9. „Rotation“ eines Vektorfeldes, Stoke’scher Satz, Ampere’sches Gesetz

9.1. rot $\vec{E} = \vec{0}$ als notwendiges Kriterium für das elektrische Feld in der Elektrostatik

Wir haben für ein konservatives Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ bzw. für ein elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{r})$ gezeigt:

$$\boxed{\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi(\vec{r}) \Longleftrightarrow \oint d\vec{r}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = 0 \text{ für alle geschlossenen Wege}}$$

$$(\vec{F}(\vec{r}) = -\mathrm{grad}\,V(\vec{r}) \text{ in der Mechanik})$$

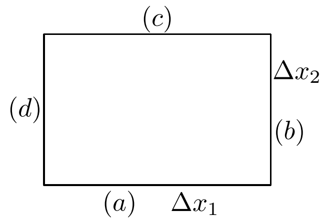
$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi$ heißt

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\vec{e}_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\vec{e}_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\vec{e}_3\right) = \vec{\nabla}\varphi$$

mit $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}$ in der Koordinatendarstellung. Wir bilden jetzt $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}$:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\times\vec{\nabla} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{vmatrix} \\
&= \vec{e}_1 \underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2\,\partial x_3} - \frac{\partial^2}{\partial x_3\,\partial x_2}\right)}_{=0} + \vec{e}_2 \underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x_3\,\partial x_1} - \frac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial x_3}\right)}_{=0} + \vec{e}_3 \underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial x_2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2\,\partial x_1}\right)}_{=0}
\end{aligned}$$

Für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion gilt also $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla} = \vec{0}$, d. h. rot grad $= \vec{0}$, siehe hierzu auch Abschnitt 8.2 f). Wir erhalten $\vec{\nabla}\times\underbrace{(-\vec{\nabla}\varphi)}_{\vec{E}} = -(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla})\varphi = \vec{0}$, d. h. rot $\vec{E} := \vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{0}$ ist ein *notwendiges* Kriterium für das elektrische Feld in der Elektrostatik.



9.2. Der Stoke’sche Satz

Ziel: rot $\vec{E}$ als *hinreichendes* Kriterium für statisches elektrisches Feld.

a). Wir betrachten ein (infinitesimales) Rechteck in der 1-2 Ebene (s. Abbildung) und berechnen

$$\begin{aligned}
\oint_{\text{Rechteck}} d\vec{r}\cdot\vec{E}(\vec{r}) &= \int_{x_1}^{x_1+\Delta x_1} dx_1' E_1(x_1', x_2, x_3) && (a) \\
&+ \int_{x_2}^{x_2+\Delta x_2} dx_2' E_2(x_1+\Delta x_1, x_2', x_3) && (b) \\
&+ \int_{x_1+\Delta x_1}^{x_1} dx_1' E_1(x_1', x_2+\Delta x_2, x_3) && (c) \\
&+ \int_{x_2+\Delta x_2}^{x_2} dx_2' E_2(x_1, x_2', x_3)\,. && (d)
\end{aligned}$$

Wir fassen (a) und (c), (b) und (d) zusammen und erhalten mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung für $\bar{x}_1 \in (x_1, x_1 + \Delta x_1), \bar{x}_2 \in (x_2, x_2 + \Delta x_2)$

$$\oint\limits_{\text{Rechteck}} d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = -\int_{x_1}^{x_1+\Delta x_1} dx_1' \Delta x_2 \frac{\partial E_1}{\partial x_2}(x_1', \bar{x}_2, x_3) + \int_{x_2}^{x_2+\Delta x_2} dx_2' \Delta x_1 \frac{\partial E_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, x_2', x_3)\,.$$

Bei Anwendung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung ergibt sich für $\bar{\bar{x}}_1 \in (x_1, x_1 + \Delta x_1), \bar{\bar{x}}_2 \in (x_2, x_2 + \Delta x_2)$

$$\oint\limits_{\text{Rechteck}} d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\partial E_1}{\partial x_2}(\bar{\bar{x}}_1, \bar{x}_2, x_3)\Delta x_2\, \Delta x_1 + \frac{\partial E_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{\bar{x}}_2, x_3)\Delta x_1\, \Delta x_2\,. \tag{9.1}$$

Aufgrund der Stetigkeit der Ableitungen können wir in Gleichung 9.1 im Grenzübergang für $\Delta x_1, \Delta x_2 \longrightarrow 0$ die Differentiale als dritte Komponente der Rotation von $\vec{E}$ identifizieren und wir erhalten

