7. Coulombkraft und Gauß'sches Gesetz für das elektrostatische Feld; Flächen- und Volumenintegration

7.1. Coulombkraft, das elektrische Feld, allgemeine Felder

In der Mechanik (und der Experimentalphysik I) geht man von dem *Newton'schen Kraftgesetz* aus:

a). $\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}$ oder konkreter

$$m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \boxed{m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)}$$

mit noch allgemein gehaltenen Kräften $\vec{F}$. In einem Inertialsystem $\{\vec{e}_i\}$ gilt für die kartesischen Koordinaten $\{x_i\}$ des (abstrakten) Vektors $\vec{r} = \sum_i x_i\vec{e}_i$:

$$m\ddot{x}_i = F_i(x_k, \dot{x}_j, t), \tag{7.1}$$

also keine Beschleunigung ohne Kräfte.

Gleichung (7.1) ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für den (Orts-)Vektor in Abhängigkeit der Zeit. Ein physikalischer Vektor besitzt ein klar definiertes Verhalten unter Drehungen: Die Newton'sche Bewegungsgleichung ist *forminvariant* unter Drehungen, sofern man die Kräfte mitdreht – auch die Kraft ist ein Vektor!

Wir haben bereits einige Kräfte kennengelernt:

- Die Gravitationskraft (Newton)

  $$\boxed{\vec{F} = -\gamma\frac{m\,M}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}}$$

  ist die Kraft eines Zentralkörpers der Masse M auf einen Körper der Masse m im Abstand $\vec{r}$.

  Bemerkung: Zur Berechnung der Gravitationskraft benutzen wir das Modell einer punktförmigen Masse mit Eigenvolumen $V = 0$.

- Die Federkraft bei Auslenkung $\vec{r} - \vec{r}_0$ aus der Ruhelage $\vec{r}_0$ ist

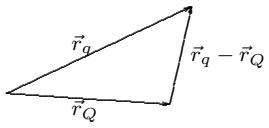
  $$\boxed{\vec{F} = -k(\vec{r} - \vec{r}_0)} \tag{7.2}$$

  Bemerkung: Dies gilt nur bei kleinen Auslenkungen aus der Ruhelage, denn es handelt sich hier um eine lineare Näherung durch Taylor-Entwicklung. Allgemein ist $\vec{F} = \mathbb{K}(\vec{r}-\vec{r}_0)$ mit einer 3×3-Matrix $\mathbb{K}$.

b).

- Die Coulombkraft zwischen zwei (statischen) Ladungen q und Q mit dem Abstandsvektor $\vec{r} = \vec{r}_q - \vec{r}_Q$ ist ähnlich der Gravitations-Kraft, nur viel stärker und auch abstoßend:

$$\boxed{\vec{F}_{\text{Coulomb}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,Q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}}$$



Die elektrische Ladung ist eine Eigenschaft der Körper, welche *unabhängig* von der Masse ist: So besitzen Positronen und Protonen gleiche Ladungen bei verschiedenen Massen. Die (ruhe)masselosen Photonen haben keine elektrische Ladung.

Anmerkung: In der modernen Quantenchromodynamik, der Theorie für starke Wechselwirkungen, haben Gluonen zunächst keine Masse, aber eine verallgemeinerte Ladung

Wir gehen jetzt näher auf die Coulombkraft ein. Vorerst wollen wir uns auf die *Elektrostatik*, die Beschreibung von Kraftwirkungen zwischen unbewegten elektrischen Ladungen, konzentrieren. Dazu dient uns das sogenannte Nahwirkungsbild:

Wir stellen uns vor, die Ladung Q erzeugt ein *elektrisches Feld*

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{|\vec{r}-\vec{r}_Q|^2}\frac{(\vec{r}-\vec{r}_Q)}{|\vec{r}-\vec{r}_Q|} \tag{7.3}$$

welches dann auf die Probeladung q die Kraft $q\,\vec{E}(\vec{r}_q) = \vec{F}(\vec{r}_q)$ ausübt. Dabei ist q so klein zu halten, daß es nicht zu Rückwirkungen auf die Lage der Ladung Q kommt.

Die wirkliche eigenständige Existenz eines solchen Feldes wird erst in der *Elektrodynamik* bei der Diskussion elektromagnetischer Wellen klar, wobei die Existenz der erzeugenden Ladungen in den Hintergrund tritt. Das Ziel ist hierbei z. B. die Behandlung von Radiowellen, ohne auf Details ihrer Erzeugung einzugehen.

c). Der Begriff *Feld* impliziert einen gegeben („angehefteten") Wert des Feldes an jedem Punkt des Raumes. Das Feld ist also eine Funktion der Raumkoordinaten, z. B.

