

Geschenk von Herrn Prof. L. Lassen

H

HENRI POINCARÉ

MEMBRE DE L'INSTITUT

WISSENSCHAFT UND
HYPOTHESE

AUTORISIERTE DEUTSCHE AUSGABE
MIT ERLÄUTERNDEN ANMERKUNGEN

VON

F. UND L. LINDEMANN

DRITTE VERBESSERTERTE AUFLAGE

17.08.95

B 95/171



Zentralbibliothek der
Physikalischen Institute

Philosophenweg 16

D-69120 Heidelberg

LEIPZIG

VERLAG VON B. G. TEUBNER

1914

XV. Band: **Wissenschaft und Wirklichkeit.** Von M. Frisch Eisen-Köhler-Berlin. 1912. Geb. M. 8.—

Das Buch, das aus umfassenderen Studien über die philosophischen Grundlagen der Natur- und Geisteswissenschaften hervorgegangen ist, gibt eine neue Grundlage des kritischen Realismus.

XVI. Band: **Das Wissen der Gegenwart in Mathematik und Naturwissenschaft.** Von E. Picard-Paris. Deutsch von F. u. L. Lindemann-München. 1913. Geb. M. 6.—

Der Verfasser hat versucht, in diesem Buche eine zusammenfassende Übersicht über den Stand unseres Wissens in Mathematik, Physik und Naturwissenschaften in den ersten Jahren des 20. Jahrhunderts zu geben. Man findet die verschiedenen Gesichtspunkte, unter denen man heute den Begriff der wissenschaftlichen Erklärung betrachtet, ebenso wie die Rolle, die hierbei die Theorien bilden, eingehend erörtert.

XVII. Band: **Wissenschaft und Methode.** Von H. Poincaré-Paris. Deutsch von F. und L. Lindemann-München. 1913. Geb. ca. M. 6.—

Eine summarische und getreue Darstellung des gegenwärtigen Zustandes der Wissenschaften, ihrer Methoden und Tendenzen, der einige historische Bemerkungen vorangehen, läßt vielleicht besser als abstrakte Abhandlungen verstehen, was die Gelehrten suchen, welche Vorstellung man sich von der Wissenschaft machen soll, und was man füglich von ihr erwarten darf.

XVIII. Band: **Probleme der Sozialphilosophie.** Von R. Michels-Basel. 1913. Geb. M. 4.80.

Bezweckt eine eindringliche Untersuchung der im Mittelpunkt der soziologischen Forschung stehenden Probleme, wie: Cooperation, Solidarität, Kastenbildung. Der Verfasser bietet allenthalben nicht so sehr Lösungen als vielmehr neue Gesichtspunkte für die behandelten Probleme.

In Vorbereitung befinden sich:

Botanische Beweismittel für die Abstammungslehre. Von H. Potonié.

Anthropologie u. Rassenkunde. Von O. Schlaginhaufen.

Methoden der geographischen Forschung. Von O. Schlüter.

Grundfragen der Astronomie, der Mechanik und Physik der Himmelskörper. Von H. v. Seeliger.

Meteorologische Zeit- u. Streitfragen. Von R. Süring.

Deszendenzlehre. Von S. Tschulock.

Grundfragen der Klimatologie. Von A. Woeikof.

Geschichte des Vulkanismus. Von Joh. Walther.

Grundlagen der Psychologie. Von Th. Ziehen.

Die Sammlung wird fortgesetzt.

Geschenk von Herrn Prof. L. Lassen

H

HENRI POINCARÉ

MEMBRE DE L'INSTITUT

WISSENSCHAFT UND
HYPOTHESE

AUTORISIERTE DEUTSCHE AUSGABE
MIT ERLÄUTERNDEN ANMERKUNGEN

VON

F. UND L. LINDEMANN

DRITTE VERBESSERTERTE AUFLAGE

13. 08. 95

B 95/171



Zentralbibliothek der
Physikalischen Institute

Philosophenweg 16

D-69120 Heidelberg

LEIPZIG

VERLAG VON B. G. TEUBNER

1914

XV. Band: **Wissenschaft und Wirklichkeit.** Von M. Frisch-eisen-Köhler-Berlin. 1912. Geb. M. 8.—

Das Buch, das aus umfassenderen Studien über die philosophischen Grundlagen der Natur- und Geisteswissenschaften hervorgegangen ist, gibt eine neue Grundlage des kritischen Realismus.

XVI. Band: **Das Wissen der Gegenwart in Mathematik und Naturwissenschaft.** Von E. Picard-Paris. Deutsch von F. u. L. Lindemann-München. 1913. Geb. M. 6.—

Der Verfasser hat versucht, in diesem Buche eine zusammenfassende Übersicht über den Stand unseres Wissens in Mathematik, Physik und Naturwissenschaften in den ersten Jahren des 20. Jahrhunderts zu geben. Man findet die verschiedenen Gesichtspunkte, unter denen man heute den Begriff der wissenschaftlichen Erklärung betrachtet, ebenso wie die Rolle, die hierbei die Theorien bilden, eingehend erörtert.

XVII. Band: **Wissenschaft und Methode.** Von H. Poincaré-Paris. Deutsch von F. und L. Lindemann-München. 1913. Geb. ca. M. 6.—

Eine summarische und getreue Darstellung des gegenwärtigen Zustandes der Wissenschaften, ihrer Methoden und Tendenzen, der einige historische Bemerkungen vorangehen, läßt vielleicht besser als abstrakte Abhandlungen verstehen, was die Gelehrten suchen, welche Vorstellung man sich von der Wissenschaft machen soll, und was man füglich von ihr erwarten darf.

XVIII. Band: **Probleme der Sozialphilosophie.** Von R. Michels-Basel. 1913. Geb. M. 4.80.

Bezweckt eine eindringliche Untersuchung der im Mittelpunkt der soziologischen Forschung stehenden Probleme, wie: Cooperation, Solidarität, Kastensbildung. Der Verfasser bietet allenfalls nicht so sehr Lösungen als vielmehr neue Gesichtspunkte für die behandelten Probleme.

In Vorbereitung befinden sich:

Prinzipien der vergleichenden Anatomie. Von H. Braus.

Die Erde als Wohnsitz des Menschen. Von K. Dove.

Das Gesellschafts- und Staatenleben im Tierreich. Von K. Escherich.

Relativitätstheorie. V. Ph. Frank. ~~Ergebnisse der Bergbau.~~ Von F. Frech.

Ethik als Kritik der Weltgeschichte. Von A. Görland.

Probleme der Morphologie des Festlandes. Von A. Hettner.

Die Materie im Kolloidzustand. Von V. Kohlshütter.

Grundlagen der Pädagogik. Von R. Lehmann.

Die wichtigsten Probleme der Mineralogie und Petrographie. Von G. Linck.

Die Sammlung wird fortgesetzt.