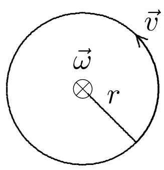
$$\oint\limits_{\text{Rechteck}} d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \left(-\frac{\partial E_1}{\partial x_2} + \frac{\partial E_2}{\partial x_1}\right) \Delta x_1\, \Delta x_2 = (\operatorname{rot} \vec{E})_3 \Delta x_1\, \Delta x_2\,,$$

d. h. es gilt

$$\boxed{\lim_{\Delta x_1, \Delta x_2 \to 0} \frac{\oint\limits_{\text{Rechteck}} d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r})}{\Delta x_1\, \Delta x_2} = (\operatorname{rot} \vec{E})_3}$$

Geometrisch können wir $\Delta x_1\, \Delta x_2$ als Fläche mit Flächenvektor $\Delta x_1\, \Delta x_2\, \vec{e}_3$ interpretieren.

Wir gehen jetzt vom 2-Dimensionalen zum 3-Dimensionalen über. Bei entsprechender zyklischer Vertauschung (1–2 $\Rightarrow$ 2–3 $\Rightarrow$ 3–1) erhalten wir analog die erste und zweite Komponente von rot $\vec{E}$.



Bemerkung (Zum Namen „Rotation“): Wir betrachten die Kreisströmung $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{r}$, $\vec{\omega}$ konstant. Der Ausdruck

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\vec{\nabla} \times \vec{v}(\vec{r}) &= \frac{1}{2}\vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\
&\overset{\omega \text{ const.}}{=} \frac{1}{2}(\vec{\omega}\, \vec{\nabla} \cdot \vec{r} - \vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}\, \vec{r}) \\
&= \frac{1}{2}(\vec{\omega}\, 3 - \vec{\omega}\, 1) = \vec{\omega}
\end{aligned}$$

Nebenrechnung:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3,$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} (x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Matrizenmultiplikation)

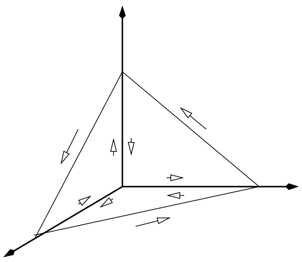
beschreibt die Rotation des Wirbels. Vorsicht bei der Anwendung des Grassmann'schen Entwicklungssatzes („BAC–CAB“–Regel)! Die Vektoralgebra ist so zu verwenden, daß der Differentialoperator $\vec{\nabla}$ immer vor dem zu differenzierenden Ausdruck zu stehen kommt (anderenfalls muß man die Differentiation durch Pfeile $\curvearrowright$ deutlich machen).

b). Der Satz von Stokes

$$\boxed{\underset{\substack{\text{geschlossene}\\ \text{Kurve C}}}{\oint} d\vec{r}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \underset{\substack{\text{Fläche, von}\\ \text{C umrandet}}}{\int} d\vec{A}\cdot\operatorname{rot}\vec{E}}$$

„Beweis“ (Vollständiger Beweis in der Vektoranalysis, fordert viel Vorarbeit!).

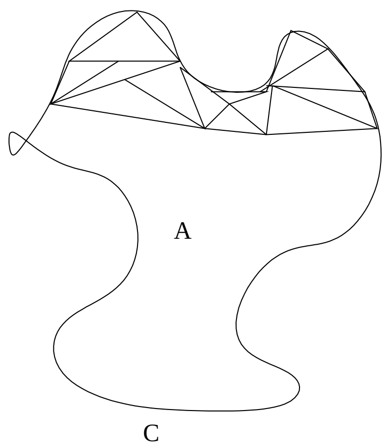
(i) $\oint d\vec{r}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = d\vec{A}\cdot\operatorname{rot}\vec{E}$ bei Integration über beliebige, infinitesimale, ebene Flächen (z. B. Dreiecke)



Betrachten wir also ein windschiefes Dreieck der Fläche ΔA im Raum. Da sich bei der Summation die „inneren Linienintegrale“ herausheben, können wir das Linienintegral über den Dreiecksrand C darstellen als drei Linienintegrale C_i über je eine Dreiecksseite der Fläche A_i und zwei zugehörige Koordinatenachsenabschnitte:

$$\oint_C d\vec{r}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{3}\oint_{C_i} d\vec{r}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{3}(rot\,\vec{E})_i(\Delta A)_i = (rot\,\vec{E})\cdot\Delta\vec{A}$$

(ii) Wenden wir uns nun einer beliebigen geschlossenen Kurve C zu; eine solche Kurve ist im Allgemeinen nicht eben. Man kann sie aber in jedem Fall mit einer Fläche ausfüllen, so dass C die Randkurve dieser Fläche ist.[7] Teilt man nun die Fläche in kleine Flächestücke