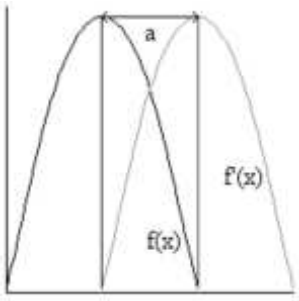
- bei einem Temperaturfeld der Wert der Temperatur
- bei einem Druckfeld der Wert des Druckes
- bei einem Strömungsfeld die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors der Strömung (Gas, Flüssigkeit)
- in der Elektrostatik die Komponenten des elektrischen Feldes

Wir unterscheiden

- Skalarfelder: Im Sinne der Definition beschreiben wir das Feld $f(\vec{r})$ in Abhängigkeit des abstrakten Ortsvektors $\vec{r}$. In der Physik hat sich jedoch eine äquivalente (aber etwas schlampige) Schreibweise eingebürgert[1]: $f(x_1, x_2, x_3) = f(\vec{x}) \equiv f(\vec{r})$.

  Bei Drehungen des Bezugsystems erhält man eine neue Funktion f' und es gilt

$$\boxed{f'(x_1', x_2', x_3') = f(x_1, x_2, x_3)}$$



[1] Physiker lieben Koordinaten!

(„Neues f in neuen Koordinaten = Altes f in alten Koordinaten")

Beispiel (zur Vereinfachung mit Translationen): f sei jetzt das Feld einer Variablen x. Bei einer Translation des Koordinatenursprungs um σ gilt dann $f'(x' = x + \sigma) = f(x)$, siehe vorangehende Abbildung.

Bemerkung: In [4] ist dieser Abschnitt mit Vorsicht zu genießen!

- Vektorfelder: $\vec{V}(\vec{r})$ wird in Komponenten zerlegt und mit $V_i(x_1, x_2, x_3)$, $(i = 1, 2, 3)$ oder kurz mit $\vec{V}(\vec{x})$ bzw. $\vec{V}(\vec{r})$, s. o. bezeichnet.

  Bei Drehungen entsteht ein gedrehtes Vektorfeld in gedrehten Koordinaten, was einer Drehung auf dem Vektorfeld in alten Koordinaten entspricht:

$$\vec{V}'(\vec{x}') = \mathbb{D}\,\vec{V}(\vec{x}) \qquad \text{mit} \quad \vec{x}' = \mathbb{D}\,\vec{x}$$

$$\text{bzw.} \quad \vec{x} = \mathbb{D}^{-1}\,\vec{x}' = \mathbb{D}^T\,\vec{x}', \quad \text{da} \quad \mathbb{D}\cdot\mathbb{D}^T = 1$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{V}'(\mathbb{D}\,\vec{x}) = \mathbb{D}\,\vec{V}(\vec{x})}$$

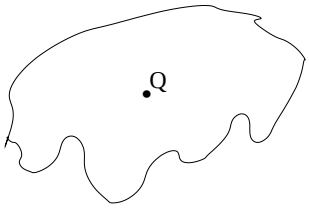
  Beispiel: Das elektrische Feld ist ein Vektorfeld!

- Tensorfelder: Zur Vollständigkeit wollen wir noch Tensorfelder, Vektorfelder mit mehreren Vektorindizes, angeben: $T_{ik}(x_1, x_2, x_3)$

7.2. Gauß'sches Gesetz, lineare Superposition

Eine *punktförmige* Ladung Q sei von der Fläche A, z. B. einer Kugeloberfläche umschlossen. Dann gilt, zunächst vereinfacht, das Gauß'sche Gesetz:

$$\boxed{\Phi = \int_A d\vec{A}\cdot\vec{E} = \frac{Q}{\varepsilon_0}} \tag{7.4}$$

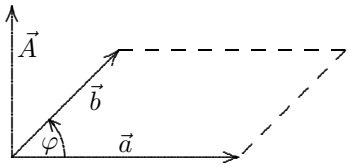


Φ wird als *elektrischer Fluß* bezeichnet. Wir wollen das nun ausgehend vom Coulmb'schen Gesetz nachrechnen.

a). Das Flächenintegral (Wdh. Kapitel 4)

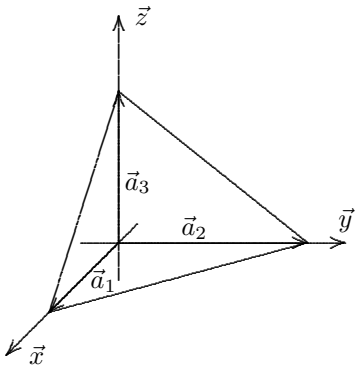
- Die Fläche A wird von zwei Vektoren aufgespannt. Man kann der Fläche in drei Dimensionen einen *Flächenvektor* zuordnen.

$$\vec{A} = \vec{a}\times\vec{b}$$



  Der Flächenvektor steht immer senkrecht auf der Fläche („Igelvektor").

