12. Fourierentwicklung

Vorbemerkungen

Die Fouriertransformation ist ein wichtiges mathematisches Hilfsmittel, das bei zahlreichen Problemen Anwendung findet, z. B. in der Optik und Akustik. Einige Beispiele:

- Schallquellen, die periodisch veränderlichen Druck auf das Ohr ausüben. Die Aufgabe hierbei ist, das Signal nach Frequenzen zu zerlegen wie das menschliche Ohr.
- Wir erinnern uns, dass die Kraft auf einen gedämpften, harmonischen Oszillator als periodisch angenommen wurde. Man kann nun eine beliebige zeitlich veränderliche Kraft nach periodischen Kräften $F(\omega)e^{i\omega t}$ zerlegen.
- Wir betrachten vorab kurz Druckwellen, z. B. Schallwellen. Später werden wir uns mit Schallwellen genauer auseinandersetzen. Für diese gilt die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\kappa}{\rho_0}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2}$$

Mit dem Separationsansatz $P(x,t) = f(x)g(t)$ erhält man

$$f(x)\frac{d^2 g}{dt^2} = v^2 \frac{d^2 f}{dx^2} g(t) \Longrightarrow \frac{\frac{d^2 g}{dt^2}}{g} = v^2 \frac{\frac{d^2 f}{dx^2}}{f} = C = \text{const.}$$

wobei für die Ausbreitungsgeschwindigkeit v der Schallwellen folgende Beziehung mit der Kompressibilität κ und der Dichte ρ_0 des Mediums gilt: $v^2 = \frac{\kappa}{\rho_0}$; damit ist $\alpha^2 = \frac{-C}{v^2}$ bei einem Lösungsansatz $f(x) = f_+ e^{i\alpha x} + f_- e^{-i\alpha x}$.

Soll nun f periodisch (z. B. 2π-periodisch) sein, fordert man als Randbedingung z. B. $f(0) = f(2\pi) = 0$. Damit erhält man $f(x) = f_0 \sin(\alpha x)$ mit $\alpha = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \dots = \pm\frac{2\pi}{\lambda}$ und $\lambda = 4\pi, 2\pi, \frac{4}{3}\pi, \dots$ Dies ergibt dann $g(t) = g_0 \sin(\alpha v t + \phi) = g_0 \sin(\frac{2\pi}{\lambda} v t + \phi)$.

Es gilt $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{\lambda} v \Longrightarrow \lambda\nu = v$. Wir erhalten eine stehende Welle als Ergebnis.

Da es sich bei der Wellengleichung um eine lineare Differentialgleichung handelt, ist die Superposition von Lösungen wiederum eine Lösung:

$$p(x,t) = \sum_n p_n \sin\left(\frac{n}{2}x\right) \sin\left(\frac{n}{2}vt + \phi_n\right)$$

Die p_n und ϕ_n sind z. B. durch Anfangsbedingungen wie $p(x,0)$ und $\frac{\partial}{\partial t}p(x,t)\big|_{t=0}$ festzulegen.

12.0. Einleitung

Gesucht wird eine Möglichkeit eine beliebige Funktion $f(x)$ nach einem Satz von Funktionen $f_n(x)$ zu entwickeln, d. h. als Linearkombination darzustellen[9]:

$$\boxed{f(x) = \sum_n a_n f_n(x)}$$

Im Allgemeinen wird es sich dabei um einen unendlichen Satz von Funktionen handeln; die f_n bilden dabei eine Vektorraumbasis.

[9] Jean Baptist Joseph, Baron de Fourier (1768–1830)

Beispiel: Die Taylorentwicklung (o.B.d.A. bei $x_0 = 0$)

$$f(x) = \sum_{n=1} \infty \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}\bigg|_{x=0} x^n \Longrightarrow f_n = x^n$$

x^n ist Eigenfunktion zum Differentialoperator $x\frac{d}{dx}$ und eindeutig bestimmt für ganze nichtnegative n.

12.1. Fourierentwicklung für periodische Funktionen, Funktionen im endlichen Intervall

Betrachen wir Funktionen auf dem endlichen Intervall $\left[-\frac{L}{2}; +\frac{L}{2}\right]$, zunächst mit den Bedingungen $f(-\frac{L}{2}) = f(\frac{L}{2})$ und $f'(-\frac{L}{2}) = f'(\frac{L}{2})$. Diese Funktionen lassen sich mittels $f(L+x) = f(x)$ auf die gesamte reelle Achse fortsetzen und sind dann periodische Funktionen.