Viertes Kapitel: Der Raum und die Geometrie . . .	53
Der geometrische Raum und der Vorstellungsraum . . .	53
Der Gesichtsraum	54
Der Tastraum und der Bewegungsraum	57
Charakter des Vorstellungsraumes	58
Zustands- und Ortsveränderungen	59
Bedingungen der Kompensation von Bewegungen	61
Die festen Körper und die Geometrie	62
Das Gesetz der Homogenität	65
Die nicht-Euklidische Welt	66
Die vierdimensionale Welt	70
Zusammenfassung	72
Fünftes Kapitel: Die Erfahrung und die Geometrie	73
Geometrie und Astronomie	74
Das Gesetz der Relativität	78
Tragweite der Experimente	82
Anhang (Was ist ein Punkt?)	86
Die Erfahrung unserer Vorfahren	90

Dritter Teil:

Die Kraft.

Sechstes Kapitel: Die klassische Mechanik	91
Das Prinzip der Trägheit	93
Das Gesetz der Beschleunigung	99
Die anthropomorphe Mechanik	108
Die Schule des Fadens	109
Siebentes Kapitel: Relative und absolute Bewegung	113
Das Prinzip der relativen Bewegung	113
Die Schlußweise Newtons	115
Achstes Kapitel: Energie und Thermodynamik	124
Das energetische System	124
Thermodynamik	131
Allgemeine Übersicht des dritten Teiles	138

Vierter Teil:

Die Natur.

Neuntes Kapitel: Die Hypothesen in der Physik	142
Die Rolle des Experimentes und der Verallgemeinerung	142
Die Einheit der Natur	147
Die Rolle der Hypothese	152
Ursprung der mathematischen Physik	155
Zehntes Kapitel: Die Theorien der modernen Physik	161
Die Bedeutung der physikalischen Theorien	161
Die Physik und der Mechanismus	168
Der gegenwärtige Zustand der Wissenschaft	173

Inhalt.

Vorwort zur ersten Auflage	Seite
Vorwort zur zweiten Auflage	III
Vorwort zur dritten Auflage	VIII
Inhalt	VIII
Einleitung	X
	XII

Erster Teil:

Zahl und Größe.

Erstes Kapitel: Über die Natur der mathematischen Schlußweisen	1
Syllogistische Schlußweisen	1
Verifikation und Beweis	3
Elemente der Arithmetik	5
Algebraische Rechnung	9
Rekurrierendes Verfahren	11
Induktion	12
Mathematische Konstruktion	14

Zweites Kapitel: Die mathematische Größe und die Erfahrung

Definition der inkommensurablen Zahlen	17
Das physikalische Kontinuum	20
Das mathematische Kontinuum	22
Die meßbare Größe	23
Verschiedene Bemerkungen (Kurven ohne Tangenten)	28
Das physikalische Kontinuum von mehreren Dimensionen	29
Das mathematische Kontinuum von mehreren Dimensionen	31
	34

Zweiter Teil:

Der Raum.

Drittes Kapitel: Die nicht-Euklidische Geometrie	36
Die Geometrie von Lobatschewsky	37
Die Geometrie von Riemann	38
Die Flächen konstanten Krümmungsmaßes	40
Veranschaulichung der nicht-Euklidischen Geometrie	42
Die implizierten Axiome	44
Die vierte Geometrie	47
Der Lehrsatz von Lie	48
Die Geometrien von Riemann	48
Die Geometrien von Hilbert	49
Von der Natur der Axiome	49

Elftes Kapitel: Die Wahrscheinlichkeitsrechnung	183
Einteilung der Wahrscheinlichkeitsprobleme	189
Die Wahrscheinlichkeit in den mathematischen Wissenschaften	192
Die Wahrscheinlichkeit in den physikalischen Wissenschaften	196
Rouge et noir	202
Die Wahrscheinlichkeit der Ursachen	204
Die Theorie der Fehler	207
Zusammenfassung	210
Zwölftes Kapitel: Optik und Elektrizität	211
Die Fresnelsche Theorie	211
Die Maxwellsche Theorie	213
Die mechanische Erklärung der physikalischen Erscheinungen	216
Dreizehntes Kapitel: Die Elektrodynamik	224
Die Ampèresche Theorie	225
I. Wirkung geschlossener Ströme	227
II. Wirkung eines geschlossenen Stromes auf einen Stromteil	228
III. Stetige Rotationen	230
IV. Gegenseitige Wirkung zweier offenen Ströme	231
V. Induktion	234
Die Helmholtzsche Theorie	235
Die diesen Theorien anhaftenden Schwierigkeiten	238
Die Maxwellsche Theorie	239
Die Rowlandschen Experimente	240
Die Lorentzsche Theorie	242
Vierzehntes Kapitel: Das Ende der Materie	244
Erläuternde Anmerkungen (von F. Lindemann)	251
Erster Teil. Zahl und Größe	251
Zweiter Teil. Der Raum	261
Dritter Teil. Die Kraft	295
Vierter Teil. Die Natur	321

Einleitung.

Für einen oberflächlichen Beobachter ist die wissenschaftliche Wahrheit über jeden Zweifel erhaben: die wissenschaftliche Logik ist unfehlbar, und wenn die Gelehrten sich hie und da täuschen, so geschieht es nur, weil sie die Regeln der Logik verkannten.

„Die mathematischen Wahrheiten werden durch eine Kette untrüglicher Schlüsse aus einer kleinen Anzahl evidenten Sätze abgeleitet; sie drängen sich nicht nur uns, sondern der ganzen Natur auf. Sie fesseln sozusagen den Schöpfer und gestatten ihm nur zwischen einigen verhältnismäßig wenig zahlreichen Lösungen zu wählen. Einige Experimente werden dann genügen, um zu erfahren, welche Wahl er getroffen hat. Aus jedem Experimente können durch eine Reihe mathematischer Deduktionen eine Menge Folgerungen hervorgehen, und auf diese Weise läßt uns jedes Experiment einen Winkel des Weltalls erkennen.“

So ungefähr denken sich viele Leute, besonders die Schüler, welche die ersten physikalischen Begriffe kennen lernen, den Ursprung der wissenschaftlichen Gewißheit. So fassen sie die Rolle des Experimentes und der Mathematik auf. Und dieselbe Auffassung hatten vor hundert Jahren viele Gelehrte, welche in ihren Träumen die Welt konstruieren und dabei der Erfahrung möglichst wenige Materialien entleihen wollten.

Als man ein wenig mehr nachdachte, bemerkte man, ein wie großer Platz der Hypothese eingeräumt war; man sah, wie der Mathematiker ihrer nicht entraten kann und wie der Experimentator sie noch weniger missen kann. Darauf fragte man sich, ob wohl dieses Gebäude solid genug wäre, und man glaubte, daß ein Hauch es stürzen

könnte. Derartig skeptisch urteilen, hieße oberflächlich sein. Entweder alles anzweifeln oder alles glauben, das sind zwei gleich bequeme Lösungen; die eine wie die andere erspart uns das Denken.

Anstatt eine summarische Verurteilung auszusprechen, müssen wir mit Sorgfalt die Rolle der Hypothese prüfen; wir werden dann erkennen, daß sie notwendig und ihrem Inhalte nach berechtigt ist. Wir werden dann auch sehen, daß es mehrere Arten von Hypothesen gibt, daß die einen verifizierbar sind und, einmal vom Experimente bestätigt, zu fruchtbringenden Wahrheiten werden; daß die anderen, ohne uns irrezuführen, uns nützlich werden können, indem sie unseren Gedanken eine feste Stütze geben; daß schließlich noch andere nur scheinbare Hypothesen sind und sich auf Definitionen oder verkleidete Übereinkommen und Festsetzungen zurückführen lassen.

