

4. PRÄSENZÜBUNG ZUR VORLESUNG QUANTENMECHANIK (PTP 4)

Die Präsenzübung wird in den Übungen am 28. und 29. April 2009 unter Anleitung des/r Tutors/in gemeinsam bearbeitet.

Für die aktive Mitarbeit gibt es **2 Punkte** !

Aufgabe P10: *Dreidimensionale Fourier-Transformation*

$$\hat{\phi}(\vec{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3x e^{-i\vec{k}\vec{x}} \phi(\vec{x}) \quad \phi(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\vec{x}} \hat{\phi}(\vec{k}).$$

Berechnen Sie als Beispiel die Fourier-Transformierte von

$$\phi(\vec{x}) = \frac{e^{-\mu|\vec{x}|}}{|\vec{x}|}.$$

Aufgabe P11: *Hermite-Polynome*

Bei der Beschreibung der Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators treten die Hermite-Polynome $H_n(\xi)$ auf. Ihre Darstellung ergibt sich aus der folgenden erzeugenden Funktion:

$$Z(\xi, \lambda) = e^{-\lambda^2 + 2\lambda\xi} = \sum_n \frac{H_n(\xi)}{n!} \lambda^n.$$

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der erzeugenden Funktion, daß gilt:

$$H'_n(\xi) = 2nH_{n-1}(\xi).$$

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der erzeugenden Funktion, daß $H_n(\xi)$ die folgende Differentialgleichung erfüllt:

$$H''_n(\xi) - 2\xi H'_n(\xi) + 2nH_n(\xi) = 0.$$

(c) Zeigen Sie die Darstellung:

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2}.$$

(d) Berechnen Sie die Polynome H_0, \dots, H_3 .

Nicht einmal falsch

Wenn PAULI an einem Gedanken oder einer Theorie überhaupt keinen Gefallen fand, sagte er: "Nicht einmal falsch."

Wolfgang Pauli



Wolfgang Pauli wurde am 25. April 1900 in Wien geboren und starb am 15. Dezember 1958 in Zürich.

Schon im ersten Semester 1918/19 hörte er die Vorlesungen Arnold Sommerfelds. Sommerfelds physikalische Intuition und Meisterschaft in der Handhabung der mathematischen Methoden wurden für Pauli zum bestimmenden Erlebnis und er sah in ihm stets seinen "eigentlichen" Lehrer.

Umgekehrt erkannte Arnold Sommerfeld Paulis ungewöhnliche Begabung und übertrug Pauli die ursprünglich ihm selbst zugeordnete Aufgabe: die zusammenfassende Darstellung über die **Relativitätstheorie** für die Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. Paulis Werk erregte in der Fachwelt erhebliches Aufsehen. Es war "einfach meisterhaft, zumal für einen Studenten im fünften Semester", wie **Sommerfeld** an Einstein schrieb, und dieser stellte fest:

Wer dieses reife und groß angelegte Werk studiert, möchte nicht glauben, daß der Verfasser ein Mann von einundzwanzig Jahren ist. Man weiß nicht, was man am meisten bewundern soll, das psychologische Verständnis für die Ideenentwicklung, die Sicherheit der mathematischen Deduktion, den tiefen physikalischen Blick, das Vermögen übersichtlicher systematischer Darstellung, die Literaturkenntnis, die sachliche

Vollständigkeit, die Sicherheit der Kritik."

Tatsächlich war Paulis Darstellung so tiefdringend, daß sie bis in die jüngste Zeit als beste Zusammenfassung des Gebietes galt und noch nach fast vierzig Jahren Neuauflagen und Übersetzungen erlebte. Die Arbeiten zur **Relativitätstheorie** prägten Paulis zukünftiges physikalisches Schaffen in charakteristischer Weise. Durch sein gesamtes Werk zieht sich das Bemühen um systematische und invariante Formulierungen, wie es sich wesentlich durch ihn in der Physik durchgesetzt hat.

In der anregenden Atmosphäre des Sommerfeldschen Kreises kam Pauli mit der **Quantentheorie** in Berührung, in die sich der junge Student ebenso intensiv wie in die **Relativitätstheorie** einarbeitete. In seiner Dissertation 1921 versuchte er, die **Quantentheorie**, wie er sie bei Sommerfeld gelernt hatte, auf das Wasserstoffmolekül-Ion anzuwenden. Das Ergebnis war enttäuschend: Die **Bohr-Sommerfeldsche Atomtheorie** führte nicht zu den richtigen stationären Zuständen. Vielmehr wurde mit dieser Arbeit die Gültigkeit des anschaulichen Modells zum ersten Mal ernsthaft in Zweifel gezogen, wenn es auch noch Jahre dauerte, bis es durch ein besseres abgelöst werden konnte. Fortan galt Paulis Interesse vor allem der **Quantentheorie**.