Gesucht wird nun ein vollständiges[10] System von Funktionen, nach denen f entwickelt werden kann; diese sollten daher ebenfalls periodisch sein. Dazu sucht man Eigenfunktionen des linearen Differentialoperators $-\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2$:

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 f_\lambda(x) = \lambda f_\lambda(x)$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind bereits aus dem Abschnitt über Lineare Differentialgleichungen bekannt, der Ansatz lautet: $f_\lambda(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$

- $\omega^2 f_\lambda(x) = \lambda f_\lambda(x) \Longrightarrow \lambda = \omega^2$
- $f\left(-\frac{L}{2}\right) = f\left(+\frac{L}{2}\right)$ bzw. $f(L) = f(0)$ und $f'\left(-\frac{L}{2}\right) = f'\left(+\frac{L}{2}\right) \Longrightarrow \omega L = 2\pi n$.
  $\boxed{\omega = \frac{2\pi n}{L}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Daraus kann man nun folgern:

(i) Es gibt einen Satz von Funktionen der Gestalt

$$\left\{\cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)\right\}, \quad \left\{\sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)\right\},$$

welche im Funktionenraum bzgl. des *inneren Produkts*

$$(f,g) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx\, f(x)g(x)$$

wechselweise senkrecht aufeinander stehen.

Zum Beweis: $D := -\left(\frac{d}{dx}\right)^2$ ist ein selbstadjungierter (symmetrischer) Operator auf periodischen (und differenzierbaren) Funktionen (vgl. Sätze: Sturm – Liouville). Durch zweifache partielle Integration und unter Beachtung der L-Periodizität von f und g erhält

[10] Beweis folgt später

man wegen der Periodizität von f und g

$$\begin{aligned}
(f, Dg) &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx\, f(x) \left(-\left(\frac{d}{dx}\right)^2\right) g(x) \\
&= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \left(\frac{d}{dx} f(x)\right)\left(\frac{d}{dx} g(x)\right) - f(x)\left(\frac{d}{dx} g(x)\right)\Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \\
&= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \left(\left(-\left(\frac{d}{dx}\right)^2\right) f(x)\right) g(x) + \frac{d}{dx} f(x) g(x)\Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \\
&= (Df, g)
\end{aligned} \tag{12.1}$$

Damit gilt für eine Eigenfunktion f_λ, d.h. $Df_\lambda = \lambda f_\lambda$,

$$(f_{\lambda'}, Df_\lambda) = \lambda (f_{\lambda'}, f_\lambda), \quad (Df_{\lambda'}, f_\lambda) = \lambda' (f_{\lambda'}, f_\lambda)\,.$$

Nach (12.1) gilt somit $(\lambda - \lambda')(f_{\lambda'}, f_\lambda) = 0$, also $(f_{\lambda'}, f_\lambda) = 0$ für $\lambda \neq \lambda'$.

(ii) Der Definitionsbereich der $\{f\}$ und $\{g\}$ in (i) ist gleich; darauf kommen wir später zurück.

(iii) Es liegt eine Entartung von $\left\{\cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right), \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)\right\}$ vor. Wir können direkt nachrechnen (partielle Integration), dass mit obiger Definition auch die Funktionen mit gleichem n senkrecht aufeinander stehen; wir werden das im nächsten Abschnitt begründen.

(iv) Es bleibt noch die Normierung von $\sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)$ bzw. $\cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)$ zu überprüfen. Dazu berechnen wir die Normierung für die Quadrate der Funktionen und verwenden das bekannte Ergebnis für die Integration von $\sin^2(x)$ bzw. $\cos^2(x)$:

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \sin^2\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) = \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} dy \sin^2(\pi n y) = \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} dy \frac{\left(\sin^2 + \cos^2\right)(\pi n y)}{2} = \frac{L}{2}$$

Die Rechnung für $\cos^2\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)$ ergibt dasselbe Resultat.

Damit bilden also $\left\{\frac{1}{\sqrt{L}}, \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right), \sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)\right\}$ ein Orthonormalsystem.