Diese letzteren finden wir hauptsächlich in der Mathematik und in den ihr verwandten Wissenschaften. Gerade hieraus schöpfen diese Wissenschaften ihre Strenge; diese Übereinkommen sind das Werk der freien Tätigkeit unseres Verstandes, der in diesem Gebiete kein Hindernis kennt. Hier kann unser Verstand behaupten, weil er befiehlt; aber verstehen wir uns recht: diese Befehle beziehen sich auf unsere Wissenschaft, welche ohne dieselben unmöglich wäre; sie beziehen sich nicht auf die Natur. Sind diese Befehle nun willkürlich? Nein, denn sonst würden sie unfruchtbar sein. Das Experiment läßt uns freie Wahl, aber es leitet diese Wahl, indem es uns hilft, den bequemsten Weg einzuschlagen. Unsere Befehle werden also gleich denen eines absoluten, aber weisen Fürsten sein, der zuerst seinen Staatsrat befragt.

Manche sind darüber verwundert, daß man gewissen fundamentalen Prinzipien der Wissenschaft den Charakter freier konventioneller Festsetzungen beilegen soll. Sie

haben übermäßig verallgemeinern wollen und dabei vergessen, daß Freiheit nicht Willkür ist. Sie gelangten so zu dem sogenannten „Nominalismus“ und sie fragten sich, ob der Gelehrte sich nicht durch seine Definitionen betrüben läßt und ob die Welt, die er zu entdecken glaubt, nicht einfach nur durch die Willkür seiner Laune geschaffen ist.*) Bei diesem Standpunkte wäre die Wissenschaft sicher begründet, aber sie wäre ihrer Tragweite beraubt.

Wenn dem so wäre, so wäre die Wissenschaft ohnmächtig. Nun haben wir aber jeden Tag ihren Einfluß vor Augen. Das könnte nicht der Fall sein, wenn sie uns nicht etwas Reelles erkennen ließe; aber was sie erreichen kann, sind nicht die Dinge selbst, wie die naiven Dogmatiker meinen, sondern es sind einzig die Beziehungen zwischen den Dingen; außerhalb dieser Beziehungen gibt es keine erkennbare Wirklichkeit.

Zu dieser Erkenntnis werden wir gelangen, aber bis wir so weit sind, müssen wir die Reihe der Wissenschaften, von der Arithmetik und der Geometrie an bis zur Mechanik und experimentellen Physik, durchgehen. Welcher Art ist die Natur der mathematischen Schlußweise? Ist sie, wie man gewöhnlich glaubt, wirklich deduktiv? Eine tiefgehende Analyse zeigt uns, daß sie es nicht ist, daß sie in gewissem Grade an der Natur der induktiven Schlußweise Anteil hat und gerade dadurch so fruchtbringend ist. Sie bewahrt deshalb nicht weniger ihren Charakter absoluter Genauigkeit; das haben wir zuerst zu zeigen.

Nachdem wir jetzt eines der Hilfsmittel genauer kennen, welches die Mathematik dem Forscher an die Hand gibt, haben wir einen anderen fundamentalen Begriff zu analysieren, nämlich denjenigen der mathematischen Größe. Finden wir sie in der Natur vor oder sind wir

*) Vergl. Le Roy, Science et Philosophie (Revue de Méta-physique et de Morale 1901).

es, die sie in die Natur hineinlegen? Riskieren wir nicht im letzteren Falle, alles zu verderben? Wenn wir die grob organisierten Angaben unserer Sinne mit dieser außerordentlich komplizierten und feinen Vorstellung vergleichen, welche die Mathematiker als Größe bezeichnen, so müssen wir gezwungenermaßen einen Unterschied bemerken; diesen Rahmen, in welchen wir alles einfügen wollen, haben wir selbst hergestellt; aber wir haben ihn nicht auf gut Glück gemacht, wir haben ihn sozusagen nach Maß angefertigt und darum können wir die Tatsachen hineinbringen, ohne ihrer Natur das Wesentliche zu nehmen.

Ein anderer Rahmen, den wir der Welt anpassen, ist der Raum. Woher stammen die ersten Grundlagen der Geometrie? Sind sie uns durch die Logik auferlegt? Lobatschewsky hat das Gegenteil bewiesen, indem er die nicht-Euklidische Geometrie schuf. Ist der Raum uns durch unsere Sinne offenbart? Ebenfalls nicht, denn der Raum, den uns unsere Sinne zeigen können, unterscheidet sich absolut von dem geometrischen Raume. Hat die Geometrie ihren Ursprung in der Erfahrung? Eine gründlichere Erörterung zeigt uns, daß dies nicht der Fall ist. Wir schlußfolgern also, daß die Grundlagen nur Übereinkommen sind; aber diese Übereinkommen sind nicht willkürlich, und wenn wir in eine andere Welt versetzt würden, welche ich die nicht-Euklidische Welt nenne und die ich mir vorzustellen versuche, so müßten wir zu anderen Übereinkommen gelangen.

In der Mechanik werden wir zu analogen Schlußsätzen geführt und wir sehen, daß die Prinzipie dieser Wissenschaft, obgleich sie sich direkt auf das Experiment stützen, ebenfalls an dem konventionellen Charakter der geometrischen Postulate beteiligt sind. Bisher triumphiert der Nominalismus, aber wir kommen zu den eigentlichen physikalischen Wissenschaften. Da ändert sich das Schauspiel; wir treffen eine andere Art von Hypothesen

und wir sehen deren ganze Fruchtbarkeit. Ohne Zweifel erscheinen uns zuerst die Theorien hinfällig, und die Geschichte der Wissenschaft beweist uns, daß sie vergänglich sind: sie sind aber dennoch nicht ganz vergangen, von jeder ist etwas übriggeblieben. Dieses Etwas muß man sich bemühen herauszusuchen, weil nur dieses und dieses allein der Wirklichkeit wahrhaft entspricht.

Die Methode der physikalischen Wissenschaften beruht auf der Induktion, welche uns die Wiederholung einer Erscheinung erwarten läßt, wenn die Umstände sich wiederholen, unter welchen sie sich das erste Mal darbot. Wenn alle diese Umstände sich auf einmal wiederholen könnten, so könnte dieses Prinzip ohne Gefahr angewendet werden: aber das wird niemals vorkommen; einige dieser Umstände werden immer fehlen. Sind wir absolut sicher, daß sie ohne Wichtigkeit sind? Gewiß nicht. Das kann wahrscheinlich sein, es kann aber nicht wirklich gewiß sein. Darum spielt der Begriff der Wahrscheinlichkeit eine bedeutende Rolle in den physikalischen Wissenschaften. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist also nicht nur ein Zeitvertreib oder ein Führer für die Baccaratspieler, und wir müssen versuchen, ihre Prinzipie fester zu begründen. In dieser Beziehung kann ich nur unvollkommene Resultate geben; so sehr widerstrebt der unbestimmte Instinkt, welcher uns den Begriff der Wahrscheinlichkeit fassen läßt, der Analyse.