- Wir zerlegen eine beliebige Fläche in kleine Flächenstücke, zum Beispiel Dreiecke mit $\Delta\vec{A} = \frac{1}{2}(\Delta\vec{a}\times\Delta\vec{b})$. Der Flächenvektor läßt sich in Flächenvektoren von Flächen in den Koordinatenebenen zerlegen:



$$\overbrace{(\vec{a}_2-\vec{a}_1)}^{\Delta\vec{a}}\times\overbrace{(\vec{a}_3-\vec{a}_1)}^{\Delta\vec{b}} = \vec{a}_2\times\vec{a}_3-\vec{a}_2\times\vec{a}_1-\vec{a}_1\times\vec{a}_3$$
$$= \underbrace{\vec{a}_2\times\vec{a}_3-\vec{a}_1\times\vec{a}_2-\vec{a}_1\times\vec{a}_3}_{\text{Summe der ins Innere des Tetraeders zeigenden Flächenvektoren}}$$

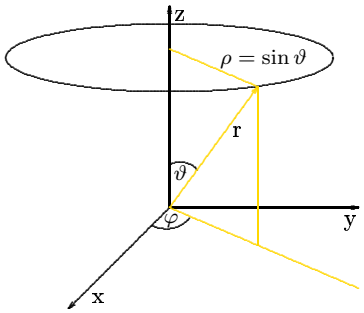
Folgerung: Die Summe der nach außen gerichteten Flächenvektoren für geschlossene Flächen (hier: Tetraederoberfläche) ist Null.

- Wir summieren die Beiträge $\Delta\vec{A}_n\cdot\vec{E}_n$, wobei $\vec{E}_n$ nach irgendeiner Vorschrift auf dem Dreieck gewählt wird.
- Durch Grenzübergang für $n\longrightarrow\infty$ erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty}\sum_n\Delta\vec{A}_n\cdot\vec{E}_n=\int_A d\vec{A}\cdot\vec{E}$$

mit $|\Delta\vec{A}_n|\longrightarrow 0$. Hierbei muß der Limes unabhängig von Einteilung und Vorschrift für die Wahl von $\vec{E}_n$ sein, denn nur dann existiert das Flächenintegral ($\rightsquigarrow$ „anständige" Funktionen)!

b). Wir werten das Flächenintegral in Kugelkoordinaten aus, wobei $\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(Q\,\vec{r})/r^3=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(Q\,\vec{e}_r)/r^2$ das Coulombfeld einer Punktladung Q sei.



Das Integral $\int_A d\vec{A}\cdot\vec{E}$ enthält nur die zu $\vec{e}_r$ parallelen, radialen Komponenten der Flächenstücke $d\vec{A}$. Wir arbeiten wieder mit der in der Physik üblichen, etwas nachlässigen Komponentenschreibweise von Vektoren: $\vec{r}=(x,y,z)$. Dabei unterdrücken wir nämlich die Basisvektoren $\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z$ und sparen uns so Schreibarbeit...

$$\begin{aligned} x &= r\sin\vartheta\cos\varphi\\ y &= r\sin\vartheta\sin\varphi\\ z &= r\cos\vartheta \end{aligned}$$

Wir wählen lokale Koordinatenachsen parallel zu

$$\left.\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right|_{\vartheta,\varphi=\text{const}}, \quad \underbrace{\left.\frac{\partial\vec{r}}{\partial\vartheta}\right|_{r,\varphi=\text{const}}}_{\sim\text{ Großkreis}}, \quad \underbrace{\left.\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right|_{\vartheta,r=\text{const}}}_{\sim\text{ Kleinkreis}}.$$

Damit ergibt sich

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix}\sin\vartheta\cos\varphi\\ \sin\vartheta\sin\varphi\\ \cos\vartheta\end{pmatrix} = \vec{e}_r, \quad \frac{\partial\vec{r}}{\partial\vartheta} = r\begin{pmatrix}\cos\vartheta\cos\varphi\\ \cos\vartheta\sin\varphi\\ -\sin\vartheta\end{pmatrix} = r\,\vec{e}_\vartheta, \quad \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = r\begin{pmatrix}-\sin\vartheta\sin\varphi\\ \sin\vartheta\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix} = r\sin\vartheta\,\vec{e}_\varphi$$

und es folgt, daß $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\vartheta$ und $\vec{e}_\varphi$ wechselseitig senkrecht und normiert sind.

Es gilt $\vec{E} \parallel \vec{e}_r$ (radiale Ausrichtung des Feldes bei Kugeloberfläche). Deshalb genügt es, die Fläche senkrecht zu $\vec{e}_r$ und damit den Flächenvektor parallel zu $\vec{e}_r$ zu betrachten.

$$d\vec{A}_{\parallel\vec{e}_r} = \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\vartheta}d\vartheta\right)\times\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}d\varphi\right) = r^2\sin\vartheta\,\vec{e}_\vartheta\times\vec{e}_\varphi\,d\vartheta\,d\varphi = r^2\sin\vartheta\,\vec{e}_r\,d\vartheta\,d\varphi \tag{7.5}$$

Wie man in (7.5) sieht, zeigt der Flächenvektor wie benötigt nach außen.

