bullet \underbrace{P(AB)}_{\text{und}} = P(A)P(B)} \Rightarrow P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

sonst. allgem.:

- $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

**Def.:**

**Erwartungswert** (Mittelwert) einer Funktion  $g(x)$  der Zufallsvariablen

$$\langle g(x) \rangle = \sum_k P(x^{(k)}) g(x^{(k)}) \quad (\text{wir schreiben nicht, wie i. d. Math. üblich bei Definitionen „:=“})$$

$$\xrightarrow{\text{Kontinuum}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) g(x)$$

$$\langle x \rangle = \bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) x \quad \text{„Mittelwert“ (von } x \text{)}$$

$$\sigma^2 = \langle (x - \bar{x})^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) (x - \bar{x})^2 \quad \text{„Varianz“ (mittlere quadratische Abweichung)}$$

$$= \overline{x^2} - 2 \bar{x} \bar{x} + \bar{x}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2!$$

$\langle x^n \rangle$  „n-tes Moment“

$\langle (x - \bar{x})^k \rangle$  „zentrale“ Momente

$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$  „Standardabweichung“

## 6.2 Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen

### 6.2.1 Binomialverteilung (Bernoulli-Verteilung)

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \underbrace{(p)}_a + \underbrace{(1-p)}_b)^n = 1$$

, da  $\binom{n}{k}$  definiert durch  $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

schreibe alle Permutationen ( $n!$ ) von  $k$  Werten  $a$  und  $(n-k)$  Werten  $b$ ; ohne Berücksichtigung der Reihenfolge; Vertauschung der  $a$  oder der  $b$  untereinander ergibt identisches Resultat.

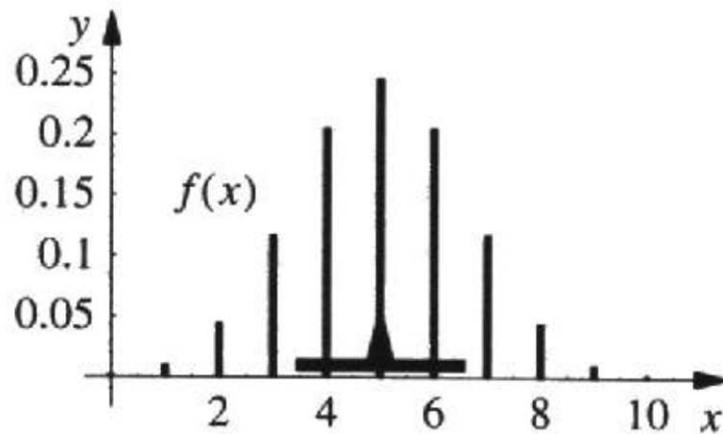


Abbildung 6.1: Binomial Verteilung - Pfeil und Balken markieren Erwartungswert und 1.  $\sigma$ -Umgebung (Lang, Pucker)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{„k aus n“}$$

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k \quad 0! = 1$$

**z.B.:**

„Würfeln“ mit zwei Wahrscheinlichkeiten  $p, 1-p$  für 1,0

Beispiel für  $p = \frac{1}{2}$ : Galtonsches Nagelbrett

Abbildung 6.2: Galton Brett (Lang, Pucker)

in der Math. : Pascalsches Dreieck ergibt  $\binom{n}{k}$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & \downarrow \\
 & & & 1 & 2 & 1 & & \mathbf{n} \\
 & & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\
 1 & & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
 \end{array}$$

$\longrightarrow \mathbf{k} = \mathbf{0} \dots \mathbf{n}$

$$\mu = \langle \mathbf{k} \rangle = \sum_{k=0}^n k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k \underbrace{(1-p)^{n-k}}_q$$

$$\stackrel{\text{Trick}}{=} p \frac{\partial}{\partial p} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \Big|_{q=1-p} \quad \frac{\partial}{\partial p}: \text{„partielle Ableitung“, da mehrere Variablen: halte zun\u00e4chst beim Differenzieren } q \text{ fest, setze erst am Schluss } q = 1 - p$$

$$= p \frac{\partial}{\partial p} (p+q)^n = p n (p+q)^{n-1} \Big|_{q=1-p} = \mathbf{p} \mathbf{n} \quad (*)$$

$$\langle \mathbf{k}(\mathbf{k}-1) \rangle = p^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2} (p+q)^n \Big|_{q=1-p} = p^2 n(n-1) = \langle \mathbf{k}^2 \rangle - \langle \mathbf{k} \rangle$$

$$\sigma^2 = \langle \mathbf{k}^2 \rangle - \langle \mathbf{k} \rangle^2 = p^2 (n(n-1) - n^2) + p n = \mathbf{p}(\mathbf{1}-\mathbf{p}) \mathbf{n}$$

