1.2.5 *Gewöhnliche DGL höherer Ordnung* > Ausblick

hier nur ein paar Hinweise und vorbereitende Bemerkungen zum nächsten Kapitel:

- lassen sich (s.o.) auf DGL-System 1. Ordnung zurückführen ⇝ i.a. kompliziert, analytische Verfahren zu finden, aber leicht mit Computer zu behandeln
- **lineare** DGL höherer Ordnung:

a) Insbesondere Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten - dafür ist Exponentialansatz wichtig

Beispiel

$$\begin{aligned} y'' &= cy \quad , \quad (c>0) \quad \text{Ansatz:} \quad y = y_0\, e^{\alpha x} \\ \alpha^2\, y_0\, e^{\alpha x} &= y_0\, e^{\alpha x} \\ \alpha^2 &= c \qquad \alpha = \pm\sqrt{c} \end{aligned}$$

$$y = y_0^{(1)} e^{+\sqrt{c}x} + y_0^{(2)} e^{-\sqrt{c}x}$$

wollen nun $y'' = -y$ lösen: $A\cos x + B\sin x$ ist Lösung!

eleganter: wieder Ansatz $y = Ae^{\alpha x} \to A\,\alpha^2\, e^{\alpha x} = -A\, e^{\alpha x} \quad ; \quad \alpha^2 = -1$

Führt auf **komplexe Zahlen**!

konkreter:

$$\boxed{m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -kx(t)}$$

„harmonischer Oszillator" (Federschwingung um $x=0$)
mit $x(t_0) = x_0$; $\dot{x}(t_0) = v_0$

$$\begin{aligned} \text{Ansatz:} \quad x(t) &= x_0 e^{\alpha t} \\ \rightsquigarrow m\,\alpha^2 &= -k \quad ; \quad \alpha = \sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}$$

(zwei Lösungen der homogenen Gleichung)

hier $x(t) \Rightarrow z(t)$ komplex

$$\boxed{z(t) = a\, e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}\,t} + b\, e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}\,t}}$$

ist allgemeine komplexe Lösung mit komplexen a, b

speziell: $a \to a, \quad b \to ib$ mit a, b reell; dann

$$\mathrm{Re}\; z(t) \overset{\text{„Euler"}}{=} a\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + b\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) = x_0\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi\right)$$

ist allgemeine reelle Lösung

lege a, b durch $x(t_0) = x_0$; $\dot{x}(t_0) = v_0$ fest. (bzw. x_0, φ)

⇝ nächstes Kapitel