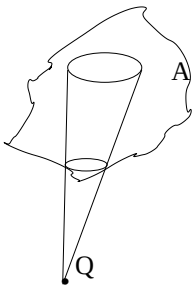
Bemerkung: Zur Erinnerung an letztes Semester [1, Kap. 4.3] sei gesagt, daß man den Flächenvektor auch wie folgt erhält[2]:

$$d\vec{A}_{\parallel\vec{e}_r} = \begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ \cos\vartheta\cos\varphi & \cos\vartheta\sin\varphi & -\sin\vartheta\\ -\sin\vartheta\sin\varphi & \sin\vartheta\cos\varphi & 0\end{vmatrix}\cdot r^2 d\vartheta d\varphi\ldots$$

Anschaulich kann man sich auch überlegen, daß die Kugelfläche $d\vec{A}$ ein „Rechteck" mit Seitenflächen in Richtung des Großkreises ($r\,d\vartheta$) und des Kleinkreises ($\varrho\,d\varphi = r\,\sin\vartheta\,d\varphi$) darstellt.

Mit (7.5) sind wir in der Lage, das Gauß'sche Flußintegral zu berechnen:

$$\int_A d\vec{A}\cdot\vec{E} = \int_0^\pi d\vartheta\int_0^{2\pi} d\varphi\, r^2\cancel{(\vartheta,\varphi)}\,\sin\vartheta\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\cancel{r^2}}\underbrace{\vec{e}_r\cdot\vec{e}_r}_{=1} = 4\pi\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{7.6}$$



(Zur Erinnerung: $\int_0^\pi d\vartheta\,\sin\vartheta = \int_{-1}^{+1} d(\cos\vartheta) = 2$)

Wir bestätigen also für Punktladungen das Gauß'sche Gesetz für beliebige geschlossene Flächen um Q!

Für geschlossene Flächen, die Q nicht enthalten, heben sich die Beiträge der an den Durchstoßpunkten entgegengesetzten Flächen heraus.

$$\int_A d\vec{A}\cdot\vec{E} = 0$$

Der dazugehörige vollständige Ausdruck ist auch in sphärischen Polarkoordinaten wegen der Grenzen in ϑ, φ umständlich.

[2] Hätten Sie es noch gewußt???

c). Das elektrische Feld einer Ansammlung von Punktladungen Q_i ergibt sich durch lineare Überlagerung (*Superposition*), da es sich hier um unabhängige Kräfte handelt!

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{Q_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} = \sum_i \vec{E}_i(\vec{r})$$

Diese lineare Superposition ist für die Elektrodynamik allgemein sehr wichtig. Sie hängt eng damit zusammen, daß die Felder, anders als in der Hydrodynamik, linearen Differentialgleichungen genügen, wie wir später noch sehen werden. Falls (wie in der Chromodynamik, der Theorie der starken Wechselwirkungen) auch die Felder selbst eine Ladung tragen, ist die lineare Superposition nicht mehr erlaubt.

Jetzt wenden wir uns ab von den Punktladungen hin zu den Ladungsdichten:

$$\varrho(\vec{r}\,') = \frac{\text{Ladung}}{\text{Volumen}} \text{ (infinitesimal)} = \frac{dQ}{dV}\,.$$

Die Summation über Teilladungen $Q = \sum_i Q_i$ geht dann über in $Q = \int_V d^3r' \varrho(\vec{r}\,')$ und wir erhalten

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V d^3r' \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \varrho(\vec{r}\,').}$$

Wir bilden nun das Gauß'sche Flächenintegral $\int_A d\vec{A} \cdot \vec{E}(\vec{r})$ und vertauschen die Integrationen (infinitesimale Summationen) von $d\vec{A}$ und $d^3\vec{r}\,'$.

$$\int_A d\vec{A} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \rho(\vec{r}\,') \int_A d\vec{A} \cdot \underbrace{\frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}}_{\substack{\text{Feld einer} \\ \text{Einheits-} \\ \text{Punktladung} \\ \text{bei } \vec{r}\,'}} \tag{7.7}$$

Das Flächenintegral aus (7.7) ergibt 4π falls r' innerhalb, und 0 falls r' ausserhalb der Fläche liegt.

$$\Longrightarrow \boxed{\int_A d\vec{A} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V d^3r' \rho(\vec{r}\,') = \frac{1}{\varepsilon_0} Q\,,}$$

wobei V das von A eingeschlossene Volumen ist. Wir erhalten also das Gauß'sche Integral in allgemeiner Form.

d). Natürlich bekommt man auch umgekehrt aus dem Gauß'schen Gesetz das Coulomb-Gesetz: Für die Punktladung Q bei $\vec{r}_Q$ werte man das Integral $\int_A d\vec{A} \cdot \vec{E}(\vec{r})$ auf einer Kugeloberfläche (mit Radius R) um $\vec{r}_Q$ aus:

Aus der Radialsymmetrie von $\vec{E}(\vec{r})$ folgt $\vec{E}(\vec{r}) \parallel (\vec{r} - \vec{r}_Q)$ und mit $R = |\vec{r} - \vec{r}_Q|$ direkt das Coulomb-Gesetz:

$$\begin{aligned} 4\pi R^2 \left|\vec{E}(\vec{r})\right| &= \frac{Q}{\varepsilon_0} \\ \Longrightarrow \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R^2} \vec{e}_{\vec{r} - \vec{r}_Q} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_Q}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|} \end{aligned}$$

e). Anwendungen Elektrisches Feld einer homogen geladenen Kugel mit Ladungsdichte ρ und Radius R: Wende das Gauß'sches Gesetz auf eine Kugelfäche mit Radius r an, wobei nur die eingeschlossenen Ladungen zählen:

$$\int_A d\vec{A}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V d^3r'\rho(\vec{r}\,') = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\frac{4\pi}{3}\begin{cases} r^3 & \text{für } r \le R \\ R^3 & \text{für } r \ge R \end{cases}$$