### 6.2.2 Poisson-Verteilung

in 1.2.1):  $n \rightarrow \infty, \mu$  fest:  $p = \frac{\mu}{n}$

$$\begin{aligned}
 P(X=k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\mu}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{n-k} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} \frac{\mu^k}{(n-\mu)^k} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{n!}{(n-k)!(n-\mu)^k}}_{\rightarrow 1} \frac{\mu^k}{k!} \underbrace{\left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n}_{\rightarrow e^{-\mu}} \\
 &= \boxed{\frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}}
 \end{aligned}$$

zur \u00dcberpr\u00fcfung:  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} = e^{\mu} e^{-\mu} = 1$  (mit  $e$ -Reihe!)

$$\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu}{n} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right) n = \mu$$

z.B.: Zerfall einer grossen Anzahl von Atomen mit Wahrscheinlichkeit  $p = \varepsilon = \lambda \Delta t$  in kleiner Zeit  $\Delta t = \frac{t}{n}$  unabh\u00e4ngig von der Zeit; dann ist  $\mu = n \varepsilon = \lambda t$  (s.o.

(\*) und es gilt f\u00fcr die Wahrscheinlichkeit von  $k$  Zerf\u00e4llen:  $P(X=k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$

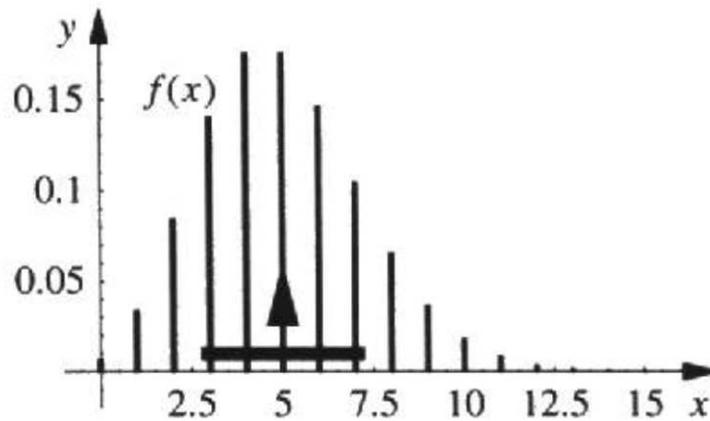


Abbildung 6.3: Poisson Verteilung (Lang, Pucker)

### 6.2.3 Gleichverteilung

$$P = f(x) = \frac{1}{b-a} \quad \text{für } a \leq x < b, \text{ sonst } 0$$

$$\mu = \int_a^b dx \frac{x}{(b-a)} = \frac{1}{2} \frac{b^2 - a^2}{(b-a)} = \frac{1}{2}(a+b)$$

$$\sigma^2 = \int_a^b dx \frac{x^2}{b-a} - \mu^2 = \frac{1}{12} (b-a)^2$$

### 6.2.4 Normalverteilung (Gauß-Verteilung)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) = 1 \quad : \quad \text{brauche} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2/2\sigma^2} = \sqrt{2\pi}\sigma$$

$$\left( \text{bzw.} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x} e^{-\tilde{x}^2/2} = \sqrt{2\pi} \right) \rightsquigarrow \text{Trick: berechne Quadrat als Flächenintegral (... später)}$$

grob: Höhe  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \times \text{Breite } 2\sigma = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sim 1$

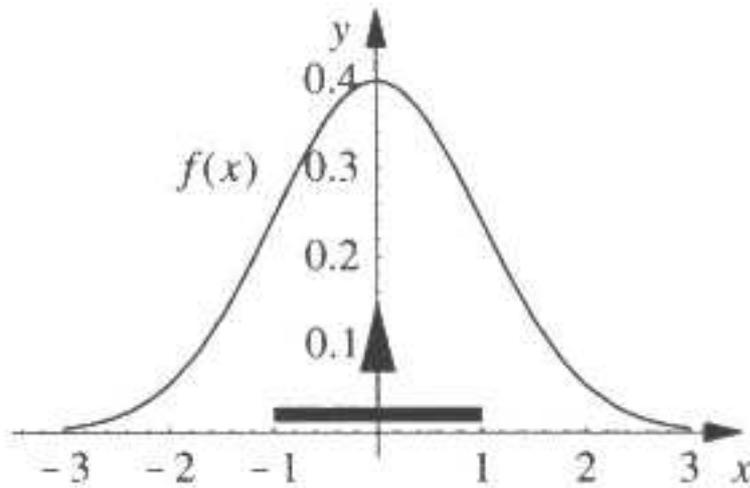


Abbildung 6.4: Normalverteilung (Lang, Pucker)

