7. Übungsblatt zur Vorlesung Theoretische Physik III (Quantenmechanik)

Abgabe der Lösungen und Besprechung der Präsenzaufgabe:
in den Übungen der 8. Semesterwoche (7.12.07)

Präsenzaufgabe P7: Diracschreibweise, Orts- und Impulsraum (2 Punkte)

Betrachten Sie ein quantenmechanisches Teilchen in einer Dimension.

a) Sei $|\, p\rangle$ ein Eigenzustand zum Impulsoperator mit Eigenwert p. Geben Sie die Ortsraumdarstellung (ohne Normierung) an.

b) Sei $|\, \psi\rangle$ ein Zustand mit Ortsraumwellenfunktion $\psi(x)$. Drücken Sie die Fouriertransformierte von $\psi(x)$ in Diracschreibweise aus.

c) Sei A ein selbstadjungierter (i.A. nichtlokaler) Operator und $|\, \psi'\rangle = A\,|\, \psi\rangle$. Zeigen Sie, dass die Fouriertransformierte von $\psi'(x)$ gegeben ist durch die Wirkung von A (dargestellt im Impulsraum) auf die Fouriertransformierte von $\psi(x)$.

Aufgabe H13: Baker-Campbell-Hausdorff-Formel (5 Punkte)

a) Beweisen Sie die *Baker-Campbell-Hausdorff-Formel* für Operatoren A und B,

$$e^A B e^{-A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[{}^n A, B\right].$$

Hierbei ist $[{}^n A, B]$ rekursiv definiert durch $[{}^0 A, B] \equiv B$ und $[{}^{k+1} A, B] \equiv [A, [{}^k A, B]]$, also $[{}^n A, B] = [A, \ldots [A, [A, B]] \ldots]$ mit n Klammern.

Hinweis: Betrachten Sie $f(t) = e^{tA} B e^{-tA}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

b) Überprüfen Sie die BCH-Formel mit $A = X$ und $B = P$, dem Orts- und Impulsoperator in einer Dimension, in der Ortsraumdarstellung.

c) Es gelte $[A, B] = c\,\mathbb{1}$ mit $c \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie

$$e^A e^B = e^B e^A e^c.$$

Aufgabe H14: Paulimatrizen (5 Punkte)

a) Zeigen Sie: Eine allgemeine hermitesche 2×2-Matrix Σ lässt sich schreiben als $\Sigma = \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma} + b\mathbb{1}$. Hierbei ist $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$, $b \in \mathbb{R}$, und $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ sind die Paulimatrizen:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Zeigen Sie:

$$e^{i\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\sigma}} = \cos|\mathbf{a}|\ \mathbb{1} + i\ \sin|\mathbf{a}|\ \frac{\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{|\mathbf{a}|}.$$

c) Finden Sie eine unitäre Matrix, die σ^2 diagonalisiert, und stellen Sie sie als $e^{i\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\sigma}}$ dar.

Aufgabe H15: Ramsauer-Effekt (5 Punkte)

1921 untersuchte Ramsauer die Durchlässigkeit von Edelgasen für niederenergetische Elektronenstrahlen. Klassisch würde man erwarten, dass die Kollisionswahrscheinlichkeit mit zunehmender Energie monoton abfällt. Es stellte sich jedoch heraus, dass das Gas für bestimmte Werte der Strahlenergie praktisch vollständig durchlässig wird. Dies ist ein quantenmechanischer Effekt, der anhand eines einfachen eindimensionalen Modells veranschaulicht werden soll.
In Aufgabe H2 haben Sie den Tunneleffekt an einer rechteckigen Potenzialbarriere untersucht. Das Ergebnis für die Tunnelwahrscheinlichkeit war

$$T(E) = \frac{4k^2q^2}{(k^2+q^2)^2\sinh^2(qa) + 4k^2q^2}.$$

Hierbei ist $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ die Wellenzahl der von links einlaufenden ebenen Welle und $q = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$, sowie V_0 die Höhe und a die Breite der Tunnelbarriere.
Betrachten Sie nun Streuzustände für das "umgekehrte" Potenzial

$$V = \begin{cases} -V_0, & 0 \le x \le a \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $V_0 > 0$.

a) Geben Sie die Transmissionswahrscheinlichkeit $T(E)$ an, und bestimmen Sie die Energien E_n, für die das Potenzial durchlässig wird.

b) Approximieren Sie $T(E)$ für Energien in der Nähe der E_n durch Resonanzkurven der Form

$$T(E) \approx \frac{(\Gamma_n/2)^2}{(E-E_n)^2 + (\Gamma_n/2)^2}$$

und bestimmen Sie die Resonanzbreiten Γ_n in Abhängigkeit von E_n, V_0, a und m.