Die Fourier-Entwicklung erhält man, indem man $f(x)$ als Summe über die Basisfunktionen s_n und c_n und sog. Projektionsfaktoren a_n und b_n schreibt, wobei diese Faktoren von der Projektion von $f(x)$ auf die Basisfunktionen herrühren:

$$s_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right), \quad c_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right), \quad c_0 = \frac{1}{\sqrt{L}}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= (f, c_n) = \sqrt{\frac{2}{L}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) f(x) \\
b_n &= (f, s_n) = \sqrt{\frac{2}{L}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) f(x) \\
\frac{a_0}{\sqrt{2}} &= (f, c_0) = \frac{1}{\sqrt{L}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx f(x)
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich folgende Darstellung für $f(x)$:

$$f(x) = (c_0, f)c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{(c_n, f)c_n(x) + (s_n, f)s_n(x)\}$$

oder

$$\boxed{f(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\frac{a_0}{2} + \sqrt{\frac{2}{L}}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\right\}}$$

Obige Gleichungen gelten für periodische, stetig differenzierbare Funktionen.

Die Fourier-Entwicklung mit obigen Fourierkoeffizienten a_n und b_n besitzt optimale Konvergenz und ist eindeutig. Um die Behauptung zu beweisen, betrachten wir das Fehlerquadrat Q, also die quadratische Abweichung der Fourierentwicklung (wobei wir a_n und b_n der Einfachheit halber zu a_n zusammenfassen) von der Funktion $f(x)$ selbst:

$$\begin{aligned} Q &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \left(f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n f_n(x)\right)^2 = \left(f - \sum_{n=0}^{N} a_n f_n, f - \sum_{n=0}^{N} a_n f_n\right) \\ &= (f,f) + \sum_{n=0}^{N} a_n^2 (f_n, f_n) - \sum_{n=0}^{N} \{a_n(f, f_n) + a_n(f_n, f)\} \end{aligned}$$

Q ist dann extremal, wenn $\frac{dQ}{da_k} = 0 \Leftrightarrow 2a_k - 2(f, f_k) = 0 \Leftrightarrow a_k = (f, f_k)$, also wenn die a_k Fourierkoeffizienten sind.

Das Fehlerquadrat ergibt sich dann zu: $Q = (f,f) - \sum_{n=0}^{N} a_n^2$; falls $\lim_{N\to\infty} Q = 0$ sprechen wir von einem vollständigen Funktionensystem $\{f_n\}$ für die Klasse der Funktionen (in diesem Fall periodische, stetig differenzierbare Funktionen). Die f_n sind Basisvektoren eines ∞-dimensionalen Vektorraums mit innerem Produkt (ein sog. Hilbertraum).

Falls obige Bedingungen (i) und (ii) erfüllt sind, liefert der lineare Differentialoperator D stets ein vollständiges Funktionensystem. Zum Schluß dieses Abschnitts übernehmen wir noch zwei Sätze aus der Mathematik über das Konvergenzverhalten der Fourier-Reihen:

($*$) Für jede beschränkte und im Intervall stückweise stetige Funktion konvergiert die Fourierreihe im Mittel gegen die gegebene Funktion, d. h. der quadratische Fehler geht gegen null, und es gilt die Parsevalsche Gleichung

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx f^2 = (f,f) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$$

($**$) Lässt sich das Definitionsintervall der Funktion in endlich viele Intervalle zerlegen, in denen die Funktion stetig und monoton ist, und sind an den Unstetigkeitsstellen der obere und untere Grenzwert f_+ bzw. f_- definiert, so konvergiert die Fourierreihe dieser Funktionen an stetigen Stellen gegen $f(x)$ und an unstetigen Stellen gegen $\frac{f_+ + f_-}{2}$.

Die Koeffizienten $\{a_n, b_n\}$ sind die Fourier-Transformierten von $f(x)$.

$$f(x) \Longleftrightarrow \{a_n, b_n\}$$

12.2. Komplexe periodische Funktionen

Gesucht sind Lösungen von $i\frac{d}{dx}f_\omega(x) = \omega f_\omega(x)$ (ω reell) für komplexwertige Funktionen f mit $f_\omega(0) = f_\omega(L)$.

Mögliche Lösungen sind $f_{\omega_n}(x) = ae^{-i\omega_n x}$ mit $\omega_n = \frac{2\pi n}{L}$ wie in Abschnitt 12.1, d. h. $\left\{e^{\frac{i2\pi n}{L}}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right\}$ bilden ein Basissystem.

