14. Lineare partielle Differentialgleichungen, die Wellengleichung

14.1. DGL-Typen, Anfangsbedingungen, Randbedingungen

14.1.1. Elliptischer Typ

Die Poisson'sche Differentialgleichung haben wir schon kennengelernt:

$$\Delta\phi(r) = -\frac{\rho(r)}{\epsilon_0},$$

wobei $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ein Differentialoperator vom elliptischen Typ ist.

14.1.2. Hyperbolischer Typ

Die Wellengleichung (auf die wir in Kürze weiter eingehen werden) ist vom hyperbolischen Typ:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) A(x, y, z, t) = 0$$

14.1.3. Parabolischer Typ

Die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x\,, t) = \frac{1}{\kappa}\frac{\partial u}{\partial t}$$

ist von parabolischem Typ, ebenso die Schrödingergleichung:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi(x,\, t) = -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(x,\, t) + \dots$$

allerdings ist die Funktion ϕ hier komplexwertig.

14.1.4. Rand- oder Anfangsbedingungen

Um bei Differentialgleichungen eindeutige Lösungen zu finden, muss man Rand- und/oder Anfangsbedingungen stellen (ein reichhaltiges mathematisches Thema!), z.B. ist bei der Poisson-Gleichung das Potential ϕ (Dirichlet'sche Randbedingung) oder auch $\vec{\nabla}\phi$ (Neumannsche Randbedingung) auf der Leiteroberfläche vorgegeben.

14.2. Herleitung der Wellengleichung

Wir leiten nun die Wellgleichung aus den Maxwellschen Gleichungen für das Vakuum (strom- und ladungsfrei) her:

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0, \quad \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$
$$\operatorname{div}\vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{E} = \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) &= \vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot\vec{E} - \Delta\vec{E} = -\mathrm{rot}\,\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{B}) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right),\end{aligned}$$

es gilt also

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2}\right)\vec{E}(\vec{r},t) = 0 \tag{14.1}$$

Völlig analog leitet man für das magnetische Feld her:

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{B} &= \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot\vec{B} - \Delta\vec{B} = \mathrm{rot}\,\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) \\ &= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right),\end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2}\right)\vec{B}(\vec{r},t) = 0\,.$$

14.3. Lösung der Wellengleichung in einer Dimension

Wir gehen von der eindimensionalen Form $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)A(x,\,t) = 0$ aus, einer lineare Differentialgleichung; man kann ihre Lösungen also superponieren.

Mit dem Separationsansatz $A(x,\,t) = f(x)\,g(t)$ kann man obige Gleichung umschreiben:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}f(x)\right)g(t) - \frac{1}{c^2}f(x)\left(\frac{d^2}{dt^2}g(t)\right)$$

oder besser:

$$\frac{\frac{d^2f(x)}{dx^2}}{f(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{\frac{d^2g(t)}{dt^2}}{g(t)}$$

Die linke Seite ist nun nur von x, die rechte nur von t abhängig, d.h. beide Seiten sind gleich einer von x, t unabhängigen Konstanten $-k^2$. Das führt uns zu zwei bereits bekannten Differentialgleichungen (vgl. harmonischer Oszillator):

$$f''(x) = -k^2\,f(x),\;\; g''(t) = -k^2c^2\,g(t)\,.$$

Die allgemeinen Lösungen im Komplexen bei festem k sind dann

$$f(x) = A\,e^{ikx} + B\,e^{-ikx} \quad \text{und} \quad g(t) = C\,e^{ikct} + D\,e^{-ikct}\,,$$

wobei A, B, C, D von k abhängige Konstanten sind.

Damit erhalten wir

$$A(x,t) = AC\,e^{ik(x+ct)} + BD\,e^{-ik(x+ct)} + AD\,e^{ik(x-ct)} + BC\,e^{-ik(x-ct)}$$

Die allgemeine Lösung mit obigem Ansatz ist schließlich:

$$A(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dk\,\left(a(k)\,e^{ik(x+ct)} + b(k)\,e^{-ik(x-ct)}\right)$$

mit $a(k) = a^*(-k)$, $b(k) = b^*(-k)$ für reelle $A(x,t)$.