$$\begin{aligned}
 \langle x \rangle &= \mu \\
 \sigma^2 = \langle (x - \mu)^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx (x - \mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \\
 &\stackrel{\text{Trick}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left( \frac{\partial}{\partial \sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \right) \left( \frac{2}{\sigma^3} \right)^{-1} \\
 &= \sigma^2 \quad \leadsto \text{Bezeichnung } \sigma \text{ in Verteilung korrekt}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(|x - \mu| < \Delta) &= \int_{\mu-\Delta}^{\mu+\Delta} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad \text{Integration über „Glockenkurve“} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\Delta/\sqrt{2}\sigma}^{+\Delta/\sqrt{2}\sigma} du e^{-u^2} = \text{erfc} \left( \frac{\Delta}{\sqrt{2}\sigma} \right) \\
 \text{mit } \text{erfc}(t) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t du e^{-u^2} \quad \text{tabelliert (erfc}(\infty) = 1)
 \end{aligned}$$

### 6.3 Schätzwert $x_0$ , Zentraler Grenzwertsatz

Verteilung  $f(x)$  ist nicht bekannt ( $n$  endlich; also theoretische Überlegung)  
 nehme Stichprobe ( $n$  Messungen)

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

verschiedene Stichproben haben eine Statistik, sie sind durch Stichproben/Schätzfunktion(en) charakterisiert.

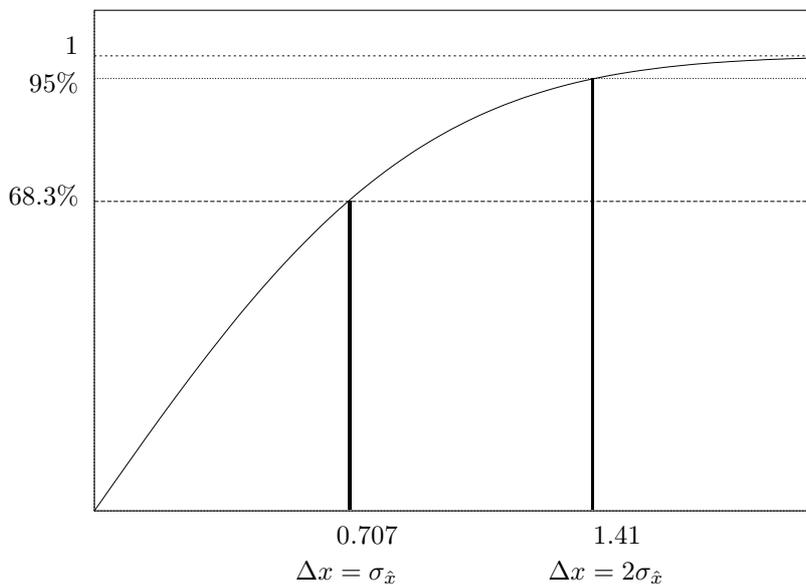


Abbildung 6.5: Error-Funktion

Mittelwert:  $\hat{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  gibt „Schätzwert“  $x_0$

Varianz:  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{X})^2$  **Stichprobenvarianz**

Mittelwert des Stichprobenmittels

$$\langle \hat{X} \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \underbrace{\langle X_i \rangle}_{(n \text{ unabhängige Messungen!})} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \underbrace{\langle X \rangle}_{\text{Einzelmessung}} = \mu_x \quad \text{„richtiger Mittelwert“}$$

statistischer Fehler von  $\hat{X}$

$$\begin{aligned} \sigma_{\hat{x}}^2 &= \left\langle (\hat{X} - \mu_x)^2 \right\rangle = \langle \hat{X}^2 \rangle - \mu_x^2 = \frac{1}{n^2} \underbrace{\sum_{i,j=1}^n \langle X_i X_j \rangle}_{\text{für } i \neq j \rightsquigarrow \langle X_i \rangle \langle X_j \rangle, \text{ da } x_i, x_j \text{ unabhängig}} - \mu_x^2 \\ &= \frac{n}{n^2} \sigma_X^2 = \frac{1}{n} \sigma_X^2 \end{aligned}$$

Der **zentrale Grenzwertsatz** besagt, dass  $\hat{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  bei beliebigen  $f(x)$  für die  $X_i$  für  $n \rightarrow \infty$  eine **Normalverteilung** mit Mittelwert  $\mu$  und Varianz  $\frac{\sigma^2}{n} = \sigma_{\hat{x}}^2$  hat. ( $\mu$  und  $\sigma^2$  beziehen sich auf  $f(x)$ )

**Bew.:**

mit Fouriertransformation/ Faltungintegral siehe spätere Übungen!