$D = i\frac{d}{dx}$ ist *selbstadjungierter* Operator für das innere Produkt im Vektorraum der komplexwertigen Funktionen,

$$\begin{aligned}
(f,g) &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx f^*(x)g(x) \\
(f,Dg) &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx f^* \left(i\frac{d}{dx}\right) g(x) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \left(i\frac{d}{dx}f\right)^* g(x)
\end{aligned}$$

Wegen der Periodizität fällt hier wieder der Randterm heraus.

Der Beweis zur Orthogonalität läßt sich analog zu Abschnitt 12.1 führen, hier liegt jedoch *keine Entartung* vor. Es ergibt sich aber auch direkt

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \left(e^{\frac{i2\pi n' x}{L}}\right)^* e^{\frac{i2\pi n x}{L}} = \frac{L}{i2\pi(n-n')} e^{\frac{i2\pi(n-n')x}{L}} \Bigg|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \begin{cases} 0 & n \neq n' \\ L & n = n' \end{cases} ,$$

die normierten Basisvektoren sind $e_n = \frac{e^{\frac{i2\pi n x}{L}}}{\sqrt{L}}$.

Komplexe Fouriertransformation:

$$\boxed{\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{1}{\sqrt{L}} e^{\frac{i2\pi n x}{L}} \\
a_n &= (e_n, f) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \frac{1}{\sqrt{L}} e^{\frac{i2\pi n x}{L}} f(x)
\end{aligned}}$$

Beispiel (zu 12.1):

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases} \qquad L = 1$$

ist beispielhaft für den Schalldruck $p(t) = p_0 + f(t)$. Die Fourierentwicklung ergibt

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{2}\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sqrt{2}a_n\cos(2\pi nx) + \sqrt{2}b_n\sin(2\pi nx)\right\} \\
a_n &= \sqrt{2}\int_0^L dx\cos(2\pi nx)f(x) = \sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{2}} dx\cos(2\pi nx) \\
&= \sqrt{2}\frac{\sin(2\pi nx)}{2\pi n}\bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\frac{\sin(\pi n)}{2\pi n} = 0 \quad (n>0) \\
a_0 &= \sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{2}} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
b_n &= \sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{2}} dx\sin(2\pi nx) = \sqrt{2}\left(-\frac{\cos(2\pi nx)}{2\pi n}\right)\bigg|_0^{\frac{1}{2}} \\
&= -\sqrt{2}\left(\frac{\cos(\pi n)-1}{2\pi n}\right) = \sqrt{2}\frac{(1-(-1)^n)}{2\pi n}\,,
\end{aligned}$$

zusammen also

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-(-1)^n)}{\pi n}\sin(2\pi nx)$$

mit $f(0) = \frac{1}{2} = f\left(\frac{1}{2}\right)$, dem Mittelwert von 0 und 1.

12.3. Fourierentwicklung im unendlichen Intervall

Bisher hatten wir Fourierreihen nur für auf dem endlichen Intervall L definierte Funktionen und eventuell periodische fortgesetzte Funktionen betrachtet. Unser Ziel in diesem Abschnitt ist es, die Fourierentwicklung für beliebige Funktionen auf einem unendlichen Intervall zu betrachten ($L \to \infty$).

Zunächst sei x die Zeit t (dann wäre es besser $L \to T$ umzutaufen). Aus Abschnitt 12.1 kennen wir die Beziehung $\omega_n = 2\pi\frac{n}{L} = 2\pi\nu$. Für $L \to \infty$ folgt $\nu \to 0$, d. h. die Frequenzen werden „dicht“. Für $\epsilon := \frac{2\pi}{L}$ gilt natürlich ebenso $\epsilon \to 0$ ($L \to \infty$).

Betrachten wir

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\underbrace{(\omega_{n+1}-\omega_n)}_{=\epsilon}\frac{\sqrt{L}}{2\pi}a_n e^{i\omega_n x}$$

und

$$g(\omega_n) = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{2\pi}}a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{-i\omega_n x}f(x)dx\,,$$

so geht $f(x)$ für $L \to \infty, \epsilon \to 0$ in ein Integral über und wir erhalten

$$\boxed{\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, g(\omega)e^{i\omega x} \\
g(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)e^{-i\omega x}
\end{aligned}}$$

Diese Fouriertransformation ist eine (lineare) Integraltransformation. Wir werden in diesem Abschnitt noch weitere Transformationen kennenlernen, z. B. die Laplace-Transformation.

