3. Übungsblatt zur Vorlesung Theoretische Physik III (Quantenmechanik)

Abgabe der Lösungen und Besprechung der Präsenzaufgabe:
in den Übungen der 4. Semesterwoche (9.11.07)

Präsenzaufgabe P3: Hermitesche Polynome (3 Punkte)

Die *Hermiteschen Polynome* H_n sind definiert durch

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

a) Geben Sie $H_n(x)$ für $0 \leq n \leq 3$ explizit an.

b) Zeigen Sie: Die Hermiteschen Polynome erfüllen

$$\left. \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{2xt-t^2} \right|_{t=0} = H_n(x),$$

bzw. äquivalent

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}. \qquad ☺$$

Aufgabe H4: Hermitesche Funktionen (5 Punkte)

Die *Hermiteschen Funktionen* Ψ_n sind mit Hilfe der Hermiteschen Polynome aus Aufgabe P3 definiert:

$$\Psi_n(x) = \left(n!\, 2^n \sqrt{\pi}\right)^{-1/2} \; e^{-x^2/2} \, H_n(x).$$

a) Zeigen Sie: Die Hermiteschen Polynome H_n lösen die *Hermitesche Differenzialgleichung*

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0.$$

Hinweis: Wenden Sie den Operator $\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t}$ auf beide Seiten von Gleichung ☺ an.

b) Zeigen Sie damit: $\psi_n(x) \equiv \Psi_n(\sqrt{m\omega/\hbar}\, x)$ erfüllt die Schrödingergleichung des harmonischen Oszillators,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi_n''(x) + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \psi_n(x) = E_n \psi_n(x) \qquad \text{mit } E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

Aufgabe H5: Kohärente Zustände (10 Punkte)

Betrachten Sie den eindimensionalen harmonischen Oszillator mit Frequenz ω aus der Vorlesung. Wir bezeichnen den n-ten angeregten Zustand mit $|\, n\rangle$.

a) Zeigen Sie, dass für $\alpha \in \mathbb{C}$ der Zustand

$$|\, \alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |\, n\rangle$$

ein normierter Eigenzustand zum Absteigeoperator a mit Eigenwert α ist. Solche Zustände werden *kohärente* oder *quasiklassische Zustände* genannt.

b) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle X\rangle$, $\langle X^2\rangle$, $\langle P\rangle$, $\langle P^2\rangle$ und $\langle H\rangle$ im Zustand $|\, \alpha\rangle$. Berechnen Sie die Schwankungsquadrate $(\Delta X)^2$ und $(\Delta P)^2$, und zeigen Sie, dass $(\Delta X)(\Delta P) = \hbar/2$.

Hinweis: Drücken Sie die Operatoren X, P und H durch die Auf- und Absteigeoperatoren $a^\dagger$ und a aus.

c) Angenommen, der Oszillator sei zur Zeit $t = 0$ im Zustand $|\, \alpha_0\rangle$ mit $\alpha_0 = \rho e^{i\phi}$ (wobei $\phi \in \mathbb{R}$, $\rho \in \mathbb{R}_+$). Zeigen Sie, dass der Zustand für beliebige t ebenfalls ein kohärenter Zustand ist, der als $e^{-i\omega t/2}\,|\, \alpha(t)\rangle$ geschrieben werden kann. Bestimmen Sie $\alpha(t)$ in Abhängigkeit von ρ, ϕ, ω und t.

d) Berechnen Sie die Zeitentwicklung der Erwartungswerte $\langle X\rangle$ und $\langle P\rangle$. Erklären Sie damit die Bezeichnung “quasiklassischer Zustand”.