**Vektorrechnung bei Verwendung des Differentialoperators $\vec{\nabla}$ (Quelle: [3])**

Achtung: $\phi$ und $\psi$ sind skalare Funktionen, $\vec{U}$ und $\vec{V}$ sind vektorwertige Funktionen.

(a) $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\phi = \vec{\nabla}^2\phi = \Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$

(b) $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = \operatorname{rot}\operatorname{grad}\phi = 0$

(c) $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{V} = \vec{e}_x \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial x\,\partial z}\right)$
$+\vec{e}_y \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y\,\partial z}\right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right)$

(d) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{V} = 0$

(e) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{V} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \vec{\nabla}^2\vec{V} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{V} - \Delta\vec{V}$

(f) $\vec{\nabla} \cdot (\phi\vec{V}) = \phi(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) + \vec{V} \cdot (\vec{\nabla}\phi)$

(g) $\vec{\nabla} \times (\phi\vec{V}) = \phi(\vec{\nabla} \times \vec{V}) - \vec{V} \times (\vec{\nabla}\phi)$

(h) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{U} \times \vec{V}) = \vec{V} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{U}) - \vec{U} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V})$

(i) $\vec{\nabla} \times (\vec{U} \times \vec{V}) = (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{U} - (\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} - \vec{V}(\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) + \vec{U}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V})$

(j) $\vec{\nabla}(\vec{U} \cdot \vec{V}) = \vec{U} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} + \vec{V} \times (\vec{\nabla} \times \vec{U}) + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{U}$

(k) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}\phi \times \vec{\nabla}\psi) = 0$

Mit etwas Übung lassen sich die Ergebnisse aus obiger Tabelle leicht berechnen!

*Anmerkung (zu (j)):* Wir haben bisher die Produktregel angewandt, um (j) zu berechnen, siehe auch Abschnitt 8.2 e).

$$\vec{\nabla}(\vec{U} \cdot \vec{V}) = \underbrace{(\vec{\nabla}\vec{U})}_{\substack{\text{Matrix-}\\ \text{mult.}}} \cdot \vec{V} + \underbrace{(\vec{\nabla}\vec{V})}_{\substack{\text{Matrix-}\\ \text{mult.}}} \cdot \vec{U}$$

In obiger Tabelle erhält man diese Form, indem man den Grassmann'schen Entwicklungssatz anwendet:

$$\vec{U} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = (\vec{\nabla}\vec{V}) \cdot \vec{U} - \vec{U} \cdot \vec{\nabla}\vec{V}\,.$$

Analog für $\vec{V} \times (\vec{\nabla} \times \vec{U})$.

Zu guter Letzt noch einige weitere Hilfsmittel, die durch einfache Rechnung überprüft werden können:

- $\vec{\nabla} f(r) = f'(r)\,\frac{\vec{r}}{r}$ (Kettenregel)
- Für $\vec{a} = \text{const.}$ gilt $\vec{\nabla}\left(\vec{a} \cdot \vec{V}(\vec{r})\right) = \left(\vec{\nabla}\vec{V}(\vec{r})\right) \cdot \vec{a}$, wobei $\vec{\nabla}\vec{V}(\vec{r})$ als Matrizenmultiplikation aufgefaßt wird.
- $\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = (\ \vec{\nabla}\ )\left(\vec{r}\right) = 3$, $\vec{\nabla}\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\vec{\nabla}\right)(\ \vec{r}\ )$. $\vec{\nabla}\vec{r}$ wird „Tensorprodukt" genannt und als Matrixmultiplikation einer Zeile mit einer Spalte verstanden.