(i) Betrachten wir folgende Randbedingungen:

1. $A(0,\, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk \left(a(k)\, e^{ikct} + b(k)\, e^{-ikct}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk \left(a(k) + b(-k)\right) e^{ikct} \equiv 0$

2. $A(L,\, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk \left(a(k)\, e^{ikL}\, e^{ikct} + b(k)\, e^{ikL}\, e^{-ikct}\right)$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk \left(a(k)\, e^{ikL} + b(-k)\, e^{-ikL}\right) e^{ikct} \equiv 0$

Wendet man nun die Umkehrung der Fouriertransformation an, so erhält man $a(k) = -b(-k)$ (aus 1.) und $a(k)\, e^{ikL} = -b(-k)\, e^{-ikL}$ (aus 2.). Damit ergibt sich direkt

$$a(k)\, e^{ikL} = a(k)\, e^{-ikL}\,,$$

d. h. $\sin(kL) = 0$, also $kL = n\,\pi$ mit $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Fazit: $k = k_n = \frac{\pi n}{L}$ ist diskret, $a(k)$ und $b(k)$ sind δ-Funktionen! Wir notieren als Ergebnis

$$A(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(a_n e^{ik_n(x+ct)} - a_{-n} e^{ik_n(x-ct)}\right)$$

(ii) Betrachten wir nun die Anfangsbedingung

$$A_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(a_n\, e^{ik_n x} + (-a_{-n})\, e^{ik_n x}\right) \tag{14.2}$$

welche für $x = 0, L$ 0 ergibt, wie erforderlich.

Wählen wir $\bar{L} = 2L$, also das doppelte Intervall wie zuvor, so kann man Gleichung (14.2) auch folgendermaßen formulieren:

$$A_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\bar{L}}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\bar{L}}}{\sqrt{2\pi}} \left(a_n - a_{-n}\right) e^{2\pi i n \frac{x}{\bar{L}}} \tag{14.3}$$

Diese Formulierung beruht auf der Tatsache, dass man $A_0(x)$ im Prinzip beliebig periodisch fortsetzen kann: $A_0\left(x + \frac{\bar{L}}{2}\right) = -A_0(x)$.

Für $a_n = a^*_{-n}$, d. h. für reelles A_0, erhalten wir

$$A_0(x) = -\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}(a_n)\, \sin(k_n x)$$

Ähnlich gilt

$$
\begin{aligned}
\dot{A}_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(a_n\, i\, k_n\, c\, e^{ik_n x} + a_{-n}\, i\, k_n\, c\, e^{ik_n x} \right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n + \underbrace{a_{-n}}_{a_n^*})\, i\, k_n\, c\, e^{ik_n x} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}(a_n)\, i\, k_n\, c\, e^{ik_n x} \\
&= -\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}(a_n)\, \sin(k_n x)
\end{aligned}
$$

Die Fouriertransformation von $A_0(x)$ und $\dot{A}_0(x)$ liefert also $\mathrm{Im}(a_n)$ und $\mathrm{Re}(a_n)$. Diese in $A(x,t)$ eingesetzt ergeben die Lösung des Problems!