(in der Regel Dreiecke: „Triangulierung“) auf, so wird die Randkurve durch einen Polygonzug approximiert. Man kann daher wie im obigen Fall das Integral über die Randkurve als Summe von Integralen über die Berandung der kleinen Flächenstücke schreiben; die Summe der „inneren Integrale“ ist wiederum gleich Null:

$$\oint_C d\vec{r}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \sum_k \oint_{C_k} d\vec{r}\cdot\vec{E}(\vec{r})$$

[7] Damit das für jede beliebige Kurve C gilt, muss das Gebiet, in dem die Kurve liegt, einfach zusammenhängend sein, das heißt, jede geschlossene Kurve muss sich zu einem Punkt zusammenziehen lassen.

(iii) Geht man nun zu infinitesimal kleinen Flächenstücken über, so erhält man den Satz von Stokes:

$$\oint_C d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (rot\,\vec{E}) \cdot (\Delta\vec{A})_k = \int_A d\vec{A} \cdot (rot\,\vec{E}),$$

also kurz

$$\boxed{\oint_{C=\partial A} d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \int_A d\vec{A} \cdot (rot\,\vec{E})}$$

wobei $C = \partial A$ bedeutet, dass C die Randkurve der Fläche A ist. Damit erhält man aus $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ direkt $\oint_C d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 0$, also gilt in einfach zusammenhängenden Gebieten

$$\boxed{E = -\operatorname{grad} \phi \iff \oint_C d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 0 \iff \operatorname{rot} \vec{E} = 0}$$

9.3. Das Ampere'sche Gesetz

Nach der Einführung in der Experimentalphysik werden wir dieses Thema ausführlicher behandeln. Aus der Experimentalphysik-Vorlesung ist bereits die Gleichung bekannt, die die Integration des Magnetfelds über eine geschlossene Kurve C in Beziehung setzt mit dem Stromfluß durch die durch die Kurve berandete Fläche A:

$$\oint_C d\vec{r} \cdot \vec{B} = \mu_0 I_{\text{tot}} = \mu_0 \int_A d\vec{A} \cdot \vec{j}\,.$$

Mit dem Satz von Stokes ergibt sich $\oint_C d\vec{r} \cdot \vec{B} = \int_A d\vec{A} \cdot (\operatorname{rot} \vec{B})$, und daher gilt für beliebige Flächen $\vec{A}$ die Aussage

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}\,.}$$

Dieses Ergebnis erhält man auch, wenn man sich die Definition von $rot\,\vec{B} = \nabla \times \vec{B}$ vor Augen hält:

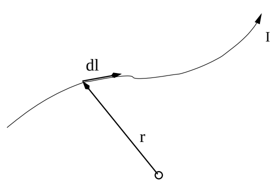
$$(\operatorname{rot} \vec{B})_i = \lim_{\Delta A_i \to 0} \frac{\oint_{C_i = \partial(\Delta A_i)} d\vec{r} \cdot \vec{B}}{\Delta A_i} = \mu_0 (\vec{j})_i$$

Damit stellt sich $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ ganz ähnlich dar wie die Quellengleichung für die Divergenz des elektrischen Felds, nämlich $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$. Zudem gilt in der Elektrostatik $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$. Dem entspricht in der Magnetostatik $\operatorname{div} \vec{B} = 0$, d. h. es gibt keine magnetischen Quellen.

Aus $\rho(\vec{r})$ konnten wir leicht $\vec{E}(\vec{r})$ berechnen; dies ist für den Fall $\vec{j} - \vec{B}$ nicht so leicht möglich: Entweder man wählt den Weg der Vorlesung über die Lorentztransformation (was sicher nicht der historischen Herleitung entspricht), oder man führt als Ansatz das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ ein, für das gelten muß:

$$\vec{B} = rot\,\vec{A}$$

In Abschnitt 10.4 b) werden wir letzteren Weg beschreiten. Die Lösung dieses Problems, das *Biot-Savart'sche Gesetz*, wollen wir jedoch schon hier angeben: Für ein Leiterstück, durch das der Strom I fließt, gilt:



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \, \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

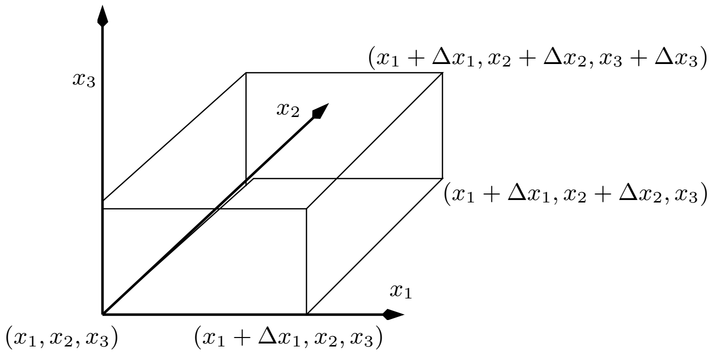
10. Divergenz in kartesischen Koordinaten; Gauß'scher Satz; Vektoranalysis