**Bemerkung zum zentralen Grenzwertsatz:**

Wir haben eine Version genannt, in der es um die Varianz des Mittelwerts von  $n$  Messungen (später  $n$  gross) geht

$$\hat{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

die Einzelmessungen  $X_i$  sind voneinander unabhängig und haben beliebige Statistik (bei uns und in einfachen Beispielen: alle  $X_i$  mit gleicher Statistik) mit  $\langle X_i \rangle = \mu$  und  $\sigma_i^2 = \sigma^2$ ; dann gilt:  $\sigma_{\hat{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$  und  $\hat{X}$  hat Normalverteilung für grosse  $n$ .

In der Vorlesung wird von der Statistik der Einzelmessung gesprochen; diese ist schon das Ergebnis verschiedener (per Annahme voneinander unabhängiger) Einflüsse:  $\hat{X} = g(X_1 X_2 \dots X_n)$  die  $X_i$  sind nun nicht mehr vom gleichen Typ.

Wenn auch in diesem Fall  $\hat{X}$  für grosse  $n$  eine Normalverteilung hat, handelt es sich um einen **zentralen Grenzwertsatz allgemeinerer Art**.

## 6.4 Fehlerfortpflanzung

gegeben: Verteilungsfunktion  $f(x)$  für Zufallsvariable  $X$

### Frage:

Verteilungsfunktion für Zufallsvariable  $g(X)$ , Momente von  $g(X)$  ?

### Taylorentwicklung:

$$\begin{aligned}
 \text{bei } x = \mu \quad g(x) &= g(\mu) + \left. \frac{dg}{dx} \right|_{x=\mu} (x - \mu) + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2g}{dx^2} \right|_{x=\mu} (x - \mu)^2 + \dots \\
 \langle g(x) \rangle &= g(\mu) + \frac{1}{2} \int dx (x - \mu)^2 f(x) \left. \frac{d^2g}{dx^2} \right|_{x=\mu} + O_3(\dots) \\
 &= g(\mu) + \frac{1}{2} \sigma^2 \left. \frac{d^2g}{dx^2} \right|_{x=\mu} + \dots \\
 \langle g^2(x) \rangle &= g^2(\mu) + \left( \left. \frac{dg}{dx} \right|_{x=\mu} \right)^2 \sigma^2 + \frac{2}{2!} g(\mu) \left. \frac{d^2g}{dx^2} \right|_{x=\mu} \sigma^2 + O_3(\dots) \\
 \sigma_g^2 &= \langle g^2(x) \rangle - \langle g(x) \rangle^2 = \left( \left. \frac{dg}{dx} \right|_{x=\mu} \right)^2 \sigma^2 + O_3(\dots) \\
 &= (g'\sigma)^2
 \end{aligned}$$

oder (in diesem Fall schneller)

$$\begin{aligned}
 \langle (g(x) - \langle g(x) \rangle)^2 \rangle &\implies \underbrace{\left\langle \left( \left. \frac{dg}{dx} \right|_{x=\mu} (x - \mu) \right)^2 \right\rangle}_{\text{falls Rechnung zur Quadr. Ordnung}} \\
 &= \left( \left. \frac{dg}{dx} \right|_{x=\mu} \right)^2 \sigma^2 \quad \text{s.o.}
 \end{aligned}$$

### Übungsaufgabe: zentraler Grenzwertsatz

- (a) Berechnen Sie die statistische Verteilung des Mittelwerts von drei Würfeln ( $n = 3$ ), indem Sie eine Tabelle der Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Würfelsummen berechnen. (Versetzen Sie zur Vereinfachung die Würfelzahlen auf  $0,1,\dots,5$ ) Beim einzelnen Würfel (ideal) haben wir eine perfekte Gleichverteilung.
- (b) Prüfen Sie nach, inwieweit die erhaltene Verteilung schon durch die Normalverteilung gut angenähert wird, wie sie der zentrale Grenzwertsatz ( $n \rightarrow \infty$ ) ergibt.
- (c) Insbesondere vergleichen Sie das neue  $\sigma^2$  mit dem des Einzelwürfels  $\sigma_{\text{Würfel}}^2$  und prüfen Sie, inwieweit  $\sigma^2 \sim \sigma_{\text{Würfel}}^2/3$  gilt.

zu (a) Für Summe  $n_1 + n_2 + n_3$ : Werte von 0-15 (symmetrisch um 7.5!)

