4. Übungsblatt zur Vorlesung Theoretische Physik III (Quantenmechanik)

Abgabe der Lösungen und Besprechung der Präsenzaufgabe:
in den Übungen der 5. Semesterwoche (16.11.07)

Präsenzaufgabe P4: Kugelflächenfunktionen (3 Punkte)

Zur Erinnerung: Die *Kugelflächenfunktionen* Y_l^m sind ein orthonormales System von Eigenfunktionen des Laplaceoperators auf der 2-Sphäre. Sie sind in Polarkoordinaten gegeben durch

$$Y_l^m(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\, e^{im\phi}\, P_l^m(\cos\theta).$$

Hierbei sind m und l ganzzahlig, $l \geq 0$ und $-l \leq m \leq l$, und die *zugeordneten Legendrefunktionen* P_l^m sind gegeben durch

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l\, l!}\left(1-x^2\right)^{m/2}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l.$$

a) Geben Sie Y_0^0, Y_1^0, Y_1^1, Y_1^{-1} sowie Y_2^0 explizit an.

b) Vergewissern Sie sich, dass ihre Ergebnisse paarweise orthogonal sind.

c) Entwickeln Sie $f(\theta,\phi) = \sin\theta\sin\phi$ nach Kugelflächenfunktionen.

Aufgabe H6: Spektrum des H-Atoms (8+2 Punkte)

In dieser Aufgabe bestimmen Sie das Spektrum des Wasserstoffatoms mit Hilfe von Auf- und Absteigeoperatoren. Sei $\psi_{Elm}(r,\theta,\phi) = f_{El}(r)\, Y_l^m(\theta,\phi)$ die Wellenfunktion eines gebundenen Zustandes mit Energie $E < 0$, $\mathbf{L}^2$-Eigenwert $\hbar^2 l(l+1)$ und L_3-Eigenwert $\hbar m$. Wir definieren $\epsilon \equiv -2m_e E/\hbar^2$, $\beta \equiv m_e e^2/\hbar^2$ und $g_{\epsilon l}(r) \equiv r\, f_{El}(r)$.

a) Ausgehend von der Schrödingergleichung des Wasserstoffatoms

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m_e}\left(\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right) + \frac{\mathbf{L}^2}{2m_e r^2} - \frac{e^2}{r}\right)\psi_{Elm} = E\,\psi_{Elm}$$

zeigen Sie, dass $h_l\, g_{\epsilon l}(r) = \epsilon\, g_{\epsilon l}(r)$ mit $h_l = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2\beta}{r}\right)$.

b) Zeigen Sie, dass die Operatoren $a_l \equiv \frac{\partial}{\partial r} + \frac{l}{r} - \frac{\beta}{l}$ und $a_l^\dagger \equiv -\frac{\partial}{\partial r} + \frac{l}{r} - \frac{\beta}{l}$ adjungiert sind bezüglich des Skalarproduktes

$$\langle f|g\rangle \equiv \int_0^\infty dr\, \overline{f(r)}g(r) \quad \text{(für Funktionen } f,g \text{ mit } f(0)=g(0)=0).$$

c) Zeigen Sie: $h_l = -a_l^\dagger a_l + \frac{\beta^2}{l^2} = -a_{l+1}a_{l+1}^\dagger + \frac{\beta^2}{(l+1)^2}$.

d) Zeigen Sie: $a_{l+1}^\dagger g_{\epsilon l}$ ist entweder 0 oder Eigenfunktion zu h_{l+1} mit Eigenwert ϵ.

e) Leiten Sie aus der Positivität der Norm $\left\langle a^\dagger_{l+1}\, g_{\epsilon l} \middle| a^\dagger_{l+1}\, g_{\epsilon l} \right\rangle \geq 0$ her, dass es für jedes mögliche ϵ (beachte $\epsilon > 0$) ein größtmögliches l gibt. Bezeichne dieses mit $\bar{l}$, so dass $a^\dagger_{\bar{l}+1}\, g_{\epsilon\bar{l}} = 0$. Zeigen Sie damit, dass die möglichen Bindungsenergien von der Form $E = -m_e e^4/(2\hbar^2 n^2)$ sind mit natürlichen Zahlen n.

f) (2 Extrapunkte) Lösen Sie die Differenzialgleichung $a^\dagger_{\bar{l}+1}\, g_{\epsilon\bar{l}}(r) = 0$ für beliebiges $\bar{l} \in \mathbb{N}_0$, und folgern Sie aus der Normierbarkeit der Lösung, dass jedes $n \in \mathbb{N}^*$ nach der obigen Formel eine mögliche Bindungsenergie ergibt.

Aufgabe H7: Neutron im Gravitationsfeld (8 Punkte)

Eine Arbeitsgruppe am Physikalischen Institut in Heidelberg lässt kalte Neutronen im Gravitationsfeld der Erde auf einen horizontalen Spiegel fallen und misst dann die sich ergebenden Energieniveaus (siehe z.B. `http://www.physi.uni-heidelberg.de/~abele/nature.pdf`). Angenommen, der Spiegel reflektiere die Neutronen perfekt und befinde sich bei $x = 0$. Das Potenzial ist dann $V(x) = mgx$ für $x \geq 0$ und ∞ für $x < 0$, so dass die Schrödingergleichung im Ortsraum für positive x lautet

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + (mgx - E)\,\psi(x) = 0.$$

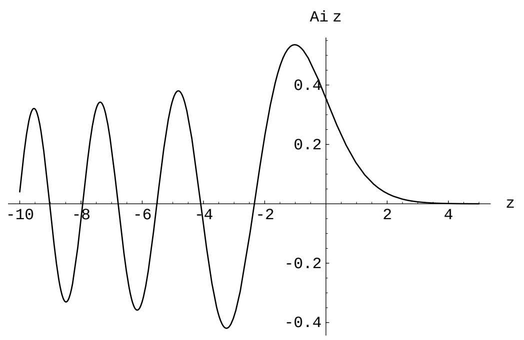
Die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung (eine Variante der *Airyschen Differenzialgleichung*) ist nicht durch elementare Funktionen ausdrückbar. Es ist jedoch möglich, einen Integralausdruck zu gewinnen.

a) Geben Sie die Schrödingergleichung im Impulsraum an.

b) Finden Sie die allgemeine Lösung der Schrödingergleichung im Impulsraum. Schreiben Sie die Wellenfunktion im Ortsraum im Bereich $x \geq 0$ als Integral über die so bestimmten Fouriermoden. Die Normierung und die Energie können Sie zunächst unbestimmt lassen. Die möglichen Energien werden dann durch die Randbedingung bei $x = 0$ festgelegt, s.u.

c) Welche Randbedingung muss die Wellenfuktion bei $x = 0$ erfüllen? Führen Sie damit die Energien E_n der gebundenen Zustände auf die Nullstellen der *Airy-Funktion* Ai zurück. Diese ist definiert durch

$$\mathrm{Ai}\,(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, \cos\left(\frac{t^3}{3} + tz\right).$$



Die Nullstellen der Airy-Funktion sind negative reelle Zahlen. Für sie ist kein geschlossener Ausdruck bekannt, sie sind jedoch numerisch leicht zu beliebiger Genauigkeit berechenbar. Die erste Nullstelle ist bei $z_0 = -2.338\ldots$

d) Berechnen Sie die Grundzustandsenergie in eV.