10. Übungsblatt zur Vorlesung Theoretische Physik III (Quantenmechanik)

Abgabe der Lösungen und Besprechung der Präsenzaufgabe:
in den Übungen der 11. Semesterwoche (11.01.08)

Präsenzaufgabe P10: Freies Pfadintegral (3 Punkte)

Betrachten Sie ein freies Teilchen in einer Dimension. Die Wirkung zwischen den Zeitpunkten t_a und t_b ist

$$S = \int_{t_a}^{t_b} dt \, \frac{1}{2} m \dot{x}^2.$$

Die Amplitude für die Propagation zwischen x_a (bei $t = t_a$) und x_b (bei $t = t_b$) ist daher gegeben durch das Pfadintegral

$$\begin{aligned}\langle x_b, t_b | x_a, t_a \rangle &= \int_{x_a}^{x_b} Dx \ \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt \, \frac{m}{2} \dot{x}^2 \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon}} \int \prod_{i=1}^{n} \left\{ \frac{dx_i}{\sqrt{2\pi i \hbar \epsilon / m}} \right\} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \epsilon \sum_{i=1}^{n+1} \frac{m}{2} \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{\epsilon^2} \right).\end{aligned}$$

Hierbei ist $\epsilon = (t_b - t_a)/n$.

a) Zeigen Sie unter Verwendung des Ergebnisses aus H19 b) (für den Spezialfall einer Dimension), dass

$$\int dx_1 \exp\left(\frac{im}{2\hbar\epsilon} \left[(x_2 - x_1)^2 + (x_1 - x_0)^2 \right] \right) = \left(\frac{\pi \hbar \epsilon}{im} \right)^{1/2} \exp\left(\frac{im}{2 \cdot 2\hbar\epsilon} (x_2 - x_0)^2 \right).$$

b) Zeigen Sie ebenso

$$\int dx_2 \exp\left(\frac{im}{2\hbar\epsilon} \left[(x_3 - x_2)^2 + \frac{(x_2 - x_0)^2}{2} \right] \right) = \left(\frac{4\pi \hbar \epsilon}{3im} \right)^{1/2} \exp\left(\frac{im}{2 \cdot 3\hbar\epsilon} (x_3 - x_0)^2 \right).$$

c) Folgern Sie, dass die Amplitude gegeben ist durch

$$\begin{aligned}&\langle x_b, t_b | x_a, t_a \rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon} \right)^{(n+1)/2} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{j}{j+1} \frac{2\pi\epsilon\hbar}{im} \right)^{1/2} \exp\left(\frac{im}{2(n+1)\epsilon\hbar} (x_b - x_a)^2 \right) \\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t_b - t_a)}} \exp\left(\frac{im}{2\hbar} \frac{(x_b - x_a)^2}{t_b - t_a} \right).\end{aligned}$$

Aufgabe H19: Gaußsche und Fresnelsche Integrale (6 Punkte)

Sei M eine reelle, symmetrische, positiv definite $n \times n$-Matrix. Beweisen Sie

a)

$$\int d^n x \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T M \mathbf{x} \right) = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det M}}.$$

b)

$$\int d^n x \exp\left(\frac{i}{2}\mathbf{x}^T M \mathbf{x}\right) = e^{in\pi/4}\sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det M}}.$$

Aufgabe H20: Spins im Magnetfeld (6 Punkte)

Ein Elektronenstrahl wird zum Zeitpunkt $t = 0$ in ein Magnetfeld gebracht. Das Magnetfeld ist homogen mit Stärke B und weist in die z-Richtung. Der Hamiltonoperator ist

$$H = \mu_B B \sigma^3,$$

wobei $\mu_B = \frac{\hbar e}{2m_e c}$ das Bohrsche Magneton bezeichnet und σ^3 wie üblich die dritte Paulimatrix. Die Elektronenspins seien zunächst zum Zeitpunkt $t = 0$ in positive x-Richtung polarisiert (d.h. alle Elektronen sind im Eigenzustand zu S_x mit Eigenwert $+\hbar/2$.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert des Spins in x-Richtung zur Zeit t.

Nun sei die eine Hälfte der Elektronenspins zum Zeitpunkt $t = 0$ in positive x-Richtung polarisiert und die andere Hälfte in positive y-Richtung.

b) Geben Sie die Dichtematrix zum Zeitpunkt $t = 0$ an.

c) Berechnen Sie die Dichtematrix im Schrödingerbild zu beliebiger Zeit t.

d) Berechnen Sie erneut die Zeitentwicklung von $\langle S_x \rangle$.

Aufgabe H21: Präparationsmessungen (2 Punkte)

Sei ein quantenstatistisches System mit k-fach entartetem Energieniveau E_n gegeben. Wir bezeichnen die reinen Zustände der Energie E_n mit $|\, n, \alpha\rangle$ $(\alpha = 1, \ldots, k)$. Der Projektor auf Zustände mit Energie E_n ist folglich

$$P_{E_n} = \sum_{\alpha=1}^{k} |\, n, \alpha\rangle \langle n, \alpha\,| \,,$$

und im mikrokanonischen Ensemble ist die Dichtematrix $\rho = P_{E_n}/k$.
Es werde nun eine weitere Observable gemessen, die mit dem Hamiltonoperator kommutiert. Durch die Messung geht die Gleichverteilung auf den Teilraum der Zustände mit dem gemessenen Eigenwert über; dieser sei nur noch k'-fach entartet (wobei $k' < k$), und der Projektor auf diesen Raum sei

$$P'_{E_n} = \sum_{\beta=1}^{k'} |\, n, \beta\rangle \langle n, \beta\,| \,.$$

Zeigen Sie: Nach der Messung ist die Dichtematrix gegeben durch

$$\rho' = \frac{P'_{E_n}}{k'}.$$