Aus der Radialsymmetrie von $\vec{E}(\vec{r})$ folgt wie oben

$$\int_A d\vec{A}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = 4\pi\, r^2\,\left|\vec{E}(\vec{r})\right|$$

und damit

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\begin{cases} r & \text{für } r \le R \\ \dfrac{R^3}{r^2} & \text{für } r \ge R \end{cases}$$

Für $r \ge R$ haben somit wieder das Coulomb-Gesetz für eine Punktladung $Q = \frac{4\pi}{3}\,R^3\rho$ erhalten!

7.3. Divergenz von $\vec{E}(\vec{r})$

Die Divergenz (Quellstärke) des Vektorfeldes $\vec{E}(\vec{r})$ ist definiert als

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{V\longrightarrow 0}\frac{\int_A d\vec{A}\cdot\vec{E}(\vec{r})}{V}}$$

wobei V das von A eingeschlossene Volumen ist, welches auf den Punkt $\vec{r}$ zusammengezogen wird.

Mit dem Gauß'schen Gesetz ergibt sich

$$\int_A d\vec{A}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V d^3r'\rho(\vec{r}\,') \simeq \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}V\,,$$

wobei man die letzte Abschätzung, gültig nur für infinitesimale V, durch Anwendung des Mittelwertsatzes[3] erhält. Einsetzen ergibt schließlich

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}}$$

Später werden wir die Divergenz durch Differentiation in Koordinaten ausdrücken ($\operatorname{div}\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot\vec{E}$).

Bemerkung: Betrachten wir nun eine Punktladung als Grenzfall einer Kugel mit homogener Ladungsverteilung. In Abschnitt 7.2 e) haben wir gesehen, daß für die Ladung der Kugel $Q = \frac{4\pi}{3}\,R^3\rho$ gilt, wobei R den Kugelradius und ρ die Ladungsdichte bezeichnet.

[3] Der Mittelwertsatz der Integralrechnung: Wenn der Integrand $f(t)$ im Integrationsintervall $t \in (x, x+\Delta x)$ stetig (und integrierbar) ist, dann kann das Integral immer durch ein Produkt aus Intervalllänge und einem Wert des Integranden im Intervall ausgedrückt werden, also $\int_x^{x+\Delta x} dt\, f(t) = f(x + h\,\Delta x)\,\Delta x$ für zumindest einen Wert von h im Intervall $0 \le h \le 1$.

Für $|\vec{r}| < R$ gilt deshalb

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \frac{3}{4\pi R^3} ,$$

oder allgemeiner ausgedrückt

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \cdot f(R,r) \text{ mit } f(R,r) = \begin{cases} 0 & \text{für } r > R \\ \dfrac{3}{4\pi R^3} & \text{für } r \leq R \end{cases}$$

Integriert man nun den Klammerausdruck $f(r,R)$ über das gesamte Volumen, erhält man exakt 1 wegen

$$\int d^3r \, f(r,R) = \frac{4\pi}{3} R^3 \frac{3}{4\pi R^3} \equiv 1 . \tag{7.8}$$

Betrachten wir das Verhalten von $f(r,R)$ bei $R \longrightarrow 0$:

$$\begin{aligned} f(r=0,R) &\longrightarrow \infty \quad (R \longrightarrow 0) \\ f(r \neq 0,R) &\longrightarrow 0 \quad (R \longrightarrow 0) \end{aligned} \tag{7.9}$$

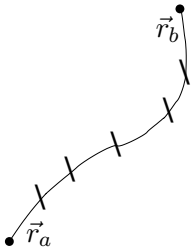
Aufgrund von Gleichung (7.8) und (7.9) ergibt sich, daß $f(r,R)$ für $R = 0$ eine dreidimensionale Dirac'sche Deltafunktion $\delta_3(\vec{r})$ darstellt. Die Deltafunktion kann hier nicht behandelt werden, den interessierten Leser verweisen wir daher auf ein späteres Kapitel über Distributionen.

8. Das elektrische Potential; der Gradient

8.1. Das elektrische Potential

a). Das elektrische Feld ist eine auf die Einheitsladung normierte Kraft, welches in der Elektrostatik zeitunabhängig ist.

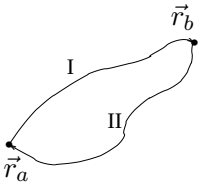
Wir betrachten nun die Arbeit an einer Einheitsladung beim Transport auf einem Weg von $\vec{r}_a$ nach $\vec{r}_b$:



$$\boxed{W = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} d\vec{r} \cdot E(\vec{r}) = -U}$$

wobei U die *Spannung* zwischen den Punkten $\vec{r}_a$ und $\vec{r}_b$ darstellt.