Nachdem wir die Bedingungen, unter welchen der Physiker arbeitet, studiert haben, hielt ich es für richtig, ihn dem Leser bei der Arbeit zu zeigen. Dazu nahm ich einige Beispiele aus der Geschichte der Optik und derjenigen der Elektrizität. Wir werden sehen, von wo die Ideen Fresnels und diejenigen Maxwells ausgegangen sind, und welche unbewußten Hypothesen Ampère und die anderen Begründer der Elektrodynamik machten.

verschiedener Farbe. Nehmen wir an, daß er ebenfalls von der Stellung α , wo er auf uns die Gesamtheit A' von Eindrücken ausübt, in die Stellung β übergehe, wo er uns die Gesamtheit B' von Eindrücken verursacht.

Im allgemeinen wird weder die Gesamtheit A mit der Gesamtheit A' , noch die Gesamtheit B mit der Gesamtheit B' etwas Gemeinsames haben. Der Übergang von der Gesamtheit A zu der Gesamtheit B und der Übergang von der Gesamtheit A' zu der Gesamtheit B' besteht also in zwei Veränderungen, welche an sich im allgemeinen nichts Gemeinsames haben.

Und dennoch sehen wir diese beiden Veränderungen eine wie die andere als Verschiebungen an, noch mehr, wir betrachten sie als die gleiche Verschiebung. Wie ist das möglich?

Das geschieht einfach dadurch, daß die eine wie die andere durch die gleiche entsprechende Bewegung unseres Körpers korrigiert werden kann.

Die „entsprechende Bewegung“ ist es also, welche das einzige Bindeglied zwischen zwei Erscheinungen bildet, die einander zu nähern uns sonst nie eingefallen wäre.

Andererseits kann unser Körper eine Menge von verschiedenen Bewegungen ausführen, dank der Anzahl seiner Gliederungen und Muskeln; aber es sind nicht alle fähig, eine Veränderung der äußeren Objekte zu „korrigieren“; nur diejenigen sind dazu fähig, bei denen unser ganzer Körper oder wenigstens alle unsere Sinnesorgane, welche in Betracht kommen, sich als ein Ganzes verschieben, d. h. ihren Ort verändern, ohne daß ihre relativen Stellungen sich ändern, sich also verhalten wie ein fester Körper.

Fassen wir zusammen:

I. Wir werden dazu geführt, vor allem zwei Kategorien von Erscheinungen zu unterscheiden

Die einen, welche unwillkürlich und nicht von Muskel-

Empfindungen begleitet sind, werden von uns den äußeren Objekten zugeteilt; das sind die äußeren Veränderungen.

Die anderen, denen entgegengesetzte Charaktere zukommen, schreiben wir den Ortsveränderungen unseres eigenen Körpers zu; das sind die inneren Veränderungen.

2. Wir bemerken, daß gewisse Veränderungen aus jeder dieser Kategorien durch eine entsprechende Veränderung der anderen Kategorie korrigiert werden können.

3. Wir unterscheiden unter den äußeren Veränderungen diejenigen, denen eine entsprechende Veränderung in der anderen Kategorie gegenübersteht; diese nennen wir Bewegungen. Und ebenso unterscheiden wir unter den inneren Veränderungen diejenigen, denen eine entsprechende Veränderung in der ersten Kategorie gegenübersteht.

Dank dieses gegenseitigen Verhältnisses ist eine besondere Klasse von Erscheinungen definiert, welche wir Orts-Veränderungen nennen. Die Gesetze dieser Erscheinungen bilden den Gegenstand der Geometrie.

Das Gesetz der Homogenität. — Das erste dieser Gesetze ist das der Homogenität.

Setzen wir voraus, daß wir durch eine äußere Veränderung α von der Gesamtheit A der Empfindungen zu der Gesamtheit B gelangen, ferner, daß diese Veränderung α durch eine entsprechende willkürliche Bewegung β korrigiert wird, und daß wir auf diese Art zur Gesamtheit A zurückgeführt wären.

Setzen wir weiter voraus, daß eine andere äußere Veränderung α' uns nochmals von der Gesamtheit A zu der Gesamtheit B kommen läßt.

Die Erfahrung lehrt uns dann, daß diese Veränderung α' ebenso wie α fähig ist, durch eine entsprechende willkürliche Bewegung β' korrigiert zu werden, und daß diese Bewegung β' zu denselben Muskel-Empfindungen gehört wie die Bewegung β , welche α korrigierte.

Dieser Tatsache trägt man gewöhnlich Rechnung, wenn man sagt, daß der Raum homogen und isotrop ist.

Man kann auch sagen, daß eine einmal hervorgebrachte Bewegung zum zweitenmal, zum drittenmal und so weiter sich wiederholen kann, ohne daß ihre Eigenschaften sich verändern.

Im ersten Kapitel, in welchem wir die Natur der mathematischen Schlußweise studiert haben, sahen wir die Wichtigkeit, welche man der Möglichkeit zuerteilt, eine und dieselbe Operation unendlich oft zu wiederholen.

Aus dieser Wiederholung entnimmt die mathematische Schlußweise ihre Stärke; dank dem Gesetze der Homogenität hat sie sich die geometrischen Tatsachen unterworfen.

Um vollständig zu sein, müßte man den Gesetzen der Homogenität eine Menge anderer analoger Gesetze anfügen, auf deren Einzelheiten ich nicht eingehen will; dieselben werden von den Mathematikern in einem Worte zusammengefaßt, wenn sie davon sprechen, daß die Bewegungen „eine Gruppe“ bilden (d. h. daß zwei aufeinanderfolgende Bewegungen immer durch eine einzige Bewegung ersetzt werden können).

Die nicht-Euklidische Welt. — Wenn der geometrische Raum ein Rahmen wäre, in den jede unserer Vorstellungen für sich allein betrachtet hineingepaßt werden kann, so wäre es unmöglich, sich ein Bild ohne diesen Rahmen vorzustellen, und wir könnten an unserer Geometrie nichts ändern.

Aber dem ist nicht so; die Geometrie ist nur die Zusammenfassung der Gesetze, nach welchen diese Bilder aufeinanderfolgen. Nichts hindert uns daran, eine Reihe von Vorstellungen auszuendenken, welche in allem unseren gewöhnlichen Vorstellungen vollkommen ähnlich sind, aber welche nach Gesetzen aufeinanderfolgen, die von den uns vertrauten Gesetzen verschieden sind

Man begreift demnach, daß Wesen, deren Erziehung sich in einer Umgebung vollzieht, in der diese Gesetze völlig umgestürzt sind, eine von der unserigen sehr verschiedene Geometrie haben können.

Wir wollen uns z. B. eine in eine große Kugel eingeschlossene Welt denken, welche folgenden Gesetzen unterworfen ist:

Die Temperatur ist darin nicht gleichmäßig; sie ist im Mittelpunkt am höchsten und vermindert sich in dem Maße, als man sich von ihm entfernt, um auf den absoluten Nullpunkt herabzusinken, wenn man die Kugel erreicht, in der diese Welt eingeschlossen ist.