10.1. Divergenz

Wir haben die Divergenz von $\vec{E}$ als Quellstärke definiert:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \lim_{V \to 0} \frac{\int_{A=\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{E}}{V}$$

Wie oben bedeutet $A = \partial V$, dass die Oberfläche A das Volumen V berandet.[8]



Wollen wir die Divergenz $\operatorname{div} \vec{E}$ ähnlich wie $\operatorname{rot} \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{B}$ durch Ableitungen ausdrücken, betrachten wir dazu praktischerweise einen Quader (s. obige Abbildung) mit infinitesimalem Volumen und berechnen $\int_A d\vec{A} \cdot \vec{E}(\vec{r})$ über die Quaderoberfläche. Gegenüberliegende Seiten (hier zuerst die Seiten in bzw. parallel zur 1-2-Ebene) liefern aufgrund des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_1+\Delta x_1} dx_1' \int_{x_2}^{x_2+\Delta x_2} dx_2' (-E_3(x_1', x_2', x_3) + E_3(x_1', x_2', x_3 + \Delta x_3) &= \\ \int_{x_1}^{x_1+\Delta x_1} dx_1' \int_{x_2}^{x_2+\Delta x_2} dx_2' \frac{\partial}{\partial x_3} E_3(x_1', x_2', \bar{x}_3) \Delta x_3, &\end{aligned}$$

wobei $\bar{x}_3$ einen Punkt zwischen x_3 und $x_3 + \Delta x_3$ darstellt. Der Mittelwertsatz der Integralrechnung ergibt dann für das obige Doppelintegral

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_1+\Delta x_1} dx_1' \int_{x_2}^{x_2+\Delta x_2} dx_2' (-E_3(x_1', x_2', x_3) + E_3(x_1', x_2', x_3 + \Delta x_3) &= \\ \frac{\partial}{\partial x_3} E_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \,. &\end{aligned}$$

Die Seitenflächen des Quaders in bzw. parallel zur 2-3-Ebene sowie 3-1-Ebene berechnen sich analog. Mit $\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 = \Delta V$ erhält man also:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \lim_{V \to 0} \frac{\int_{A=\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{E}}{V} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} E_i(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

[8] Dies entspricht der Definition von $(\operatorname{rot} \vec{B})_i$, welche wir im Abschnitt über das Ampere'sche Gesetz gefunden haben.

10.2. Gauß'scher Satz

Betrachten wir nun ein endliches Volumen:

(i) Dieses Volumen kann man approximativ aus kleinen Quadern zusammensetzen.

(ii) Das Flächenintegral über die Randfläche A des approximierten Volumens schreibt man nun als Summe über die Flächenintegrale der kleinen Quader-Volumina ΔV_i. Da die Integration über die inneren Flächen wieder herausfällt, erhält man:

$$\int_A d\vec{A} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Delta A_i} d\vec{A} \cdot \vec{E}(\vec{r}) \approx \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{div}\, \vec{E})\, \Delta V_i$$

(iii) Geht man nun zum Grenzwert $n \longrightarrow \infty$ über, ergibt sich der Satz von Gauß:

$$\boxed{\int_{A=\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \int_{\Delta A_i} (\mathrm{div}\, \vec{E})\, \Delta V_i = \int_V \underbrace{d^3r}_{\text{„}dV\text{“}}\, \mathrm{div}\, \vec{E}}$$

Mit $\mathrm{div}\, \vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$ erhält man dann wieder das Gauß'sche Gesetz

$$\int_{A=\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \int_V d^3r\, \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}\,.$$

10.3. Vektoranalysis im Rahmen der Elektrizitätslehre

Wir haben bisher den Gradienten, die Divergenz und die Rotation mit dem Differentialoperator $\vec{\nabla}$ gebildet:

$$\mathrm{grad}\, \phi = \vec{\nabla}\phi, \qquad \mathrm{div}\, \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}, \qquad \mathrm{rot}\, \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E}, \qquad \mathrm{rot}\, \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{B}$$

Für die Elektrostatik haben wir folgende Gesetzmäßigkeiten erhalten:

$$\boxed{\mathrm{div}\, \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \qquad \mathrm{rot}\, \vec{E} = 0, \qquad \vec{B} = 0}$$

Ebenso gilt in der Magnetostatik:

$$\boxed{\mathrm{div}\, \vec{B} = 0, \qquad \mathrm{rot}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \qquad \vec{E} = 0}$$

Nachfolgende Tabelle enthält eine Zusammenstellung der wichtigsten Rechenregeln im Umgang mit dem Nablaoperator.