14.4. Exkurs: Elektromagnetische Wellen

Zum Abschluss des Kapitels über partielle Differentialgleichungen werden wir noch einige Grundeigenschaften elektromagnetischer Wellen herleiten:

Wir gehen aus von der Wellengleichung für elektrisches und magnetisches Feld:

$$
\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E}(\vec{r},t) = \vec{0}, \qquad \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{0} \tag{14.4}
$$

Der (Wellen-)Ansatz

$$
\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\, e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}, \qquad \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0\, e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \tag{14.5}
$$

liefert, in (14.4) eingesetzt,

$$
\left((ik)^2 - \frac{1}{c^2}(i\omega)^2 \right) \vec{E}_0\, e^{i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)} = \vec{0}, \qquad \left((ik)^2 - \frac{1}{c^2}(i\omega)^2 \right) \vec{B}_0\, e^{i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)} = \vec{0},
$$

also die Dispersionsbeziehung $\frac{\omega^2}{c^2} - \vec{k}^2 = 0$. Mit $|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$ und $\omega = 2\pi\nu$ folgt die bekannte Formel $c = \lambda\nu$.

Mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen erhält man des weiteren

$$
\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0 \implies \vec{E}_0, \vec{B}_0 \perp \vec{k}\,,
$$

außerdem

$$
\vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega \vec{B}_0, \quad \vec{k} \times \vec{B}_0 = -\frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0 \implies \vec{E}_0 \perp \vec{B}_0, \quad |\vec{E}_0| = c|\vec{B}_0|
$$

und schließlich

$$
\vec{E}_0 \times \vec{B}_0 = \frac{1}{\omega} \vec{E}_0 \times \left(\vec{k} \times \vec{E}_0 \right) = \frac{\vec{k}}{\omega} \vec{E}_0^2 - \frac{1}{\omega} (\vec{E}_0 \cdot \vec{k})\, \vec{E}_0 = \frac{\vec{k}}{\omega} \vec{E}_0^2\,.
$$

Die Superposition von ebenen Wellen ergibt die allgemeine Lösung

$$
\vec{E}(\vec{r},t) = \sum_{\pm} \int d^3k\, \vec{E}_{0,\pm}(\vec{k})\, e^{i(\pm\omega(k)t - \vec{k}\cdot\vec{r})}\,.
$$

Realteil bzw. Imaginärteil ergeben dann reelle Lösungen. Die allgemeine Lösung für $\vec{B}(\vec{r}, t)$ ergibt sich analog.

Dies ist ebenfalls ein Fourieransatz, wobei die Wellengleichung zur Dispersionsbeziehung führt.

15. Bemerkungen zur Funktionentheorie, Vorrede zur Greensfunktion der Wellengleichung

15.1. Funktionentheorie

Allgemein behandelt die Funktionentheorie Funktionen mit komplexem Definitions- und Wertebereich:

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \text{ mit } z = x + iy \text{ wobei } x, y \in \mathbb{R}$$

Der Funktionentheorie kommt eine Schlüsselrolle in der Mathematik zu, sie stellt die Basis für die „klassische Mathematische Physik“ dar. So lassen sich beispielsweise die wichtigsten linearen Differentialgleichungen — i. A. mit nicht konstanten Koeffizienten (Gleichungen der *Fuchs-Klasse*) — im Komplexen übersichtlich mit Methoden der Funktionentheorie behandeln.

Eine wesentliche Eigenschaft der betrachteten Funktionen ist ihre Analyzität. Eine Funktion heißt analytisch, wenn ihr Grenzwert existiert und richtungsunabhängig ist:

$$\lim_{|\Delta z| \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z)\,,$$

wobei man die für komplexe Zahlen üblichen Betragsdefinition verwendet:[11]

$$|\Delta z| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

Analytische Funktionen sind z. B. z^n, $\sin(z)$, e^z, $\lg(z)$.

