Kapitel 2 "Intermezzo"

- *Taylorentwicklung von Funktionen und Potenzreihen*
- Komplexe Zahlen

(„die genauen Regeln des ungenauen Rechnens" (⇒ Hüfner))

2.1 *Taylorentwicklung von Funktionen einer Variablen*

Funktion $f(x)$ wird in der Nähe von $x = x_0$ durch Ableitungen bei x_0 beschrieben, falls f „glatt" (diesen Ausdruck mögen Mathematiker nicht!), d.h. Ableitungen stetig.

Satz (Taylor): $f(x)$ sei bei $x = x_0$ n-fach stetig differenzierbar, dann

$$\rightsquigarrow f(x_0+\varepsilon) = f(x_0) + \varepsilon f^{(1)}(x_0) + \frac{\varepsilon^2}{2!} f^{(2)}(x_0) + \cdots + \underbrace{\frac{\varepsilon^n}{n!} f^{(n)}(\tilde{x})}_{\text{„Restglied"}}$$

$$\text{mit} \quad x_0 < \tilde{x} < x_0 + \varepsilon \quad \text{und} \quad f^{(n)}(x_0) = \left.\frac{d^n f}{dx^n}\right|_{x=x_0}$$

Wichtig ist, daß das Restglied mit $\frac{\varepsilon^n}{n!}$ eingeht, also für große n sehr klein wird.
($\rightsquigarrow$ schätze $f^{(n)}$ ab ...)

Sehr oft wird nur bis zur Ordnung ε entwickelt, d.h. Approximation der Funktion durch Tangente $\rightsquigarrow$ nützliche Formeln

grobes Nachprüfen: differentiere die bis zu einer Ordnung n nach Taylor (s.o.) entwickelte Funktion

$$f(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x-x_0)^2 + a_3 (x-x_0)^3 + \ldots$$

$$f'(x) = \ldots$$

$$f''(x) = \ldots$$

$\rightarrow \quad a_n = f^{(n)}(x_0)/n!$

setze zu Schluß $x - x_0$