Vektorrechnung bei Verwendung des Differentialoperators $\vec{\nabla}$ (Quelle: [3])
Achtung: ϕ und ψ sind skalare Funktionen, $\vec{U}$ und $\vec{V}$ sind vektorwertige Funktionen.
(a) $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\phi = \vec{\nabla}^2\phi = \Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$
(b) $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\phi = \operatorname{rot}\operatorname{grad}\phi = 0$
(c) $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{V} = \vec{e}_x\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_y}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial x\,\partial z}\right)$ $+\vec{e}_y\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial y\,\partial z}\right)+\vec{e}_z\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x\,\partial z}+\frac{\partial^2 V_y}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right)$
(d) $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{V}) = \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{V} = 0$
(e) $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V}) = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{V} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}) - \vec{\nabla}^2\vec{V} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{V} - \Delta\vec{V}$
(f) $\vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{V}) = \phi(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}) + \vec{V}\cdot(\vec{\nabla}\phi)$
(g) $\vec{\nabla}\times(\phi\vec{V}) = \phi(\vec{\nabla}\times\vec{V}) + \vec{V}\times(\vec{\nabla}\phi)$
(h) $\vec{\nabla}\cdot(\vec{U}\times\vec{V}) = \vec{V}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{U}) - \vec{U}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{V})$
(i) $\vec{\nabla}\times(\vec{U}\times\vec{V}) = (\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{U} - (\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} - \vec{V}(\vec{\nabla}\cdot\vec{U}) + \vec{U}(\vec{\nabla}\cdot\vec{V})$
(j) $\vec{\nabla}(\vec{U}\cdot\vec{V}) = \vec{U}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V}) + (\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} + \vec{V}\times(\vec{\nabla}\times\vec{U}) + (\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{U}$
(k) $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\phi\times\vec{\nabla}\psi) = 0$

Mit etwas Übung lassen sich die Ergebnisse aus obiger Tabelle leicht berechnen.

Anmerkung (zu (j)): Wir haben bisher die Produktregel angewandt, um (j) zu berechnen, siehe auch Abschnitt 8.2 e).

$$\vec{\nabla}(\vec{U}\cdot\vec{V}) = \underbrace{(\vec{\nabla}\vec{U})}_{\substack{\text{Matrix-}\\\text{mult.}}}\cdot\vec{V} + \underbrace{(\vec{\nabla}\vec{V})}_{\substack{\text{Matrix-}\\\text{mult.}}}\cdot\vec{U}$$

In obiger Tabelle erhält man diese Form, indem man den Grassmann'schen Entwicklungssatz anwendet:

$$\vec{U}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V}) = (\vec{\nabla}\vec{V})\cdot\vec{U} - \vec{U}\cdot\vec{\nabla}\vec{V}\,.$$

Analog für $\vec{V}\times(\vec{\nabla}\times\vec{U})$.

Zu guter Letzt noch einige weitere Hilfsmittel, die durch einfache Rechnung überprüft werden können:

- $\vec{\nabla}f(r) = f'(r)\,\frac{\vec{r}}{r}$ (Kettenregel)
- Für $\vec{a} = \text{const.}$ gilt $\vec{\nabla}\left(\vec{a}\cdot\vec{V}(\vec{r})\right) = \left(\vec{\nabla}\vec{V}(\vec{r})\right)\cdot\vec{a}$, wobei $\vec{\nabla}\vec{V}(\vec{r})$ als Matrizenmultiplikation aufgefaßt wird.
- $\vec{\nabla}\cdot\vec{r} = (\ \vec{\nabla}\ )\left(\vec{r}\right) = 3$, $\vec{\nabla}\vec{r} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \left(\vec{\nabla}\right)(\ \vec{r}\ )$. $\vec{\nabla}\vec{r}$ wird „Tensorprodukt" genannt und als Matrixmultiplikation einer Zeile mit einer Spalte verstanden.