Ich bestimme das Gesetz, nach welchem diese Temperatur sich verändern soll, noch genauer. Sei R der Halbmesser der begrenzenden Kugel, sei r die Entfernung des betrachteten Punktes vom Mittelpunkt dieser Kugel, dann soll die absolute Temperatur proportional zu $R^2 - r^2$ sein.

Ich setze weiter voraus, daß in dieser Welt alle Körper denselben Ausdehnungs-Koeffizienten haben, so daß die Länge irgend eines Lineals seiner absoluten Temperatur proportional sei.

Endlich setze ich voraus, daß ein Objekt, welches von einem Punkte nach einem anderen mit verschiedener Temperatur übertragen wird, sich sofort ins Wärme-Gleichgewicht mit seiner neuen Umgebung setzt.

Nichts ist in dieser Hypothese widerspruchsvoll oder undenkbar.

Ein bewegliches Objekt wird also immer kleiner in dem Maße, wie es sich der begrenzenden Kugel nähert.

Beachten wir vor allem, daß diese Welt ihren Einwohnern unbegrenzt erscheinen wird, wenn sie auch vom Gesichtspunkte unserer gewöhnlichen Geometrie aus als begrenzt gilt.

Wenn diese Einwohner sich in der Tat der be-

grenzenden Kugel nähern wollen, kühlen sie ab und werden immer kleiner. Die Schritte, welche sie machen, sind also auch immer kleiner, so daß sie niemals die begrenzende Kugel erreichen können.

Wenn für uns die Geometrie nur das Studium der Gesetze ist, nach welchen die festen, unveränderlichen Körper sich bewegen, so wird sie für diese hypothetischen Wesen das Studium der Gesetze sein, nach denen sich die (für jene Einwohner scheinbar festen) Körper bewegen, welche durch die soeben besprochenen Temperatur-Differenzen deformiert werden.

Ohne Zweifel erfahren in unserer Welt die natürlichen festen Körper gleicherweise Schwankungen an Gestalt und Volumen, welche durch Erwärmung oder Abkühlung entstehen. Wir vernachlässigen diese Schwankungen, während wir die Grundlagen der Geometrie festlegen; denn, abgesehen von dem Umstande, daß sie sehr gering sind, so sind sie vor allem unregelmäßig und erscheinen uns folglich als zufällig.

In dieser hypothetischen Welt würde dem nicht so sein, und solche Veränderungen würden nach regelmäßigen und sehr einfachen Gesetzen erfolgen.

Andererseits würden die verschiedenen festen Bestandteile, aus denen sich die Körper dieser Einwohner zusammensetzen, denselben Schwankungen in Gestalt und Volumen unterworfen sein.

Ich werde noch eine andere Hypothese aufstellen: ich setze voraus, daß das Licht verschieden brechende Medien durchdringt, und zwar so, daß der Brechungsindex zu $R^2 - r^2$ umgekehrt proportional sei. Es ist leicht zu ersehen, daß die Licht-Strahlen unter diesen Bedingungen nicht geradlinig, sondern kreisförmig sein werden.⁸⁸⁾

Um das, was vorausgeht, zu rechtfertigen, muß ich beweisen, daß gewisse Ortsveränderungen, welche die

äußeren Objekte erlitten haben, durch entsprechende Bewegungen der fühlenden Wesen, welche diese eingebildete Welt bewohnen, korrigiert werden können, und zwar so, daß sich die ursprüngliche Gesamtheit von Eindrücken, denen diese fühlenden Wesen unterworfen sind, wiederherstellt.

Setzen wir in der Tat voraus, daß ein Objekt sich von der Stelle bewegt, indem es sich deformiert, aber nicht wie ein unveränderlicher Körper, sondern wie ein Körper, der ungleichmäßige Dilatationen genau nach den eben angenommenen Temperaturgesetzen erleidet. Man möge mir erlauben, eine solche Bewegung — um die Sprache abzukürzen — nicht-Euklidische Orts-Veränderung zu nennen.⁸⁹⁾

Wenn ein fühlendes Wesen sich in der Nachbarschaft befindet, so werden seine Eindrücke durch das Fortücken des Objektes verändert, aber es kann sie wieder herstellen, wenn es sich selbst in passender Weise bewegt. Schließlich müssen nur das Objekt und das fühlende Wesen, beide zusammen (d. h. als ein einziger Körper betrachtet), eine dieser besonderen Orts-Veränderungen erlitten haben, welche ich soeben die nicht-Euklidischen genannt habe. Das ist möglich, wenn man voraussetzt, daß die Glieder dieser Wesen sich nach demselben Gesetze ausdehnen wie die anderen Körper der von ihnen bewohnten Welt.

Wenngleich sich unter dem Gesichtspunkte unserer gewöhnlichen Geometrie die Körper bei dieser Ortsveränderung deformiert haben und wenngleich sich ihre verschiedenen Teile nicht mehr in derselben relativen Stellung wiederfinden, so werden wir doch sehen, daß die Eindrücke des fühlenden Wesens wieder dieselben geworden sind.

In der Tat, wenn die gegenseitigen Entfernungen der verschiedenen Teile verändert werden konnten, so sind nichtsdestoweniger die ursprünglich sich berührenden

Teile auch nachher wieder in Berührung. Die Eindrücke des Tast-Sinnes haben sich nicht geändert.

Wenn man andererseits der oben in Bezug auf die Brechung und die Krümmung der Lichtstrahlen gemachten Hypothese Rechnung trägt, so werden auch die Gesichtseindrücke dieselben geblieben sein.

Diese hypothetischen Wesen werden also wie wir dazu geführt, die Erscheinungen, deren Zeugen sie sind, einteilen und unter ihnen die „Orts-Veränderungen“ zu unterscheiden, welche durch eine willkürliche entsprechende Bewegung korrigiert werden können.

Wenn sie eine Geometrie begründen, so wird diese nicht wie die unserige das Studium der Bewegungen unserer festen Körper sein; es wird vielmehr das Studium derjenigen Orts-Veränderungen sein, welche sie so von den übrigen unterscheiden haben und welche keine anderen als die „nicht-Euklidischen Orts-Veränderungen“ sind, es wird die nicht-Euklidische Geometrie sein.

So werden uns ähnliche Wesen, deren Erziehung in einer solchen Welt bewerkstelligt wäre, nicht dieselbe Geometrie wie wir haben.

Die vierdimensionale Welt. — Eine vierdimensionale Welt kann man sich ebenso gut vorstellen, wie eine nicht-Euklidische Welt.

Der Gesichtssinn, selbst mit einem Auge, verbunden mit Muskel-Empfindungen, die sich auf die Bewegungen des Augapfels beziehen, würde genügen, um den dreidimensionalen Raum kennen zu lernen.

Die Bilder der äußeren Objekte malen sich auf der Netzhaut, welche ein zweidimensionales Gemälde darstellt; das sind die Perspektiven.

Da aber die Objekte beweglich sind und dasselbe für unser Auge gilt, so sehen wir nacheinander verschiedene Perspektiven eines und desselben Körpers, von mehreren verschiedenen Gesichtspunkten aus aufgenommen.

Wir konstatieren zugleich, daß der Übergang von einer Perspektive zur anderen oft von Muskel-Empfindungen begleitet ist.