Anmerkung: Für die Fouriertransformation existieren verschiedene Notationen. In der sog. Cambridge-Notation wird der Faktor $\frac{1}{2\pi}$ der Funktion $f(x)$ zugeordnet, für gewöhnlich verteilt man ihn jedoch symmetrisch auf $f(x)$ und $g(\omega)$.

Sei $f(x)$ eine reellwertige Funktion. Dann gilt

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, g^*(\omega) e^{-i\omega x} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{-\infty} d\bar{\omega}\, g^*(-\bar{\omega}) e^{i\bar{\omega}x} \\ &= f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, g(\omega) e^{i\omega x}\,, \end{aligned}$$

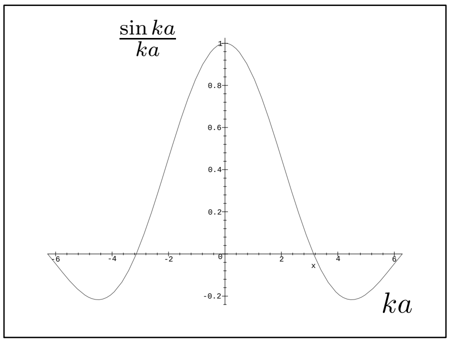
also $g^*(-\omega) = g(\omega)$ (oft: $g(\omega) \to \tilde{f}(\omega)$).

Falls x sich nicht auf die Zeit, sondern eine räumliche Koordinate bezieht, schreibt man üblicherweise k (Wellenzahl) statt ω.

Beispiele zur Fouriertransformation:

(i) $f(x) = \begin{cases} 1 & -a \le x \le +a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \tilde{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, e^{-ikx} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} dx\, e^{-ikx} \\ &= \frac{1}{-i\sqrt{2\pi}} \left(e^{-ika} - e^{ika}\right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, a\, \frac{\sin ka}{ka} \end{aligned}$$



Diese Funktion beschreibt die Beugung von Wellen an einem Spalt: Für Wellen gilt $\omega^2 = c^2k^2 = c^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2$. Bei Beugung an einem Spalt wird die Wellenzahl zerlegt in einen Anteil parallel zum Spalt und einen Anteil senkrecht zum Spalt: $k^2 = k_{||}^2 + k_{\perp}^2$. In unserem obigen Fall ist k durch $k_{||} = k \sin\alpha$ zu ersetzen. Für kleine Winkel gilt die Abschätzung $\sin\alpha \approx \alpha$. Für die Intensität erhält man $\tilde{f}^2(k_{||}) \approx \frac{2}{\pi} a^2 \frac{\sin^2(ka\alpha)}{(ka\alpha)^2}$.

(ii) $f(x) = e^{-\alpha x^2}$

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\alpha x^2} e^{-i\omega x} \stackrel{(\dagger)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\alpha(x^2 + \frac{i\omega}{2\alpha})^2} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \int_{-\infty+\frac{i\omega}{2\alpha}}^{\infty+\frac{i\omega}{2\alpha}} du\, e^{-\alpha u^2} \stackrel{(\ddagger)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} du\, e^{-\alpha u^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \end{aligned}$$

($\dagger$): Quadratische Ergänzung im Exponenten
($\ddagger$): Funktionentheorie: Satz von Cauchy ... (siehe letzter Abschnitt)

$\tilde{f}(\omega)$ beschreibt wieder eine Gauß'sche Glockenkurve.

Jetzt wollen wir noch kurz zwei weitere Transformationen angeben:

. **Laplace-Transformation** Diese Transformation findet in der Physik häufige Anwendung, zum Beispiel bei Einschaltvorgängen.

$$F(p) = L[f] = \int_0^\infty dt\, e^{-pt} f(t)$$

Ihre Umkehrung ist

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\, i} \int_{C-i\,\infty}^{C+i\,\infty} dz\, F(z)\, e^{zt}$$

. **Mellin-Transformation**

$$F(p) = M[f] = \int_0^\infty dt\, t^{p-1} f(t)$$

Beide Transformationen sind *lineare Integraltransformationen*, welche sich zur Behandlung linearer Differentialgleichungen eignen. Da wir im Rahmen dieser Vorlesung nicht weiter darauf eingehen wollen, verweisen wir den interessierten Leser auf die Funktionentheorie.