10.4. Potential, Vektorpotential

a). Für ein wirbelfreies Feld $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ folgt $\operatorname{div}\vec{E} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi = -\Delta\phi$. Δ wird *Laplace-Operator* genannt und es gilt $\Delta = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

Weiterhin folgt für ein wirbelfreies Feld automatisch $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\phi = \vec{0}$. In der Elektrostatik erhalten wir damit die sog. *Poisson-Gleichung*

$$\boxed{\Delta\varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\varphi = \frac{-\rho(x_1,x_2,x_3)}{\varepsilon_0}}$$

b). In der Magnetostatik machen wir folgenden Ansatz:

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r}) \qquad \text{mit dem } \textbf{Vektorpotential } \vec{A}(\vec{r})$$

Für diesen Ansatz folgt

- $\operatorname{div}\vec{B} = \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) \overset{\text{Spatprodukt}}{=} (\vec{\nabla}\times\vec{\nabla})\cdot\vec{A} = 0$
- $\operatorname{rot}\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\vec{A} = \vec{\nabla}\underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})}_{?} - \Delta\vec{A}$

  $\vec{A}$ ist nicht eindeutig bestimmt, wir führen daher eine sogenannte *Eichtransformation* durch: $\boxed{\vec{A}+\vec{\nabla}f(\vec{r})}$ führt zu identischem Magnetfeld $\vec{B}$, denn $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}f = 0$ (*Eichfreiheit*)

  Als Eichung fordern wir zusätzlich $\operatorname{div}\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$, was als *Coulombeichung* bezeichnet wird.

Als Ergebnis unserer Überlegungen erhalten wir dann folgende Vektorgleichung:

$$\boxed{\operatorname{rot}\vec{B}(\vec{r}) = -\Delta\vec{A}(\vec{r}) = \mu_0\vec{j}(\vec{r})} \tag{10.1}$$

Jede Komponente von Gleichung (10.1) besitzt die mathematische Form einer Poisson–Gleichung, deren Lösung durch Superposition der Coulombpotentiale $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\,|\vec{r}-\vec{r}'|}$ entsteht:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\,\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Entsprechend gilt für das Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,,$$

falls $\vec{j}(\vec{r}')$ im Unendlichen verschwindet und keine sonstigen Randbedingungen existieren. Für $\vec{B} = \vec{\nabla}_r\times\vec{A}(\vec{r})$ erhalten wir dann

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\vec{\nabla}_r\times\left(\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\,(-1)\vec{j}(\vec{r}')\times\vec{\nabla}_r\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)\\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\,\vec{j}(\vec{r}')\times\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\end{aligned}$$

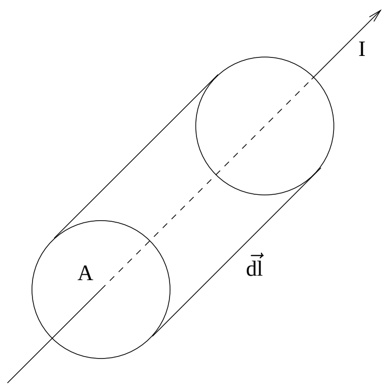


Abbildung 2: Stromdurchflossenes Leiterelement

Wir führen die Volumenintegration über in eine eindimensionale Integration über die Längenelemente $d\vec{l}$: $\int d^3r' \longrightarrow \int dA\, d\vec{l}$, siehe Abbildung 2. Dies ergibt das *Biot-Savart'sche Gesetz*

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int I\, d\vec{l} \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

11. Berechnung von $\vec{\nabla}$, grad $\phi(\vec{r})$, div $\vec{A}$ und div grad $\phi(\vec{r})$ in rechtwinkligen lokalen Koordinaten, speziell in Kugelkoordinaten

Dieser Themenbereich ist sehr umfangreich, weshalb wir hier nur eine gekürzte Fassung präsentieren wollen.

11.1. $\vec{\nabla}$ in allgemeinen orthonormalen Koordinaten

Der Differentialoperator in kartesischen Koordinaten ist definiert als $\vec{\nabla} = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Für allgemeinene Koordinaten u_i sind die Koordinatenvektoren gegeben durch

$$\vec{e}_{u_i} = \frac{1}{|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}|} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \tag{11.1}$$

wobei die Normierung durch die sog. *Skalenfaktoren* $f_{u_i} = |\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}|$ erreicht wird.

Beispiel: Kugelkoordinaten r, ϑ, φ (Wiederholung):

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y = r \sin\vartheta \sin\varphi, \quad z = r\cos\vartheta$$

Die Koordinatenvektoren sind gegeben durch

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit den Skalenfaktoren $f_r = 1, f_\vartheta = r, f_\varphi = r\sin\vartheta$.