Das obige Integral, und damit die Spannung U, sollte wegunabhängig sein; sonst könnte auf einem geschlossenen Weg Arbeit geleistet und ein *perpetuum mobile* konstruiert werden. Dazu betrachte man nebenstehende Abbildung.



Falls $\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r})$ vom Weg abhängig, also für die Wege I und II verschieden ist, so würde man durch Bewegung z. B. entlang des Weges I-II zwar zum Ausgangspunkt $\vec{r}_a$ zurückkehren, hätte aber Arbeit gewonnen. Daraus folgt, daß $-U(\vec{r}) = \int_{\vec{r_0}}^{\vec{r}} d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r})$ tatsächlich nur von $\vec{r}$ abhängt. $\vec{r_0}$ ist beliebig, aber fest.

b). Damit kommen wir zur Definition des Potentials:

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = -\int_{\vec{r0}}^{\vec{r}} d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}) + \varphi(\vec{r_0})}$$

wobei $\varphi(\vec{r_0})$ beliebig, also frei wählbar ist (z.B. $\varphi(\infty) = 0$). Damit ergibt sich die Spannung U als

$$U = -\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}_b) - \varphi(\vec{r}_a)\,.$$

Wir leiten nun eine Darstellung des Energiesatzes aus der Bewegungsgleichung eines massiven Ladungsträgers der Ladung q her:

$$m\ddot{\vec{r}} = q\vec{E}(\vec{r}) \implies m\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = q\dot{\vec{r}} \cdot \vec{E}(\vec{r})$$

Mit $\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) = \ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}$ folgt $\frac{d}{dt}(\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2) = q\dot{\vec{r}} \cdot \vec{E}(\vec{r})$. Durch Integrieren ergibt sich daraus

$$\int_{t_a}^{t_b} dt \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2\right) = q\int_{t_a}^{t_b} dt \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = q\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r})$$

$$\implies \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 t_b - \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 t_a = -q(\varphi(\vec{r}_b) - \varphi(\vec{r}_a))\,.$$

Der Energiesatz für einen Ladungsträger der Masse m und Ladung q kann man daher folgendermaßen schreiben:

$$\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 t_b + q\varphi(\dot{\vec{r}}_b) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 t_a + q\varphi(\dot{\vec{r}}_a)\,,$$

wobei der jeweils erste Term die kinetische Energie beschreibt, der jeweils zweite Term die potentielle Energie im elektrischen Feld.

Anmerkung: Die Flächen (im 2-dimensionalen: Linien) mit konstantem Potential heißen Äquipotentialflächen.

8.2. Gradient

a). Wie bestimmen wir bei gegebenem $\varphi(\vec{r})$ das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$? Wir müssen hierbei beachten, daß $\varphi(\vec{r})$ ein Skalarfeld, $\vec{E}(\vec{r})$ hingegen ein Vektorfeld bildet.

Wir differenzieren zuerst nach $\vec{r}$:

$$\varphi(\vec{r}+\Delta\vec{r}) - \varphi(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}}^{\vec{r}+\Delta\vec{r}} d\vec{r}\cdot\vec{E}(\vec{r})$$

Durch Anwendung des Mittelwertsatzes kann man für kleine $\Delta\vec{r}$ das Integral durch

$$\varphi(\vec{r}+\Delta\vec{r}) - \varphi(\vec{r}) = -E(\vec{r})\cdot\Delta\vec{r} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{8.1}$$

abschätzen, wobei $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ wie üblich Restterme der Ordnung ϵ^2 bezeichnen mit $|\Delta\vec{r}| \approx \epsilon$.

Verwendet man anstatt von $\vec{r}$ dessen Komponenten x, y, z, so kann man die Potentialdifferenz in Gleichung (8.1) auch folgendermaßen schreiben:

$$\begin{array}{l|l} \varphi(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - \varphi(x,y,z) = & \text{als partielle Ableitungen:} \\ \varphi(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - \varphi(x, y+\Delta y, z+\Delta z) & \frac{\partial\varphi}{\partial x}|_{x,y+\Delta y,z+\Delta z}\Delta x \\ +\varphi(x, y+\Delta y, z+\Delta z) - \varphi(x,y,z+\Delta z) & \frac{\partial\varphi}{\partial y}|_{x,y,z+\Delta z}\Delta y \\ +\varphi(x,y,z+\Delta z) - \varphi(x,y,z) & \frac{\partial\varphi}{\partial z}|_{x,y,z}\Delta z \end{array}$$

Durch Taylor-Entwicklung der partiellen Ableitungen läßt sich der erste Term in Δx vereinfachen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x}|_{x,y+\Delta y,z+\Delta z}\Delta x &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}|_{x,y,z}\Delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial x\partial y}|_{x,y,z+\Delta z}\Delta x\Delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial x\partial z}|_{x,y+\Delta y,z}\Delta x\Delta z \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}|_{x,y,z}\Delta x + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Potentialdifferenz zur Ordnung ϵ schließlich

$$\begin{aligned} \Delta\varphi = \varphi(\vec{r}+\Delta\vec{r}) - \varphi(\vec{r}) &\approx \frac{\partial\varphi}{\partial x}|_{x,y,z}\Delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}|_{x,y,z}\Delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}|_{x,y,z}\Delta z \\ &= (\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z})\cdot\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\\ \Delta z\end{pmatrix} = \operatorname{grad}\varphi\cdot\Delta\vec{r}, \end{aligned} \tag{8.2}$$

oder in Differentialschreibweise $d\varphi = \operatorname{grad}\varphi\cdot d\vec{r}$, wobei $\operatorname{grad}\varphi = (\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z})$. Vergleichen wir Gleichung (8.2) mit Gleichung (8.1), so erkennen wir