Wählt man $\Delta z = \Delta x$, $i\Delta y$, so ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned}
&\lim_{|\Delta x| \to 0} \frac{u(x + \Delta x + iy) - u(x + iy) + iv(x + \Delta x + iy) - iv(x + iy)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \\
= &\lim_{|\Delta y| \to 0} \frac{u(x + iy + i\Delta y) - u(x + iy) + iv(x + iy + i\Delta y) - iv(x + iy)}{i\Delta y} = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)
\end{aligned}$$

Da u und v reellwertige Funktionen sind, ergibt der Vergleich von Real- und Imaginärteil obiger Gleichungen die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{15.1}$$

Diese zentrale Bedingung für analytische Funktionen kann man z. B. durch Hinzunahme einer dritten Koordinate als Bedingung für die Wirbelfreiheit zweier Vektorfelder in $\mathbb{R}^2$ ansehen:

$$\vec{\nabla} \times \begin{pmatrix} u \\ -v \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}, \qquad \vec{\nabla} \times \begin{pmatrix} v \\ u \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Wendet man diese Beziehung auf den Satz von Stokes an, so erhält man direkt den Satz von Cauchy:

$$\oint d\vec{r} \cdot \begin{pmatrix} u \\ -v \\ 0 \end{pmatrix} = \int d\vec{a} \cdot \vec{\nabla} \times \begin{pmatrix} u \\ -v \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \oint d\vec{r} \cdot \begin{pmatrix} v \\ u \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

[11] Definition der Analysis: Eine Funktion heißt analytisch (oder holomorph/regulär) in einem offenen, zusammenhängenden Gebiet $A \subset \mathbb{C}$, wenn sie für alle $z \in A$ eindeutig und differenzierbar ist.

Dies bedeutet

$$\oint u\,dx - v\,dy = 0 \quad \text{bzw.} \quad \oint v\,dx + u\,dy = 0$$
$$\Longrightarrow \oint (u+iv)(dx+idy) = 0\,,$$

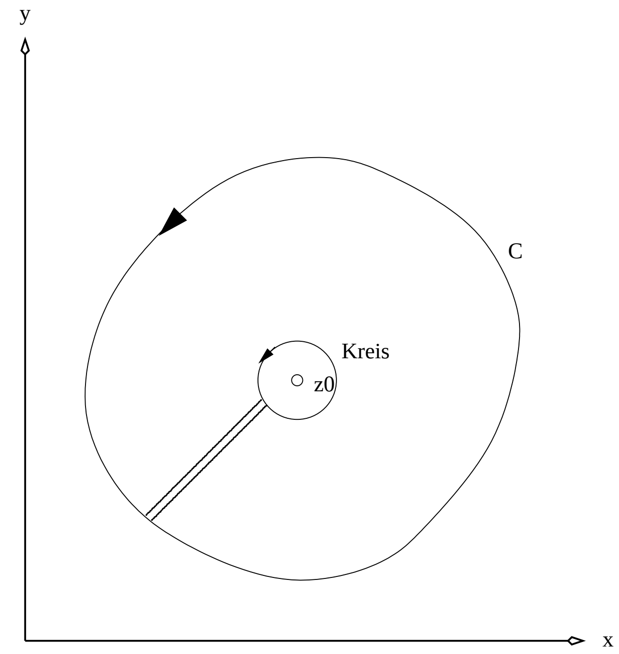
also

$$\boxed{\oint f(z)dz = 0} \tag{15.2}$$

Das bedeutet, das Integral einer holomorphe Funktion $f(z)$ über eine geschlossene Kurve ist identisch 0. Das von der Kurve umrandete Gebiet muss allerdings einfach zusammenhängend sein, d. h. es darf keine Singularitäten (Pole, Schnitte) enthalten.

Ein Beispiel einer Funktion mit Pol bei z_0 ist $f(z) = \frac{c}{(z-z_0)^n}$ mit $c \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$; eine Funktion mit Schnitt ist z. B. $f(z) = \sqrt{z - z_0}$.

Nun verwenden wir den Satz von Cauchy, um den Residuensatz herzuleiten. Dazu bilden wir das Integral $\oint f(z)dz$ entlang einer Kurve, die einen Pol z_0 einschließt:



Man zieht dazu die Kurve auf einen kleinen Kreis um z_0 zusammen: das eingeschlossene Gebiet ist singularitätenfrei und man kann sich eine geschlossene Kurve, gebildet aus C, dem (negativ gewählten) entgegengerichtetem Kreis und zwei Verbindungslinien, denken.