Wenn der Übergang der Perspektive A zur Perspektive B und derjenige der Perspektive A' zur Perspektive B' von denselben Muskel-Empfindungen begleitet ist, so machen sie uns den Eindruck gleichartiger Operationen, die wir zueinander in Beziehung setzen können.

Wenn wir darauf die Gesetze studieren, nach welchen sich diese Operationen zusammensetzen, so bemerken wir, daß sie eine Gruppe bilden, welche dieselbe Struktur hat wie die Gruppe der Bewegungen von festen Körpern.

Wir haben nun gesehen (vgl. S. 66), daß wir gerade aus den Eigenschaften dieser Gruppe den Begriff des geometrischen und des dreidimensionalen Raumes abgeleitet haben.

Wir verstehen somit, wie der Begriff eines dreidimensionalen Raumes aus dem Schauspiel dieser Perspektiven entstehen konnte, wenngleich jede von ihnen nur zwei Dimensionen hat; denn sie folgen aufeinander nach gewissen Gesetzen.

Also gut; so wie man auf einer Leinwand die Perspektive einer dreidimensionalen Figur zeichnen kann, so kann man auch die Perspektive einer vierdimensionalen Figur auf eine drei- (oder zwei-) dimensionale Leinwand zeichnen. Das ist für den Mathematiker nur leichtes Spiel.

Man kann sogar von derselben Figur verschiedene Perspektiven von verschiedenen Gesichtspunkten aus entwerfen.⁴⁰⁾

Wir können uns diese Perspektiven leicht vorstellen, weil sie nur drei Dimensionen haben.

Wir wollen uns denken, die verschiedenen Perspektiven eines und desselben Objektes folgten aufeinander und der Übergang von einer zur anderen wäre von Muskel-Empfindungen begleitet.

Man wird, wohlverstanden, zwei dieser Übergänge als zwei Operationen gleicher Natur betrachten, wenn sie mit den gleichen Muskel-Empfindungen verbunden sind.

Nichts hindert dann daran, sich zu denken, daß diese Operationen sich nach einem Gesetze, wie wir es haben wollen, zusammensetzen, z. B. derart, daß sie eine Gruppe bilden, welche dieselbe Struktur hat wie diejenige der Bewegungen eines vierdimensionalen festen Körpers.

Da gibt es nichts, was man sich nicht vorstellen könnte, und dennoch sind diese Empfindungen genau dieselben, denen ein mit einer zweidimensionalen Netzhaut versehenes Wesen unterworfen wäre, welches sich im vierdimensionalen Raume bewegen könnte.

In diesem Sinne ist es erlaubt zu sagen, daß man sich die vierte Dimension vorstellen könne.

Es würde nicht möglich sein, sich in dieser Weise den Hilbertschen Raum vorzustellen, von dem wir im vorhergehenden Kapitel gesprochen haben (S. 49), denn dieser Raum ist nicht mehr ein Kontinuum zweiter Ordnung. Er unterscheidet sich dadurch zu wesentlich von unserem gewöhnlichen Raum.

Zusammenfassung. — Man sieht, daß die Erfahrung eine unumgänglich notwendige Rolle in der Genesis der Geometrie spielt; aber es würde ein Irrtum sein, daraus zu schließen, daß die Geometrie — wenn auch nur teilweise — eine Erfahrungswissenschaft sei.

Wenn sie erfahrungsmäßig wäre, so würde sie nur annähernd richtig und provisorisch sein. Und von welcher grober Annäherung!

Die Geometrie würde nur das Studium der Bewegungen von festen Körpern sein; aber sie beschäftigt sich in Wirklichkeit nicht mit natürlichen Körpern, sie hat gewisse ideale, durchaus unveränderliche Körper zum Gegenstand, welche nur ein vereinfachtes und wenig genaues Bild der natürlichen Körper geben.

Der Begriff dieser idealen Körper ist aus den verschiedenen Gebieten unserer Verstandes-Tätigkeit hervorgegangen, und die Erfahrung ist nur eine Gelegenheit, welche uns antreibt, sie daraus hervorgehen zu lassen.

Das Objekt der Geometrie ist das Studium einer besonderen „Gruppe“; aber der allgemeine Gruppen-Begriff präexistiert in unserem Verstande, zum mindesten die Möglichkeit zur Bildung desselben; er drängt sich uns auf, nicht als eine Form unseres Empfindungs-Vermögens, sondern als eine Form unserer Erkenntnis.

Unter den möglichen Gruppen muß man nur diejenige auswählen, welche sozusagen das Normalmaß sein wird, auf das wir die Erscheinungen der Natur beziehen.

Die Erfahrung leitet uns in dieser Wahl, zwingt sie uns aber nicht auf; sie läßt uns nicht erkennen, welche Geometrie die richtigste ist, wohl aber, welche die bequemste ist.

Man wird bemerken, daß ich die phantastischen Welten, welche ich oben erdachte, beschreiben konnte, ohne aufzuhören, die Sprache der gewöhnlichen Geometrie anzuwenden.

Und wirklich, wir brauchen diese nicht zu wechseln, wenn wir in jene Welten versetzt würden.

Wesen, welche dort ihre Erziehung durchmachen, würden es ohne Zweifel bequemer finden, sich eine von der unserigen verschiedene Geometrie zu schaffen, welche sich ihren Eindrücken besser anpaßte. Was uns betrifft, so ist es gewiß, daß wir angesichts derselben Eindrücke es bequemer finden würden, unsere Gewohnheiten nicht zu ändern.

Fünftes Kapitel.

Die Erfahrung und die Geometrie.

I. In den vorhergehenden Zeilen habe ich bereits verschiedene Male zu beweisen versucht, daß die Prinzipien der Geometrie keine Erfahrungstatsachen sind,

und daß insbesondere das Euklidische Postulat nicht durch Erfahrung bewiesen werden kann.

So entscheidend mir auch die bereits dargelegten Gründe erscheinen mögen, so glaube ich doch hierbei besonders verweilen zu müssen, weil in vielen Köpfen eine hierauf bezügliche falsche Idee tief eingewurzelt ist.

2. Man stelle sich einen materiellen Kreis her, messe dessen Halbmesser und Umfang und versuche zu sehen, ob das Verhältnis dieser beiden Längen gleich π ist; was hat man damit getan? Man wird ein Experiment gemacht haben über die Eigenschaften der Materie, aus welcher man diesen Kreis gefertigt hat, und derjenigen Materie, aus welcher man das zum Messen benutzte Metermaß gefertigt hat, nicht aber ein Experiment über die Eigenschaften des Raumes.

3. Geometrie und Astronomie. — Man hat die Frage noch auf andere Weise gestellt. Wenn die Lobatschewskysche Geometrie wahr ist, so ist die Parallaxe eines sehr entfernten Sternes endlich; wenn die Riemannsche Geometrie wahr ist, so wird sie negativ sein. Damit haben wir Resultate, welche der Erfahrung zugänglich sind, und man hoffte, daß die astronomischen Beobachtungen erlauben würden, zwischen den drei Geometrien zu entscheiden.⁴¹⁾

Aber was man in der Astronomie die gerade Linie nennt, ist einfach die Bahn des Lichtstrahles. Wenn man also, was allerdings unmöglich ist, negative Parallaxen entdecken könnte oder beweisen könnte, daß alle Parallaxen oberhalb einer gewissen Grenze liegen, so hätte man die Wahl zwischen zwei Schlußfolgerungen: wir könnten der Euklidischen Geometrie entsagen oder die Gesetze der Optik abändern und zulassen, daß das Licht sich nicht genau in gerader Linie fortpflanzt.