12.4. Fouriertransformation von Ableitungen, „Faltungen"

- Wir bilden die Ableitung $\frac{df}{dx}$ mit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \tilde{f}(k) e^{ikx}$:

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(ik\tilde{f}(k) e^{ikx} \right) dk \Longrightarrow \widetilde{\left(\frac{df}{dx}\right)}(k) = ik\tilde{f}(k)$$

- *Faltung* Wir bilden

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(y)\, g(x-y)$$

mit

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk'\, \tilde{f}(k') e^{ik'y}$$

und

$$g(x-y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk''\, \tilde{g}(k'') e^{ik''(x-y)} \,.$$

Die darauf angewandte Fouriertransformation ergibt

$$\begin{aligned} \tilde{h}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx h(x) e^{-ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(y)\, g(x-y) e^{-ik(x-y)-iky} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} d(x-y) g(x-y) e^{-ik(x-y)}\, f(y) e^{-iky} = \tilde{g}(k)\, \tilde{f}(k)\,! \end{aligned}$$

Eine Faltung geht bei Fouriertransformation also in ein Produkt aus Fouriertransformationen über. Umgekehrt kann man ebenso aus einem Produkt von Fouriertransformationen durch Rücktransformation eine Faltung erzeugen.

12.5. Parseval'sche Gleichung für Fouriertransformationen (im unendlichen Bereich)

In Abschnitt 12.1 haben wir für endliche L gezeigt:

$$(f, f) = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} f^*(x) f(x) dx \overset{\text{Orthogonalität!}}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^2$$

Später (Abschnitt 12.3) haben wir dann L gegen unendlich streben lassen. Die Summe über die a_n geht dann über in ein Integral: $\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, \frac{L}{2\pi}$. Mit $\frac{\sqrt{L}}{\sqrt{2\pi}} a_n = g(\omega_n)$ folgt

$$(f, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x) f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g^*(\omega) g(\omega) d\omega$$

Dafür sollten f und g „quadratintegrabel" sein.

Bemerkung: Wir betrachten das innere Produkt von zwei Eigenfunktionen $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} = f_k(x)$:

$$(f_k, f_{k'}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, e^{-ikx} e^{+ik'x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, e^{-i(k-k')x} = ? \tag{12.2}$$

Für diskrete k konnten wir obigen Ausdruck schreiben als $\delta_{k\,k'}$, wobei hier das Kronecker-Symbol gemeint ist. In (12.2) handelt es sich aber um eine Funktion von $(k - k')$. Die Lösung dieses Problems führt uns zur Dirac'schen δ-Funktion.

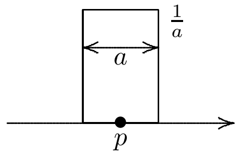
13. Dirac'sche δ-Funktion, Distributionen

13.1. Die Dirac'sche δ-Funktion

Wir betrachten eine lineare Integraltransformation

$$\boxed{F(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \delta(p-x)\, f(x) \stackrel{!}{=} f(p)} \tag{13.1}$$

Das Integral soll also genau den Wert von f an der Stelle p annehmen, wobei f eine beliebige (integrable) Funktion ist. Zunächst ist klar, daß $\delta(p-x)$ keine gewöhnliche Funktion sein kann. Wir wählen zur Berechnung zunächst eine Kastenfunktion



$$\delta_a(p-x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a} & \text{für } |p-x| \le \dfrac{a}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Offensichtlich ist $\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \delta(p-x) = 1$. Nach dem Mittelwertsatz folgt mit $\frac{-a}{2} \le (p-\bar{x}) \le \frac{a}{2}$

$$F_a(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \delta_a(p-x)\, f(x) = f(\bar{x})$$

Zwar ist $\lim_{a\to 0} F_a(p) = f(p)$, wir können den Limes aber nicht unter das Integral ziehen. $F_a(p)$ ist eine lineare Integraltransformation, $\lim_{a\to 0} F_a(p)$ aber nicht! Jedoch ergeben die $F_a(p)$ für $a \to 0$ eine *Folge von linearen Funktionalen*, die in einem vollständigen metrischen Raum gegen das δ-Funktional konvergieren.

Gleichung (13.1) ist also symbolisch zu verstehen. Solche Funktionale bezeichnet man als *Distributionen* (Funktionen, die nur unter dem Integral existieren).

Anmerkung: In der Mathematik ist ein lineares Funktional eine lineare Abbildung von einem Vektorraum bzw. Funktionenraum (Dualraum) auf einen Zahlenraum. Lineare Integraltransformationen sind spezielle Funktionale, welche in der linearen Algebra auch durch ein inneres Produkt dargestellt werden. Auch Gleichung (13.1) ist ein solches inneres Produkt.