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{\text{Kreis}} f(z)dz = \int d(re^{i\phi})\frac{1}{re^{i\phi}} = i\int_0^{2\pi} d\phi \frac{re^{i\phi}}{re^{i\phi}} = 2\pi i$$

Enthält das Gebiet N Pole bei $z = z_i$ derart, dass $f(z) = \Pi_i \frac{c_i}{z-z_i}$ gilt, so erhält man den Residuensatz:

$$\boxed{\oint f(z)dz = \sum_{i=1}^{N} 2\pi c_i} \tag{15.3}$$

15.2. Die Greensfunktionen der Wellengleichung mit Quelle

Wir gehen von der Wellengleichung mit Stromquelle aus:

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A}(\vec{r},\,t) = \vec{J}(\vec{r},\,t)$$

Hierbei fordern wir, dass

$$\vec{A}(\vec{r},\,t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d^3k\, \vec{a}(\omega,\vec{k})\, e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$$

und

$$\vec{J}(\vec{r},\,t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d^3k\, \vec{j}(\omega,\vec{k})\, e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$$

gilt (vgl. Abschnitt 14.3, hier in 3 Dimensionen). Setzen wir diese Funktionen in obige Wellengleichung ein und vergleichen die Fourierkoeffizienten $\vec{a}(\omega,\vec{k})$ und $\vec{j}(\omega,\vec{k})$, dann erhalten wir die Beziehung

$$\left(-\frac{(i\omega)^2}{c^2} + (i\vec{k})^2\right)\vec{a}(\omega,\vec{k}) = \vec{j}(\omega,\vec{k}) \quad\Longrightarrow\quad \vec{a}(\omega,\vec{k}) = \left(\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \vec{k}^2\right)^{-1}\vec{j}(\omega,\vec{k})\,,$$

wobei der Ausdruck $\left((\frac{\omega}{c})^2 - \vec{k}^2\right)^{-1}$ die Fourier-Transformation der Greensfunktion darstellt, siehe auch Abschnitt 13.5. Daraus ergibt sich wieder die Greensfunktion

$$G(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d^3k\, \frac{e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}}{\left((\frac{\omega}{c})^2 - \vec{k}^2\right)}$$

und wir erhalten

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \int dt\, d^3\vec{r}\, G(\vec{r}-\vec{r}\,',\; t-t')\,\vec{J}(\vec{r}\,',\; t')\,,$$

also wie im Falle der Elektrostatik eine Faltung (vgl. Abschnitt 12.4).

Das Problem bei dieser Greensfunktion ist die Singularität des Integranden $\frac{1}{\left((\frac{\omega}{c})^2 - \vec{k}^2\right)}$ bei $\vec{k}^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$, wir benötigen hier also eine Integrationsvorschrift. Für eine Lösung dieses Problems verweisen wir auf die Elektrodynamik-Vorlesung und wenden uns wieder einfacheren Themen zu.

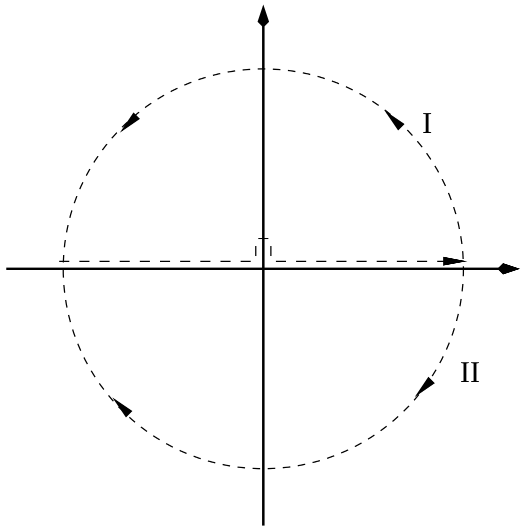
15.3. Anwendungen des Satzes von Cauchy und das Residuensatzes