Es ist unnütz hinzuzufügen, daß jedermann diese letztere Lösung als die vorteilhaftere ansehen würde.

Die Euklidische Geometrie hat also von neuen Erfahrungen nichts zu fürchten.

4. Kann man behaupten, daß gewisse Erscheinungen, welche im Euklidischen Raume möglich sind, im nicht-Euklidischen Raume unmöglich wären, und zwar so, daß die Erfahrung, indem sie diese Erscheinungen bestätigt, der nicht-Euklidischen Hypothese direkt widersprechen würde? Meiner Meinung nach kann eine derartige Frage nicht gestellt werden. Ich würde sie für gleichbedeutend mit der folgenden halten, deren Abgeschmacktheit allen in die Augen springt: „Gibt es Längen, welche man in Metern und Zentimetern angeben kann, aber welche man nicht in Klafter, Fuß und Zoll abmessen kann, und könnte das Experiment, durch welches man die Existenz dieser Längen bestätigt, zugleich der Hypothese widersprechen, daß es in sechs Fuß eingeteilte Klafter gibt?“

Prüfen wir die Frage näher. Ich setze voraus, daß die gerade Linie im Euklidischen Raume zwei beliebige Eigenschaften besitzt, welche ich *A* und *B* nennen werde; wir nehmen an, daß diese gerade Linie im nicht-Euklidischen Raume noch die Eigenschaft *A*, aber nicht mehr die Eigenschaft *B* besitzt; schließlich setze ich voraus, daß die gerade Linie sowohl im Euklidischen, wie im nicht-Euklidischen Raume die einzige Linie sei, welche die Eigenschaft *A* besitzt.

Wenn dem so wäre, so würde die Erfahrung geeignet sein, zwischen der Euklidischen Hypothese und der Lobatschewskyschen zu entscheiden. Man würde feststellen, daß ein bestimmtes konkretes und dem Experimente zugängliches Objekt, wie z. B. ein Bündel von Lichtstrahlen, die Eigenschaft *A* besitzt; man würde daraus schließen, daß es geradlinig ist, und man würde daraufhin untersuchen, ob es die Eigenschaft *B* besitzt oder nicht.

Aber dem ist nicht so, es existiert keine Eigenschaft, welche wie diese Eigenschaft A ein absolutes Kriterium sein könnte, um die gerade Linie als solche zu erkennen und sie von jeder andern Linie zu unterscheiden.

Vielleicht wird man einwerfen (vgl. oben S. 47): „Diese Eigenschaft ist doch die folgende: die gerade Linie ist eine derartige Linie, daß eine Figur, deren Teil diese Linie ist, sich bewegen kann, ohne daß die gegenseitigen Entfernungen ihrer Punkte sich verändern, und daß somit alle Punkte dieser Linie fest bleiben.“

Da hätten wir tatsächlich eine Eigenschaft, welche, sei es nun im Euklidischen oder sei es im nicht-Euklidischen Raume, der Geraden zukommt und nur ihr zukommt. Aber wie erkennt man durch die Erfahrung, ob sie diesem oder jenem konkreten Objekte zugehört? Man muß Entfernungen messen, und wie wird man wissen können, daß eine gewisse konkrete Größe, welche ich mit meinem materiellen Instrument gemessen habe, die abstrakte Entfernung richtig angibt?

Man hat die Schwierigkeit nur weiter hinausgeschoben.

In Wirklichkeit ist die Eigenschaft, von der ich soeben sprach, nicht nur eine Eigenschaft der geraden Linie allein, es ist eine Eigenschaft der geraden Linie und der Entfernung. Wenn sie als absolutes Kriterium dienen soll, so müßte man nicht nur feststellen, daß sie der Entfernung und keiner andern Linie als der geraden Linie eigentümlich ist, sondern auch daß sie keiner andern Linie als der geraden Linie zukommt und keiner andern Größe als der Entfernung. Aber das ist nicht richtig.

Es ist also unmöglich, ein konkretes Experiment zu erdenken, das im Euklidischen Systeme der Geometrie

interpretiert werden könnte, nicht aber im Lobatschewskyschen Systeme; demnach darf ich schließen:

Keine Erfahrung wird jemals mit dem Euklidischen Postulate im Widerspruche sein; ebenso aber andererseits: keine Erfahrung wird jemals im Widerspruche mit dem Lobatschewskyschen Postulate sein.

5. Aber es genügt nicht, daß die Euklidische (oder nicht-Euklidische) Geometrie niemals durch die Erfahrung direkt widerlegt werden kann. Könnte es nicht eintreten, daß die Geometrie sich mit der Erfahrung nur in Übereinstimmung bringen läßt, wenn man das Prinzip des zureichenden Grundes oder das Prinzip der Relativität des Raumes verletzt?

Ich will dies näher ausführen: Betrachten wir irgend ein materielles System; wir werden einerseits den „Zustand“ der verschiedenen Körper dieses Systems ins Auge fassen müssen (z. B. ihre Temperatur, ihr elektrisches Potential u. s. w.), und andererseits ihre Stellung im Raume; und unter den Angaben, welche zur Definition dieser Stellung dienen, werden wir noch die gegenseitigen Entfernungen dieser Körper (die ihre relativen Stellungen bestimmen) von den Bedingungen unterscheiden, welche den absoluten Ort des Systems und seine absolute Orientierung im Raume festlegen.

Die Gesetze der Erscheinungen, welche sich in diesem Systeme abspielen, werden von dem Zustande dieser Körper und von ihren gegenseitigen Entfernungen abhängen; aber wegen der Relativität und wegen der Passivität des Raumes werden sie nicht vom absoluten Orte und von der absoluten Orientierung des Systems abhängen.

Mit anderen Worten: der Zustand der Körper und ihre gegenseitigen Entfernungen in irgend einem Zeitpunkte hängen allein vom Zustande dieser selben Körper

Der Leser wird sich selbst die Antwort geben, wenn er sich dessen erinnert, was wir oben dargelegt haben.

In der Tat gleicht das Prinzip der relativen Bewegung, wie wir es ausgesprochen haben, außerordentlich dem Prinzip, welches ich oben als das verallgemeinerte Prinzip der Trägheit bezeichnet habe (vgl. S. 94); es ist aber nicht damit identisch, denn jetzt handelt es sich um die Differenzen der Koordinaten und nicht um die Koordinaten selbst. Das neue Prinzip lehrt uns also etwas mehr als das alte, aber es lassen sich auf dasselbe die gleichen Erörterungen anwenden, und diese führen dann zu den gleichen Schlüssen; es ist deshalb nicht nötig darauf zurückzukommen.

