Ein "Muss" für jeden Physiker! (.. Elektrotechniker ..)

12.6 *Gedämpfter harmonischer Oszillator ohne und mit Krafteinwirkung (erzwungene Schwingungen)*

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \underbrace{-kx(t)}_{\substack{\text{Federkraft}\\ \text{(Hookesches}\\ \text{Gesetz)}}} - \underbrace{\gamma\frac{dx(t)}{dt}}_{\substack{\text{Dämpfung}\\ \text{Reibung}}} + \underbrace{F(t)}_{\substack{\text{äußere}\\ \text{Kraft}}} \qquad (*)$$

ist inhomogene (F!) lineare DGL 2. Ordnung mit **konstanten** Koeffizienten.

(a) **ohne äußere Kraft** $F(t) \rightsquigarrow$ homogene DGL

$$\text{Ansatz} \quad x(t) = x_0\, e^{At} \to m\, A^2\, x_0\, e^{At} = -k\, x_0\, e^{At} - \gamma\, A\, x_0\, e^{At}$$

$$A^2 + \frac{\gamma}{m}A + \frac{k}{m} = 0$$

$$A_{1,2} = -\frac{\gamma}{2m} \pm \left(\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2 - \underbrace{\frac{k}{m}}_{\text{def. } \omega_0^2} \right)^{1/2}$$

(i) **starke Dämpfung** $\frac{\gamma}{2m} > \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$\begin{aligned} x(t) &= B \exp\left\{ \left(-\frac{\gamma}{2m} + \left(\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} \right)^{1/2} \right) t \right\} \\ &+ C \exp\left\{ \left(-\frac{\gamma}{2m} - \left(\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} \right)^{1/2} \right) t \right\} \end{aligned}$$

bestimme freie Konstanen B, C aus $x(t_0) = x_0$, $\frac{dx}{dt}(t_0) = v_0$

(ii) **schwache Dämpfung** $\frac{\gamma}{2m} < \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$A_{1,2}$ sind komplex!
Trick: nehme $x(t)$ als Realteil (bzw. Imaginärteil) einer komplexen Variablen $z(t) = x(t) + iy(t)$, schreibe DGL für $z(t)$. Da die Koeffizienten der DGL m, k, γ reell sind, ist die ursprüngliche DGL der Realteil (Imaginärteil) dieser DGL: Differentiation ist nach rellem t:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + i\,\frac{dy}{dt}$$