9. Übungsblatt zur Vorlesung Theoretische Physik III (Quantenmechanik)

Abgabe der Lösungen: in den Übungen der 10. Semesterwoche (21.12.07)

Aufgabe H16: Translationsoperator (3 Punkte)

Der Translationsoperator $T(\mathbf{a})$ ist definiert durch

$$T(\mathbf{a}) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathbf{a}\cdot\mathbf{P}\right).$$

Hierbei ist $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$, und $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$ ist der Impulsoperator in drei Dimensionen.

a) Zeigen Sie, dass $T(\mathbf{a})T(\mathbf{b}) = T(\mathbf{a}+\mathbf{b})$.

b) Zeigen Sie, dass mit dem Ortsoperator $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ gilt

$$T(\mathbf{a})^\dagger\,\mathbf{X}\,T(\mathbf{a}) = \mathbf{X} + \mathbf{a}\mathbb{1}.$$

Aufgabe H17: Optisches Theorem (5 Punkte)

Beweisen Sie das *Optische Theorem* der Streutheorie:

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi}{k}\,\mathrm{Im}\,f(\theta,\phi)\Big|_{\cos\theta=1}.$$

Hierbei sind σ_{tot} der totale Wirkungsquerschnitt, k die Wellenzahl und f die Streuamplitude.
Anleitung: Integrieren Sie die Kontinuitätsgleichung für den Wahrscheinlichkeitsstrom über eine Sphäre um das Streuzentrum mit Radius r, und betrachten Sie den Grenzfall $r \to \infty$. Beachten Sie weiterhin, dass $f(\theta,\phi)$ für $\cos\theta = 1$ von ϕ unabhängig wird.

Aufgabe H18: Partialwellenentwicklung (8 Punkte)

Betrachten Sie die Streuung einer in z-Richtung einfallenden ebenen Welle an einem kugelsymmetrischen, kurzreichweitigen Potenzial. Ziel dieser Aufgabe ist es, die Streuamplitude $f(\theta)$ (wegen der Kugelsymmetrie ist f nicht von ϕ abhängig) nach Kugelflächenfunktionen entwickeln und in folgender Form darzustellen:

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)f_l P_l(\cos\theta). \qquad ☺$$

Hierbei ist P_l das l-te Legendrepolynom, gegeben als $P_l = P_l^0$ mit der aus Aufgabe P4 bekannten zugeordneten Legendrefunktion P_l^m. Der Koeffizient f_l (die sogenannte *Partialwellenamplitude*) lässt sich aus der Phasenverschiebung δ_l zwischen der einlaufenden ebenen Welle und der auslaufenden Kugelwelle berechnen.

a) Betrachten Sie zunächst die Entwicklung einer allgemeinen ϕ-unabhängigen Lösung der Schrödingergleichung nach Kugelflächenfunktionen:

$$\psi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l \frac{u_l(r)}{r} Y_l^0(\theta) \equiv \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l \frac{u_l(r)}{r} P_l(\cos\theta).$$

Zeigen Sie, dass für $r \to \infty$ die Radialfunktionen $u_l(r)$ in folgender Weise geschrieben werden können:

$$u_l(r) = \frac{1}{k} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right).$$

Hierbei ist δ_l eine Funktion von l, von der wir den Summanden $\frac{l\pi}{2}$ (zunächst willkürlich) abgespalten haben.

b) Zeigen Sie, dass $\delta_l = 0$ für eine in z-Richtung einfallende ebene Welle mit Wellenzahl k, und bestimmen Sie die zugehörigen Koeffizienten a_l.

Hinweise: Es gilt

$$e^{ikr\cos\theta} = \sum_{i=0}^{\infty} i^l (2l+1)\, j_l(kr)\, P_l(\cos\theta)$$

mit den *sphärischen Besselfunktionen* $j_l(x)$, die mit den gewöhnlichen Besselfunktionen über $j_l(x) = \sqrt{\pi/2x}\ J_{l+1/2}(x)$ zusammenhängen. Das asymptotische Verhalten der J_α ist

$$J_\alpha(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \qquad (x \to \infty).$$

c) Zeigen Sie, dass für die gesamte Streulösung die Partialwellenamplituden in der Zerlegung ☺ gegeben sind durch

$$f_l = \frac{1}{2ik}\left(e^{2i\delta_l} - 1\right).$$

d) Zeigen Sie, dass der totale Wirkungsquerschnitt σ_{tot} wie folgt geschrieben werden kann:

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Orthogonalitätsrelation für die Legendrepolynome,

$$\int_{-1}^{1} dx\, P_l(x) P_{l'}(x) = \frac{2\delta_{l,l'}}{2l+1}.$$