Dann **allgemeine Lösung** der komplexen DGL $\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{k}{m}z(t) - \frac{\gamma}{m}\frac{dz(t)}{dt}$:

$$\begin{aligned} z(t) &= z_{0_1} \exp\left\{\left(-\frac{\gamma}{2m} + i\left(\frac{k}{m} - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2\right)^{1/2}\right)t\right\} \\ &+ z_{0_2} \exp\left\{\left(-\frac{\gamma}{2m} - i\left(\frac{k}{m} - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2\right)^{1/2}\right)t\right\} \end{aligned}$$

mit $z_{0_i} = |z_{0_{1,2}}|e^{i\varphi_{0_{1,2}}}$

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\, z(t) = x(t) &= |z_{0_1}|e^{-\frac{\gamma}{2m}t}\cos\left(\left(\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2\right)^{1/2} t + \varphi_{0_1}\right) \\ &+ |z_{0_2}|e^{-\frac{\gamma}{2m}t}\cos\left(-\left(\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2\right)^{1/2} t + \varphi_{0_2}\right) \end{aligned}$$

beide Teile haben gleiche Form $\quad(\cos(-x) = \cos(x)!)$
$\rightsquigarrow$ allgemeine reelle Lösung

$$\begin{aligned} x(t) &= |z_0|e^{-\frac{\gamma}{2m}t}\cos\left(\left(\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2\right)^{1/2} t + \varphi_0\right) \\ &\overset{\text{Umrechnung}}{=} Be^{-\frac{\gamma}{2m}t}\cos\left(\left(\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2\right)^{1/2} t\right) \\ &+ Ce^{-\frac{\gamma}{2m}t}\sin\left(\left(\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2\right)^{1/2} t\right) \end{aligned}$$

also wieder zwei Parameter $|z_0|, \varphi$ bzw. B, C, die aus $x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = v_0$ zu bestimmen sind.

(iii) **asymptotischer Grenzfall (Kriechfall)** $\frac{\gamma}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$

$A = -\frac{\gamma}{2m}$; gewinne 2.Lösung aus 1.Lösung durch Variation der Konstanten, oder mache gleich Ansatz

$$\begin{aligned} &(a+bt)\,e^{At} \\ (A^2(a+tb) + 2\,A\,b) &= -\frac{k}{m}(a+tb) - \frac{\gamma}{m}(A(a+tb)+b) \\ b(\underbrace{2A + \frac{\gamma}{m}}_{=0}) &= 0 \quad \text{für beliebige } b \qquad \text{o.k. !} \end{aligned}$$

a, b wieder durch Anfangsbedingungen bestimmt!

Bem. auch Limes $\sqrt{\ldots} \to 0$ von $e^{-\frac{\gamma}{2m}t}\left(Ae^{+\sqrt{\ldots}t} + Be^{-\sqrt{\ldots}t}\right)$

mit $A-B \sim \frac{1}{\sqrt{\ldots}}$ und $A+B \sim C$:

$\to e^{-\gamma/2m t}\left(C + \sqrt{\ldots}t\,(A-B) + \frac{(\sqrt{\ldots}t)^2}{2!}C + \ldots\right)$

$A-B \sim \frac{1}{\sqrt{\ldots}}$ $\qquad \frac{(\sqrt{\ldots}t)^2}{2!} \to 0$