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\operatorname{grad}\varphi(\vec{r})\,.$$

Aus $\Delta\varphi = \operatorname{grad}\varphi\cdot\Delta\vec{r}$ folgt, daß der Vektor $\operatorname{grad}\varphi$ immer senkrecht auf den Äquipotentialflächen steht: Zeigt der Vektor $\Delta\vec{r}$ in Richtung der Potentialflächen, so ist $\Delta\varphi = 0$; steht $\Delta\vec{r}$ dagegen senkrecht auf den Potentialflächen, so ist $\Delta\varphi$ maximal. Eine 2-dimensionale Anwendung im täglichen Leben sind die Höhenlinien der Landkarten, siehe Abbildung 1.

b). Wir setzen nun in das Wegintegral $\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}\cdot\vec{E}(\vec{r})$ die Identität $\vec{E}(\vec{r}) = -\operatorname{grad}\varphi(\vec{r})$ ein und erhalten so auf umgekehrtem Wege die ursprüngliche Definition des Potentials:

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}\operatorname{grad}\varphi(\vec{r}) = -\int_{\varphi(\vec{r}_0)}^{\varphi(\vec{r})} d\varphi = -(\varphi(\vec{r}) - \varphi(\vec{r}_0))$$

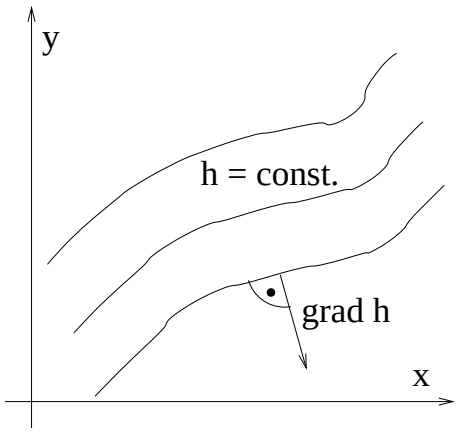


Abbildung 1: Höhenlinien und Gradient

c). Zur Schreibweise Folgende Notationen sind äquivalent:

$$\operatorname{grad}\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi(x,y,z) = \vec{\nabla}\varphi$$

Dabei ist $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ ein Differentialoperator und $\vec{\nabla}$ wird als Nablaoperator[4] bezeichnet.

d). Beispiel Wir betrachten die homogenen Ladung auf einer Kugel mit Ladungsdichte ρ und Radius R. Dann ergibt sich mit 7.2 e) für das Potential in Abhängigkeit von $\vec{r}$ (Weg auf dem Radius wegen leichterer Rechnung) und für $\vec{r}_0 = \infty$:

$$\varphi(\vec{r}) = \int_\infty^{\vec{r}} d\vec{r}\cdot E(\vec{r}) + \varphi(\infty) = \begin{cases} \dfrac{4}{3}\dfrac{\rho R^3}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r} & r > R \\ \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{2}R^2 - \dfrac{1}{6}r^2\right) & r \le R \end{cases}$$

e). Rechnen mit dem Gradienten Im Folgenden verwenden wir die Kettenregel und Produktregel für Ableitungen:

1. Es ist $\vec{\nabla} f(r) = f'(r)\frac{\vec{r}}{r}$, da $\frac{\partial}{\partial x} f(r) = f'(r)\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ (analog für y und z) mit $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
2. $\vec{\nabla}\left(f_1(\vec{r})\, f_2(\vec{r})\right) = \left(\vec{\nabla} f_1(\vec{r})\right) f_2(\vec{r}) + f_1(\vec{r})\left(\vec{\nabla} f_2(\vec{r})\right)$
3. Vektoriell:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\left(\vec{V}_1(\vec{r})\cdot\vec{V}_2(\vec{r})\right) &= \left(\vec{\nabla}\,\vec{V}_1(\vec{r})\right)\cdot\vec{V}_2(\vec{r}) + \left(\vec{\nabla}\,\vec{V}_2(\vec{r})\right)\cdot\vec{V}_1(\vec{r}) \\ &= \left(\vec{\nabla}\right)\underbrace{\left(\ \vec{V}_1\ \right)}_{\text{Zeile}}\underbrace{\begin{pmatrix}\vec{V}_2\end{pmatrix}}_{\text{Spalte}} + \left(\vec{\nabla}\right)\left(\ \vec{V}_2\ \right)\begin{pmatrix}\vec{V}_1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

[4] Das Wort „Nabla“ stammt von einem altertümlichen Musikinstrument, einer Laute, an deren Form der Operator erinnert.