Die Schlußweise Newtons. — Hier kommen wir auf einen sehr wichtigen und zuerst sogar störend erscheinenden Einwurf. Ich habe erwähnt, daß das Prinzip der relativen Bewegung für uns nicht nur ein Resultat der Erfahrung ist, und daß jede entgegengesetzte Hypothese a priori dem Verstande widerstreben würde.

Aber warum ist dann das Prinzip nur richtig, wenn die Bewegung der beweglichen Achsen geradlinig und gleichförmig ist? Es scheint, daß dieses Prinzip sich uns mit derselben Macht aufdrängen müßte, wenn diese Bewegung ungleichförmig ist, oder wenigstens wenn sie sich auf eine gleichförmige Rotation reduziert. In diesen zwei Fällen ist das Prinzip aber nicht richtig.

Ich verweile nicht lange bei dem Falle, in welchem die Bewegung der Achsen geradlinig ist ohne gleichförmig zu sein; das darin enthaltene Paradoxon kann einer gründlichen Prüfung nicht standhalten. Wenn ich im Eisenbahnwagen bin und wenn der Zug auf irgend ein Hindernis stößt und dann plötzlich anhält, so werde ich auf den gegenüberliegenden Sitz geschleudert, obgleich ich nicht direkt irgend einer Kraft unterworfen bin. Darin liegt nichts Rätselhaftes; wenn ich nicht der

8*

der Kraft haben; und diese Schwierigkeit bleibt ihrem ganzen Umfange nach bestehen, denn das zu Hilfe genommene Prinzip hat uns die fehlende Definition nicht geliefert.

Das Prinzip der relativen Bewegung ist darum nicht weniger interessant und verdient um seiner selbst willen studiert zu werden. Versuchen wir zunächst, es in präzisier Fassung auszusprechen.

Wir haben oben gesagt, daß die Beschleunigungen der verschiedenen Körper, welche Teile eines isolierten Systems sind, nur von ihren relativen Geschwindigkeiten und ihren relativen Lagen abhängen und nicht von ihren absoluten Geschwindigkeiten und ihren absoluten Lagen, vorausgesetzt, daß die beweglichen Achsen, auf welche die relative Bewegung bezogen wird, geradlinig und gleichförmig im Raume fortrücken. Oder, wenn man lieber will, ihre Beschleunigungen hängen nur von den Differenzen ihrer Koordinaten und Geschwindigkeiten ab und nicht von den absoluten Werten dieser Koordinaten und Geschwindigkeiten.

Wenn dieses Prinzip für die relativen Beschleunigungen, oder besser für die Beschleunigungsdifferenzen richtig ist, so kann man es mit dem Gesetze der Wirkung und Gegenwirkung kombinieren und kommt so zu dem Schlusse, daß es auch für die absoluten Beschleunigungen richtig ist.

Es bleibt uns also noch übrig nachzusehen, wie man beweisen kann, daß die Differenzen der Beschleunigungen nur von den Differenzen der Geschwindigkeiten und der Koordinaten abhängen oder, um die mathematische Ausdruckweise zu gebrauchen, daß diese Koordinatendifferenzen ein System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung befriedigen.

Kann dieser Beweis durch Experimente oder durch Überlegungen a priori erbracht werden?

Einwirkung einer äußeren Kraft unterlegen bin, so hat doch der Zug an sich selbst eine äußere Erschütterung erfahren. Wenn die relative Bewegung zweier Körper von dem Momente ab gestört wird, wo die Bewegung des einen von ihnen durch eine äußere Ursache geändert wird, so liegt darin nichts Paradoxes.

Ich werde mich länger bei dem Fall der relativen Bewegungen aufhalten, welche auf Achsen bezogen sind, die eine gleichförmige Rotation ausführen. Wenn der Himmel unaufhörlich mit Wolken bedeckt wäre, wenn wir kein Mittel hätten die Gestirne zu beobachten, so könnten wir nichtsdestoweniger schlußfolgern, daß die Erde sich dreht; wir hätten durch ihre Ablattung davon Kenntnis oder auch durch den Foucaultschen Pendelversuch (vgl. S. 80).

Und hätte es trotzdem in diesem Falle einen Sinn zu behaupten, daß die Erde sich dreht? Wenn es keinen absoluten Raum gibt, kann man da eine Drehung erkennen, ohne daß diese Drehung auf irgend etwas zu beziehen wäre? und andererseits, wie könnte man die Schlußfolgerung Newtons annehmen und an den absoluten Raum glauben?

Aber es genügt nicht zu konstatieren, daß alle die möglichen Lösungen uns gleicherweise befremden; man muß für jede von ihnen die Vernunftgründe für unser Widerstreben analysieren, um nach Erkenntnis der Ursache unsere Wahl zu treffen. Man möge also die lange Erörterung, welche ich folgen lasse, entschuldigen.

Versetzen wir uns wieder in unsere fingierte Welt: dichtes Gewölk verbirgt die Gestirne den Menschen, welche sie nicht beobachten und sogar von ihrer Existenz nichts wissen können; wie erfahren diese Menschen, daß die Erde sich dreht? Mehr noch wie unsere Vorfahren würden sie den Boden, welcher sie trägt, als fest und unerschütterlich betrachten; sie würden viel später

die Ankunft eines Copernicus zu erwarten haben. Aber schließlich würde dieser Copernicus doch kommen; wie würde er kommen?

Die Mechaniker dieser fingierten Welt würden sich vorerst nicht durch eine Schlußfolgerung beunruhigen lassen, die nach unserer Auffassung einen absoluten Widerspruch enthält. In der Theorie der relativen Bewegung faßt man, abgesehen von den wirklichen Kräften, zwei fingierte Kräfte ins Auge, welche man die gewöhnliche Zentrifugalkraft und die zusammengesetzte Zentrifugalkraft nennt.⁵⁷⁾ Unsere fingierten Gelehrten könnten also alles erklären, indem sie diese zwei Kräfte als wirkliche ansehen und sie würden dabei keinen Widerspruch mit dem verallgemeinerten Prinzip der Trägheit bemerken, denn von diesen Kräften würde die eine von den relativen Stellungen der verschiedenen Teile des Systems abhängen (wie bei den wirklichen Anziehungen der Fall ist), die andere von ihren relativen Geschwindigkeiten (wie es bei den wirklichen Reibungen der Fall ist).

Indessen würden bald noch mehr Schwierigkeiten ihre Aufmerksamkeit in Anspruch nehmen; wenn es ihnen gelingen würde ein isoliertes System darzustellen, so würde der Schwerpunkt dieses Systems nicht eine nahezu geradlinige Bahn haben. Sie müßten, um diese Tatsache zu erklären, die Zentrifugalkräfte zu Hilfe nehmen, welche sie als wirkliche betrachten und welche sie zweifellos den gegenseitigen Wirkungen der Körper zuschreiben. Nur würden sie diese Kräfte bei großen Entfernungen, d. h. in dem Maße, wie die Isolierung immer mehr verwirklicht würde, nicht kleiner und kleiner werden sehen; weit gefehlt: die Zentrifugalkraft wächst mit der Entfernung ins Unendliche.⁵⁸⁾

Diese Schwierigkeit würde ihnen bereits ziemlich groß erscheinen; aber dennoch würde dieselbe sie nicht lange aufhalten; sie würden sich bald irgend ein sehr