15.3.1. Integration über Singularitäten

Im Abschnitt 13.5 hatten wir ein Integral der Form $\int_0^\infty dx \frac{sin(x)}{x}$ zu berechnen, wir haben damals ohne Begründung als Ergebnis $\frac{\pi}{2}$ verwendet. Hier folgt nun die Begründung:

$$\int_0^\infty dx \frac{sin(x)}{x} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2ix} = \frac{1}{4i}\int_{-\infty}^{\infty} dz\, \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{z}$$

Wir integratieren also über die reelle Achse. Nun muss man allerdings erklären, wie man das Integral um $z = 0$ berechnet. Die reelle Funktion $\frac{sin(x)}{x}$ ist bei $x = 0$ nicht singulär! Wir zerlegen daher die komplexe Ebene entlang der reellen Achse in die obere und die untere Halbebene.



Der Beitrag bei $z = 0$ errechnet sich zu

$$dz\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{z} = dz\frac{(1 + iz + \dots) - (1 - iz + \dots)}{z} = dz\frac{2iz}{z} = 2i\,dz\,,$$

ist also infinitesimal. Beachtet man, dass $e^{iz} \to 0$ für $Im(z) \to \infty$ bzw. $e^{-iz} \to 0$ für $Im(z) \to -\infty$ gilt, können wir das Integral einfach aufteilen.

(i) Wir integrieren zuerst über die obere Halbebene, also entlang I: $\oint_{\mathrm{I}} dz\frac{e^{iz}}{z}$. Man schließt den Integrationsweg in der oberen Halbebene. Das Integral über den Halbkreis mit Radius R geht für $R \to \infty$ gegen 0. Da der Integrationsweg geschlossen ist und der Pol bei $z = 0$ außerhalb der von I umrandeten Fläche liegt, ist das Integral identisch 0.[12]

(ii) Jetzt schließt man den Integrationsweg in der unteren Halbebene, der Pol ist diesmal enthalten: $\oint_{\mathrm{II}} dz\frac{e^{-iz}}{z}$. Daher liefert der Residuensatz unter Berücksichtigung der „falschen" Integrationsrichtung $\oint_{\mathrm{II}} dz\frac{e^{-iz}}{z} = -2\pi i$.

Somit kann man nun das Integral berechnen und erhält, wie behauptet

$$\int_0^\infty dx\frac{sin(x)}{x} = \frac{1}{4i}(-1)(-2\pi i) = \frac{\pi}{2}\,.$$

15.3.2. Fourier-Transformation der Gauß'schen Glockenkurve

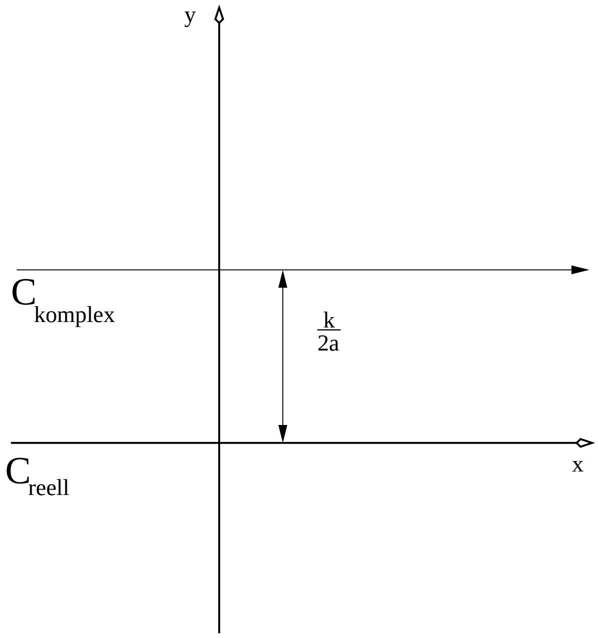
Die zugrundeliegende Funktion ist $f(x) = e^{-\alpha x^2}$, welche wir nun transformieren:

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\alpha x^2}e^{-ikx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\left(\alpha x^2 + ikx\right)} \qquad (15.4)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\alpha\left(x^2 + \frac{ikx}{\alpha} + \left(\frac{ik}{2\alpha}\right)^2 - \left(\frac{ik}{2\alpha}\right)^2\right)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\alpha\left(\frac{k}{2\alpha}\right)^2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\alpha\left(x + \frac{ik}{2\alpha}\right)^2}\end{aligned}$$

[12]Das Gebiet ist einfach zusammenhängend!

Nun gehen wir für die Berechnung des übriggebliebenen Integrals unter Verwendung von $\bar{z} = z + \frac{ik}{2\alpha}$ zum Komplexen über:

$$\int_{C_{\text{reell}}} dz\, e^{-\alpha\left(z+\frac{ik}{2\alpha}\right)^2} = \int_{C_{\text{komplex}}} d\bar{z}\, e^{-\alpha\bar{z}^2} = \int_{C_{\text{reell}}} d\bar{z}\, e^{-\alpha\bar{z}^2} + \oint_{C_{\text{Rechteck}}} d\bar{z}\, e^{-\alpha\bar{z}^2} \tag{15.5}$$



Da in dem Gebiet, das durch die reelle Achse C_{reell} und durch die um $\frac{k}{2\alpha}$ verschobene komplexe Achse C_{komplex} festgelegt ist, keine Singularitäten auftreten ist das Integral über die Rechtecksfläche nach dem Satz von Cauchy identisch 0. Daher können wir wieder in das Reelle übergehen.

$$\int_{C_{\text{reell}}} dz\, e^{-\alpha\left(z+\frac{ik}{2\alpha}\right)^2} = \int_{C_{\text{reell}}} d\bar{z}\, e^{-\alpha\bar{z}^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\alpha x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \tag{15.6}$$

Durch Einfügen von Gleichung (15.6) in Gleichung (15.4) sieht man, dass die Fouriertransformierte einer Gauß-Funktion wieder eine Gaußfunktion ist:

$$\widetilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{\frac{-k^2}{4\alpha}}$$

Abbildungsverzeichnis

Literatur

[1] M. G. Schmidt: Mathematische Ergänzungen zur Physik I (B. Hemmerling et al.: Eds.), http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~weinstoc/MathMeth/Tex/Kap1-6.ps.gz

[2] C. B. Lang, N. Pucker: Mathematische Methoden in der Physik, Spektrum Verlag

[3] M. L. Boas: Mathematical Methods in the Physical Sciences, New York: John Wiley & Sons

[4] S. Grossmann: Mathematische Einführung für die Physik, Teubner Studienbücher

[5] G. Berendt, E. Weimar: Mathematik für Physiker Band I/II Band II: Elemente der mathematischen Physik, weiterführend), Weinheim: Physikverlag

[6] H. Fischer, H. Kaul: Mathematik für Physiker, Teubner Studienbücher

[7] S. Flügge: Mathematische Methoden der Physik I/II (anspruchsvoll), Berlin, Heidelberg, New York: Springer

[8] G. Heber: Mathematische Hilfsmittel der Physik, Zimmermann-Neufang

[9] J. Honerkamp, H. Römer: Grundlagen der klassischen Theoretischen Physik (Springer Studienreihe, Lehrbuch der klassischen Theoretischen Physik auf „einfachem“, jedenfalls kurzem Weg), Berlin, Heidelberg, New York: Springer

[10] P. Bamberg, S. Sternberg: A course in mathematics for students of physics I/II (Einführung in die moderne math. Sprache an elementaren Beispielen), Cambridge University Press

[11] M. R. Spiegel: Vector analysis, Schaum-Reihe