$$\text{wobei z. B. } \left(\vec{\nabla}\right)\left(\quad \vec{V}_1 \quad\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}V_{1x} & \frac{\partial}{\partial x}V_{1y} & \frac{\partial}{\partial x}V_{1z} \\ \frac{\partial}{\partial y}V_{1x} & \frac{\partial}{\partial y}V_{1y} & \frac{\partial}{\partial y}V_{1z} \\ \frac{\partial}{\partial z}V_{1x} & \frac{\partial}{\partial z}V_{1y} & \frac{\partial}{\partial z}V_{1z} \end{pmatrix}, \text{ analog für } V_2.$$

Hier sieht man, daß man das Rechnen mit Gradienten auch als Vektor- und Matrizenrechnung auffassen kann. Man kann also Vektoranalysis mit der Devise betreiben: Mache Differenzieren und Matrizenmultiplikation (und später auch Kreuzprodukt in ähnlicher Weise) miteinander verträglich!

f). Totales Differential Es gilt $d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz$ für eine Funktion $\varphi(x, y, z)$. Dann ist $d\varphi$ eine Differentialform:

$$d\varphi = a_x(x, y, z)\, dx + a_y(x, y, z)\, dy + a_z(x, y, z)\, dz \quad \text{mit } a_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \ldots$$

Man sagt dann: $d\varphi$ ist ein *totales Differential*.

Wir geben nun das sogenannte Integrationskriterium an: Ist φ zweimal stetig differenzierbar, dann gilt mit obigem a_x, a_y, a_z

$$\frac{\partial a_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial}{\partial x}\varphi) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\varphi \overset{(*)}{=} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\varphi = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial y}\varphi) = \frac{\partial a_y}{\partial x}$$

d. h. es gilt die Gleichheit bei (*)[5]. Dann folgt mit $(\vec{a} \times \vec{b})_z = a_x b_y - a_y b_x$:

$$\frac{\partial}{\partial x}a_y - \frac{\partial}{\partial y}a_x = 0 \iff \left(\vec{\nabla} \times \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}\right)_z = 0 \quad \text{für} \quad \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \vec{\nabla}\varphi$$

Das notwendige Kriterium dafür, daß eine Differentialform ein totales Differential ist, ist also

$$\vec{\nabla} \times \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = 0\,.$$

Mit $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \vec{\nabla}\varphi$ folgt aufgrund der Vertauschbarkeit der partiellen Differentiationen

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi) = 0 \implies \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla})}_{\text{Algebra!}}\phi = 0\,.$$

Letzteres ist sehr intuitiv: $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} = 0$.

[5] Ist f in D zweimal partiell differenzierbar und sind die zweiten partiellen Ableitungen stetig in D, so hat die Reihenfolge der partiellen Ableitungen keinen Einfluss auf das Ergebnis der Ableitungen: $\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}(p) = \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1}(p)\,,\ p \in D$

g). Beispiel: Herleitung der Entropie δQ im 1. Hauptsatz der Thermodynamik

$$\delta Q = dU - p\,dV$$

ist kein totales Differential.

Annahme: δQ sei ein totales Differential. Dann ist für ein ideales Gas Q wegen $dU = n\,C_V\,dT$ und $p = n\,RT/V$ abhängig von T und V und es ergibt sich

$$\delta Q = n\,C_V\,dT + \frac{n\,RT}{V}dV\,.$$

Dies hieße $\frac{\partial Q}{\partial T} = n\,C_V$ und $\frac{\partial Q}{\partial V} = \frac{n\,RT}{V}$; desweiteren gelte für δQ als totales Differential die Identität $\frac{\partial}{\partial V}(\frac{\partial Q}{\partial T}) = \frac{\partial}{\partial T}(\frac{\partial Q}{\partial V})$. Es ist $\frac{\partial}{\partial V}(n\,C_V) = 0$, aber $\frac{\partial}{\partial T}(\frac{n\,RT}{V}) = \frac{n\,R}{V} \neq 0$, was zu einem Widerspruch führt. Also ist δQ kein totales Differential.

Wir versuchen daher, einen sog. integrierenden Faktor $f(T)$ zu finden, so daß für $f(T)\,\delta Q = f(T)\,n\,C_V\,dT + f(T)\frac{n\,RT}{V}dV$ die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial V}(f(T)\,n\,C_V) = \frac{\partial}{\partial T}\left(f(T)\frac{n\,RT}{V}\right) = 0$$

erfüllt ist. Der erste Term ist offensichtlich gleich 0. Dies erfordert $\frac{\partial}{\partial T}(f(T)\frac{n\,RT}{V}) = 0$, also $f(T) = \frac{c}{T}$, wobei $c = \text{const.}$

Wir definieren daher $dS = \frac{\delta Q}{T}$ als totales Differential der *Zustandsgröße*[6]

$$S(T,V) = \int_{S(T_0,V_0)}^{S(T,V)} dS + S(T_0,V_0)\,,$$

der *Entropie*.

[6]Zustandsgrößen sind unabhängig vom Weg, in diesem Fall im T-V-Diagramm.