Kommen wir zurück zu den allgemeinen Koordinaten u_i. Wegen Gleichung (11.1) ist

$$\vec{e}_{u_i} \cdot \vec{\nabla} = \frac{1}{f_{u_i}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \cdot \vec{\nabla} = \frac{1}{f_{u_i}} \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial u_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \overset{(*)}{=} \frac{1}{f_{u_i}} \frac{\partial}{\partial u_i}.$$

Die Umformung $(*)$ ergibt sich aus der Kettenregel, denn es gilt

$$\frac{\partial}{\partial u_i} f(x_1(u_1,u_2,u_3), x_2(u_1,u_2,u_3), x_3(u_1,u_2,u_3)) = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial u_i}$$

Nun folgt

$$\boxed{\vec{\nabla} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\vec{e}_{u_i}}{f_{u_i}} \frac{\partial}{\partial u_i}} \tag{11.2}$$

Für unser obiges Beispiel bedeutet dies

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \vec{e}_\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r\sin\vartheta} \vec{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

11.2. grad ϕ, rot $\vec{A}$, div $\vec{A}$

- grad $\phi(u_1,u_2,u_3) = \vec{\nabla}\phi = \sum_{i=1}^{3} \frac{\vec{e}_{u_i}}{f_{u_i}} \frac{\partial \phi}{\partial u_i}$, siehe Abschnitt 11.1.
- rot $\vec{A}(u_1,u_2,u_3) = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ mit $\vec{A} = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_{u_i}\, A_{u_i}(u_1,u_2,u_3)$. Wegen

$$\vec{\nabla} u_i = \sum_j \frac{\vec{e}_{u_j}}{f_{u_j}} \underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial u_j}}_{=\delta_{ij}} = \frac{\vec{e}_{u_i}}{f_{u_i}}$$

können wir $\vec{e}_{u_i}$ durch $(\vec{\nabla} u_i) f_{u_i}$ ersetzen und erhalten

$$\begin{aligned}
\text{rot}\, \vec{A} &= \vec{\nabla} \times \left(\sum_{i=1}^{3} (\vec{\nabla} u_i) f_{u_i} A_{u_i} \right) \\
&\overset{\text{Produktregel}}{=} \sum_{i=1}^{3} \left\{ (\underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}}_{=0\,!} u_i) f_{u_i} A_{u_i} - (\vec{\nabla} u_i) \times \vec{\nabla}(f_{u_i} A_{u_i}) \right\}
\end{aligned}$$

Verwenden wir Gleichung für den Gradienten und die Relation $\vec{\nabla} u_i = \vec{e}_{u_i} f_{u_i}^{-1}$ (s. o.), so können wir wegen

$$\sum_{i,j} \frac{\vec{e}_{u_i}}{f_{u_i}} \times \frac{\vec{e}_{u_j}}{f_{u_j}} \frac{\partial}{\partial u_j}(f_{u_i} A_{u_i}) = \sum_{i,j} \frac{\varepsilon_{ijk}}{f_{u_1} f_{u_2} f_{u_3}} \vec{e}_{u_k} f_{u_k} \frac{\partial}{\partial u_j}(f_{u_i} A_{u_i})$$

die Rotation von $\vec{A}$ auch in Determinanten-Schreibweise bringen:

$$\text{rot}\, \vec{A} = \frac{1}{f_{u_1} f_{u_2} f_{u_3}} \begin{vmatrix} f_{u_1} \vec{e}_{u_1} & f_{u_2} \vec{e}_{u_2} & f_{u_3} \vec{e}_{u_3} \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ f_{u_1} A_{u_1} & f_{u_2} A_{u_2} & f_{u_3} A_{u_3} \end{vmatrix}$$

- div $\vec{A}(u_1,u_2,u_3) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ mit $\vec{A} = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_{u_i}\, A_{u_i}(u_1,u_2,u_3)$. Für ein Rechtssystem gilt für $\vec{e}_{u_1}, \vec{e}_{u_2}, \vec{e}_{u_3}$ bei zyklischer Vertauschung

$$\vec{e}_{u_3} = \vec{e}_{u_1} \times \vec{e}_{u_2} = (\vec{\nabla} u_1) \times (\vec{\nabla} u_2) f_{u_1} f_{u_2}$$

und damit $\left(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} = 0\right)$

$$\begin{aligned}
\text{div}\, \vec{A} &= \vec{\nabla} \cdot \Big\{ (\vec{\nabla} u_1) \times (\vec{\nabla} u_2) f_{u_1} f_{u_2} A_{u_3} + (\vec{\nabla} u_2) \times (\vec{\nabla} u_3) f_{u_2} f_{u_3} A_{u_1} \\
&\quad + (\vec{\nabla} u_3) \times (\vec{\nabla} u_1) f_{u_3} f_{u_1} A_{u_2} \Big\} \\
&= \Big(((\vec{\nabla} u_1) \times (\vec{\nabla} u_2)) \cdot \vec{\nabla}(f_{u_1} f_{u_2} A_{u_3}) + ((\vec{\nabla} u_2) \times (\vec{\nabla} u_3)) \cdot \vec{\nabla}(f_{u_2} f_{u_3} A_{u_1}) \\
&\quad + ((\vec{\nabla} u_3) \times (\vec{\nabla} u_1)) \cdot \vec{\nabla}(f_{u_3} f_{u_1} A_{u_2}) \Big)
\end{aligned}$$