13.2. Fouriertransformation und δ-Funktion

Wir setzen $a_n = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} d\bar{x}\, f(\bar{x}) e^{-2\pi i n \frac{\bar{x}}{L}}$ in $f(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{2\pi i n \frac{x}{L}}$ ein und erhalten

$$f(x) = \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} d\bar{x}\, f(\bar{x}) e^{2\pi i n \frac{x-\bar{x}}{L}}$$

Dieser Ausdruck beschreibt ein δ-Funktional $f(\cdot) \to f(x)$. Durch Vertauschung von Integration und Summation ergibt sich formal

$$f(x) \text{ „}=\text{“} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} d\bar{x} \left\{ \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i n \frac{x-\bar{x}}{L}} \right\} f(\bar{x})$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i n \frac{x-\bar{x}}{L}} = \delta(x-\bar{x}) \quad \left(\text{hier auf } \left[-\tfrac{L}{2}; \tfrac{L}{2}\right]\right)}$$

Für den Grenzfall $L \to \infty$ erhalten wir mit $\Delta\omega = \frac{2\pi}{L}$ (s. Abschnitt 12.1)

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{i\omega(x-\bar{x})} = \delta(x-\bar{x})\,.}$$

Damit vereinfacht sich auch die Orthogonalitätsbeziehung (siehe S. 31):

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-i(k-k')x} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{x}\, e^{-i(k-k')\bar{x}} \overset{\text{s. o.}}{=} \delta(k-k')\,,$$

d. h. δ_{ik} ist durch $\delta(k-k')$ zu ersetzen.

13.3. Rechnen mit δ-Funktionen

Anmerkung: Wenn Sie sich unsicher fühlen, dann setzen Sie zunächst ein Folge $\{\delta_n(x)\}$ von normalen Funktionen ein und bilden dann den Grenzwert für $n \to \infty$, d. h. $a \to 0$.

Sei beispielsweise $\delta_n(x) = n\, e^{-\pi n^2 x^2}$. Dann ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, n\, e^{-\pi n^2 x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{-\pi y^2} = 1$$

und $\delta_n(x)$ eine Gauß'sche Glockenkurve, welche mit wachsendem n ein immer schärferes, steileres Maximum erreicht.

Für die δ-Funktion gelten folgende Rechenregeln

(i) $\int_{-\infty}^{+\infty} dx'\, \delta(x'-x) f(x') = f(x)$

(ii) Substitution: $x'' = -x' \Longrightarrow \delta(x') = \delta(-x')$, denn

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} dx'\, \delta(x') f(x') &= -\int_{+\infty}^{-\infty} dx''\, \delta(-x'') f(-x'') \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx''\, \delta(-x'') f(-x'') = f(0)\,.\end{aligned}$$

(iii) $\delta(ax') = \frac{1}{|a|}\delta(x')$, denn

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx'\, \delta(ax') f(x') \overset{a\geq 0}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(ax')}{a}\, \delta(ax') f(\frac{ax'}{a}) = \frac{1}{a} f(0)\,.$$

Die Rechnung für $a < 0$ läuft analog.

(iv) Wir berechnen $\delta(f(x))$ für einfache Nullstellen von $f(x)$ bei $x_1, \ldots, x_n$, dort gilt also $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \neq 0$. In kleinen Umgebungen der Nullstellen ist $f(x) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_i} (x-x_i)$ (Taylorentwicklung bis zur ersten Ordnung) und damit nach (iii)

$$\delta(f(x)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\left|\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_i}\right|}\delta(x-x_i)$$

(v) Die Ableitung einer δ-Funktion erhalten wir durch partielle Integration, wobei der Randterm wegen der Auswertung bei $-\infty$ und $+\infty$ verschwindet:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\delta'(x)f(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\delta(x)f'(x) = -f'(0)$$

Diese zunächst fraglich erscheinende partielle Integration einer Distribution läßt sich rechtfertigen, indem wir wieder zuerst die Formel für eine Folge von Funktionen durchführen und dann den Grenzwert bilden.

