- **volle DGL** (inhomogen, linear)

$$y' = a(x)y + b(x)\,; \quad y(x_0) = y_0 \quad (*)$$

zwei Lösungsverfahren:

(a) „Variation der Konstanten"

(i) löse die homogene Gleichung ($b \equiv 0$)

$$y(x) = y_0 \exp \underbrace{\left(\int_{x_0}^{x} dx'\, a(x') \right)}_{A(x)}$$

(ii) und mache Lösungs**ansatz** (!)

$$y(x) = c(x)\, \exp\left(A(x)\right)$$

einsetzen in $(*)$:

$$c(x)\, \underbrace{A'(x)}_{a(x)!}\, e^A + c'(x) e^A = a(x)\, c(x)\, e^A + b(x)$$

$$c'(x) = b(x)\, e^{-A}$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{Anfangsbed.: } (x = x_0) \\ y(x_0) = y_0 \\ \Rightarrow c(x_0) = y_0 \end{array}\right\} \quad c(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} dx'\, b(x')\, e^{-A(x')}$$

$A(x_0) = 0$

$A(x)$

$$\boxed{y(x) = \left[y_0 + \int_{x_0}^{x} dx'\, b(x') \exp\left(- \int_{x_0}^{x'} dx''\, a(x'') \right) \right] \exp\left(+ \int_{x_0}^{x} dx'\, a(x') \right)}$$

(b) Lösung als Summe von Lösung der homogenen Gleichung plus spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

Nur DGL. (keine Anfangsbedingungen): $y' = a(x)y + b(x)$

sei $y^{\text{inh}}(x)$ Lösung („speziell") dieser inhomogenen Gleichung
und $y^{\text{hom}}(x)$ Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung,
dann ist $y^{\text{hom}}(x) + y^{\text{inh}}(x)$ allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung.

Probe:

$$\left(y^{\text{hom}}\right)' + \left(y^{\text{inh}}\right)' = a(x) \left(y^{\text{hom}} + y^{\text{inh}}\right) + b(x)$$

$$\text{mit} \quad \left(y^{\text{hom}}\right)' = a(x)\, y^{\text{hom}} \qquad \left(y^{\text{inh}}\right)' = a(x)\, y^{\text{inh}} + b(x)$$

Die Anfangsbedingung legt dann die Freiheit bei der homogenen Lösung fest.