Summe	Kombinationen	Anz. der Komb.	Gesamt	Wahrscheinlichkeit
0	0+0+0	1	<b>1</b>	$\cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$
1	1+0+0	3	<b>3</b>	$\cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{3}{216}$
2	1+1+0 2+0+0	3 3	<b>6</b>	$\cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{6}{216}$
3	3+0+0 2+1+0 1+1+1	3 3*2 1	<b>10</b>	$\cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{10}{216}$
4	4+0+0 3+1+0 2+2+0 2+1+1	3 3*2 3 3	<b>15</b>	...
5	5+0+0 4+1+0 3+2+0 3+1+1 2+2+1	3 3*2 3*2 3 3	<b>21</b>	
6	5+1+0 4+2+0 4+1+1 3+3+0 3+2+1 2+2+2	3*2 3*2 3 3 3*2 1	<b>25</b>	
7	5+2+0 5+1+1 4+3+0 4+2+1 3+3+1 3+2+2	3*2 3 3*2 3*2 3 3	<b>27</b>	

$$\mu_{\text{Würfel}} = \frac{1}{6}(0 + 1 + \dots + 5) = 2.5$$

zu (b)

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{Würfel}}^2 &= \frac{1}{6} 2 \left( (2.5)^2 + (1.5)^2 + (0.5)^2 \right) \left( \sum_{i=0}^5 (i - \mu_{\text{Würfel}})^2 \cdot \frac{1}{6} \right) \\ &= \frac{8.75}{3} = \frac{35}{12}\end{aligned}$$

Verteilung nach zentralem Grenzwertsatz ( $n \rightarrow \infty$ , hier  $n = 3!$ )

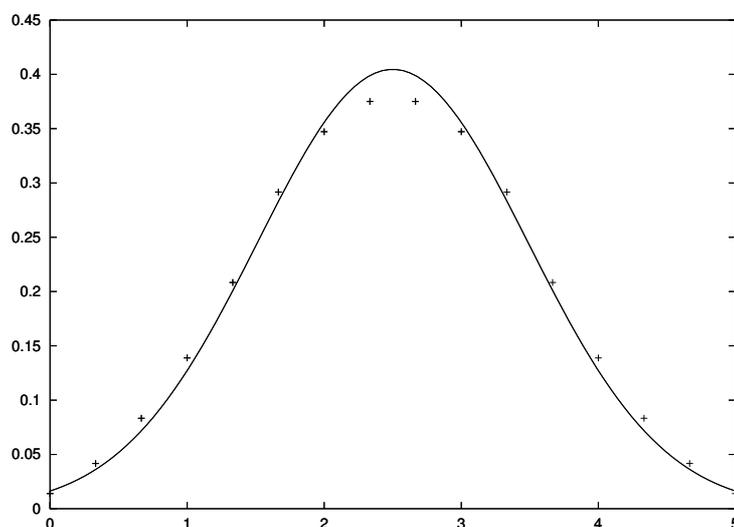
dann

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\hat{x}}} \exp\left(-\frac{(x - \mu_{\text{Würfel}})^2}{2\sigma_{\hat{x}}^2}\right) &\quad \text{Wahrscheinlichkeitsdichte} \\ \hat{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3} &\quad ; \quad \sigma_{\hat{x}}^2 = \frac{\sigma_{\text{Würfel}}^2}{3} = \frac{35}{36} \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{35}{36}}} \exp\left(-\frac{(x - 2.5)^2}{(70/36)}\right) &\quad \text{zu plotten;}\end{aligned}$$

Durch Abzählen:

$x$	0	1/3	2/3	1	4/3	5/3	2	7/3	8/3	3	...	
Kombinationen	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	...	symmetrisch

Normierung:  $x \left(\frac{1}{6}\right)^3$



stimmt recht gut mit obiger berechneter Verteilung überein; Wahrscheinlichkeitsdichte: obige Zahlen /  $\frac{1}{3}!$

zu (c)

$$\begin{aligned}\sigma_{\hat{x}}^2 &= 2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left( 1 \cdot (2.5 - 0)^2 + 3 \cdot (2.5 - \frac{1}{3})^2 + 6 \cdot (2.5 - \frac{2}{3})^2 \right. \\ &\quad \left. + 10 \cdot (2.5 - \frac{3}{3})^2 + \dots + 27 \cdot (2.5 - \frac{7}{3})^2 \right) \\ &\approx 0.97 \sim \sigma_{\text{Würfel}}^2 / 3 \quad !\end{aligned}$$