13.4. Mehrdimensionale δ-Funktionen

Wir wollen die dreidimensionale δ-Funktion $\delta_3(\vec{x}-\vec{x}_0)$ berechnen, für die gelten soll:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_3 \delta_3(\vec{x}-\vec{x}_0) f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)\,.$$

Wir können daher auch formal $\delta_3(\vec{x}-\vec{x}_0) = \delta(x_1 - x_{0_1})\delta(x_2 - x_{0_2})\delta(x_3 - x_{0_3})$ schreiben, wobei die drei eindimensionalen δ-Funktionen getrennt unter den jeweiligen Integralen zu berechnen sind. *Vorsicht:* Das Produkt von Distributionen, z. B. $\delta^2(x)$ ist nicht wohldefiniert!

Kommen wir zurück zur Elektrostatik. Dort hatten wir folgende Gesetzmäßigkeiten gefunden:

- $\operatorname{div}\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$
- $\int_A d\vec{a}\cdot\vec{E} = \int_V d^3r\,\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ (Gauß'sches Gesetz)
- $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r}-\vec{r}')$ (Coulombgesetz für kontinuierliche Ladungsverteilung)

Für eine Punktladung bei $\vec{r}=0$ gilt dann $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q(\vec{r})}{|\vec{r}|^3}$ und damit $\operatorname{div}\vec{E} = 0$ für $\vec{r}\neq 0$, weil dort $\rho(\vec{r})\equiv 0$.

Für eine Punktladung erhalten wir somit

$$\boxed{\rho(\vec{r}) = \delta_3(\vec{r})}$$

Setzen wir dies in obige Gleichungen ein (der geneigte Leser möge dies zur Übung tun), erhalten wir das korrekte Resultat.

Betrachten wir nun $\Delta\varphi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$, wobei

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\,\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}'-\vec{r}|}\,.$$

Mit $\rho(\vec{r}) = -\delta_3(\vec{r})\varepsilon_0$ ist $\Delta\varphi = \delta_3(\vec{r})$ und

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{-\varepsilon_0}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\,\frac{d_3(\vec{r}')}{|\vec{r}'-\vec{r}|} = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{r}|} = \mathrm{G}(\vec{r})$$

Diese Funktion ist das *Inverse* des Laplace-Operators und wird für gewöhnlich als *Greens-Funktion* bezeichnet. Wir setzen die Greens-Funktion in die allgemeine Formel für $\varphi(\vec{r})$ ein und erhalten

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}'-\vec{r}|} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\int d^3r'\,\mathrm{G}(\vec{r}-\vec{r}')\,\rho(\vec{r}')\,.$$

Der so entstandene Ausdruck hat die Form einer Matrixmultiplikation $\sum_{r'}\mathrm{G}_{r\,r'}\rho_{r'}$!

13.5. Auffinden der Greensfunktion mit Fouriertransformationen

Wir betrachten

$$\boxed{\Delta G(\vec{r}) = -\delta_3(\vec{r})}$$

und führen die Fouriertransformation von $G(\vec{r})$ ein:

$$\begin{aligned}
\tilde{G}(\vec{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3r\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} G(\vec{r}) \\
G(\vec{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3k\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \tilde{G}(\vec{k}) \\
\Delta G(\vec{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3k\, (i\vec{k})^2 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \tilde{G}(\vec{k}) = -\delta_3(\vec{r}) \\
& \quad \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \vec{\nabla}\cdot\left((i\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right) = (i\vec{k})^2 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right) \\
\text{Umkehrung:} \quad (-\vec{k}^2)\,\tilde{G}(\vec{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3r\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \underbrace{\Delta G(\vec{r})}_{\delta_3(\vec{r})} = \frac{-1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

Dies bedeutet

$$\tilde{G}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\vec{k}^2}$$

Die Umkehrung wiederum ergibt

$$\begin{aligned}
G(\vec{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k\, e^{i\overbrace{\vec{k}\cdot\vec{r}}^{|\vec{k}|r\cos\vartheta}} \frac{1}{\vec{k}^2} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty k^2 dk \int_{-1}^{+1} d\cos\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{k^2}\, e^{ikr\cos\vartheta} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk\, \frac{e^{ikr\cos\vartheta}\Big|_{-1}^{+1}}{ikr} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk\, \frac{2i\,\sin kr}{ikr} \\
&\overset{x:=kr}{=} \frac{2}{(2\pi)^2 r} \underbrace{\int_0^\infty dx\, \frac{\sin x}{x}}_{=\frac{\pi}{2},\ \text{siehe Funktionentheorie}} \\
&= \frac{1}{4\pi r}
\end{aligned}$$

Dies entspricht den vorherigen Berechnungen der Greens-Funktion!