Man beachte die zyklische Vertauschung der einzelnen Summanden! Durch die Anwendung der Produktregel $\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{\nabla} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} - (\vec{\nabla} \times \vec{b}) \cdot \vec{a}$ und $(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}) = 0$ vereinfachte sich der Ausdruck. Ersetzen wir wieder ∇u_i, so erhalten wir

$$\text{div}\, \vec{A} = \frac{1}{f_{u_1} f_{u_2} f_{u_3}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_3}(f_{u_1} f_{u_2} A_{u_3}) + \frac{\partial}{\partial u_1}(f_{u_2} f_{u_3} A_{u_1}) + \frac{\partial}{\partial u_2}(f_{u_3} f_{u_1} A_{u_2}) \right\}$$

11.3. div grad ϕ

$\operatorname{div}\operatorname{grad}\phi(u_1,u_2,u_3) = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi = \Delta\phi$ wird als *Laplace-Operator* bezeichnet, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$.

In Abschnitt 11.2 haben wir die Divergenz des Vektorpotentials $\vec{A}$ in allgemeinen Koordinaten bestimmt. Für den Fall $\vec{A} = \operatorname{grad}\phi$ erhalten wir mit $\operatorname{grad}\phi = \sum_i \frac{\vec{e}_{u_i}}{f_{u_i}}\frac{\partial\phi}{\partial u_i} \implies A_i = \frac{1}{f_{u_i}}\frac{\partial\phi}{\partial u_i}$ den Laplace-Operator in allgemeinen Koordinaten:

$$\begin{aligned}\Delta\phi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\phi(u_1,u_2,u_3) &= \frac{1}{f_{u_1}f_{u_2}f_{u_3}}\left\{\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{f_{u_1}f_{u_2}}{f_{u_3}}\frac{\partial\phi}{\partial u_3}\right)+\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{f_{u_2}f_{u_3}}{f_{u_1}}\frac{\partial\phi}{\partial u_1}\right)\right.\\ &\quad\left.+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{f_{u_3}f_{u_1}}{f_{u_2}}\frac{\partial\phi}{\partial u_2}\right)\right\}\end{aligned}$$

Zusammenfassung für Kugelkoordinaten:
Die Skalenfaktoren sind $f_r = 1, f_\vartheta = r, f_\varphi = r\sin\vartheta$.

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}\phi(r,\vartheta,\varphi) &= \left(\vec{e}_r\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{1}{r}\vec{e}_\vartheta\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta}+\frac{1}{r\sin\vartheta}\vec{e}_\varphi\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\right)\\ \operatorname{rot}\vec{A}(r,\vartheta,\varphi) &= \left\{\vec{e}_r\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}(r\sin\vartheta\, A_\varphi)-\frac{\partial}{\partial\varphi}(r\, A_\vartheta)\right)+r\,\vec{e}_\vartheta\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}A_r-\frac{\partial}{\partial r}(r\sin\vartheta\, A_\varphi)\right)\right.\\ &\quad\left.+r\sin\vartheta\,\vec{e}_\varphi\left(\frac{\partial}{\partial r}(r\, A_\vartheta)-\frac{\partial}{\partial\vartheta}A_r\right)\right\}\\ \operatorname{div}\vec{A}(r,\vartheta,\varphi) &= \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\vartheta\, A_r)+\frac{\partial}{\partial\vartheta}(r\sin\vartheta\, A_\vartheta)+\frac{\partial}{\partial\varphi}(r\, A_\varphi)\right\}\\ \Delta\phi(r,\vartheta,\varphi) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\right.\\ &\quad\left.+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{cot\vartheta}{r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)\phi(r,\vartheta,\varphi)\\ &= \left\{\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}+\cot\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\right\}\phi(r,\vartheta,\varphi)\end{aligned}$$

Bemerkung: Kugelkoordinaten sind für die Behandlung fundamentaler Probleme besonders wichtig. Eine ebenso wichtige Rolle spielen Zylinderkoordinaten, für die ähnliche Formeln gelten. Wir empfehlen für einen sicheren Umgang mit den neuen Begriffen, obige Beziehungen für Zylinderkoordinaten selbst zu berechnen.