Nach der Promotion wurde Pauli für ein Semester 1921/22 Assistent Max Borns in Göttingen. Born schrieb:

"Er ist erstaunlich klug und kann sehr viel; einen so guten Assistenten werde ich nie mehr kriegen."

Die Zusammenarbeit mit Born wurde durch das Angebot einer Assistentenstelle bei **Wilhelm Lenz** in Hamburg - eines Schülers von Arnold Sommerfeld - beendet. Doch schon 1922 ging Pauli für ein Jahr auf Einladung von Niels Bohr nach Kopenhagen. Er war Bohr im Sommer 1922 bei den sogenannten 'Bohr-Festspielen' begegnet, auf denen Bohr über den Stand der **Quantentheorie** der Atome und das **Periodensystem der Elemente** vortrug. Über dieses Zusammentreffen sagte Pauli später, "daß eine neue Phase meines wissenschaftlichen Lebens begann". Es hinterließ Pauli einen besonders starken Eindruck, daß Bohr immer wieder sein Streben nach einer "allgemeinen Erklärung" der Probleme betonte. Pauli fand in Bohr einen ihm in mancherlei Hinsicht wesensverwandten Lehrer und guten Freund. In Paulis Genialität, kann man sagen, vereinen sich die besten Eigenschaften seiner beiden Lehrer in glücklicher Weise - **Sommerfelds** mathematische Meisterschaft und **Bohrs** tiefeschürfende philosophische Durchdringung der physikalischen Grundlagen.

Im Herbst 1923 kehrte Pauli aus Kopenhagen nach Hamburg zurück; er wurde im

folgenden Jahr habilitiert und 1926 zum a.o. Professor ernannt. Nach den Kopenhagener Anregungen setzte Pauli seine Bemühungen um eine theoretische Deutung des **Periodensystems** fort. Gegen Ende 1924 gelang ihm die Entdeckung des 'Ausschließungsprinzips' (**Pauli-Prinzips**). Die **Bohr-Sommerfeldsche Atomtheorie** hatte nur die Hälfte der experimentell beobachteten, stationären Zustände geliefert. Durch die Annahme eines zusätzlichen Freiheitsgrades für die Elektronen, "einer klassisch nicht beschreibbaren Zweideutigkeit", und durch die Forderung daß jeder Quantenzustand nur mit einem Elektron besetzt sein darf, gelang es ihm, die Schwierigkeiten zu bewältigen. Mit der von **Samuel Goudsmit** und **Georg Uhlenbeck** entwickelten Vorstellung des **Elektronenspins** ergab sich eine ungezwungene Erklärung des **Periodensystems**, wenn auch der Sinn des Prinzips vorerst noch im Dunkeln blieb. Den Gedanken einer "Kreiselbewegung" des Elektrons akzeptierte Pauli erst, als er sich bei der Anwendung bewährte. Seine anfänglichen Zweifel erwachsen aus dem klassisch-mechanischen Charakter der Idee. Pauli erkannte klar, daß sein Prinzip nicht aus den Gesetzen der Mechanik oder der bestehenden **Quantentheorie** folgte, sondern eine Ergänzung der **Grundpostulate** darstellte. Die außerordentliche Bedeutung seiner Entdeckung wurde 1945 mit der Verleihung des **Nobelpreises** für Physik gewürdigt.

Paulis tiefes Verständnis der "alten **Quantentheorie**" zeigte sich am Beispiel der Analyse des **Compton-Effekts** oder in einem Übersichtsartikel im Handbuch der Physik über die Entwicklung der **Quantentheorie** bis 1925. Aber im Bewußtsein der Widersprüche der bisherigen Erkenntnisse war es für ihn jedoch eine große Erleichterung, daß mit der neuen Heisenbergschen und Schrödingerschen **Quantenmechanik** eine widerspruchsfreie Theorie an die Stelle der alten trat, wobei Pauli selbst nicht zuletzt durch seine intensiven Diskussionen mit Werner Heisenberg einen erheblichen Beitrag zu dieser Entwicklung geleistet hatte.

Bereits 1926 gelang es Pauli, die **stationären Zustände des Wasserstoffatoms** und sein Spektrum mit der **Matrixmechanik** zu berechnen, was das Vertrauen in die Theorie ungemein stärkte. Im darauffolgenden Jahr 1927 zeigte Pauli dann, wie der **Elektronenspin**, der bis dahin nicht unmittelbar in die **Quantentheorie** einbezogen war, durch Erweiterung der **Schrödinger-Gleichung** berücksichtigt werden kann. Diese Gleichung erwies sich als Grenzfall der von **Paul Dirac** aufgestellten **relativistischen Wellengleichung**. Im Jahre 1928 nahm Pauli einen Ruf an die Eidgenössische Technische Hochschule in Zürich an, der er bis an sein Lebensende angehörte.

Die enge Zusammenarbeit mit Werner Heisenberg setzte sich auch in den Züricher Jahren fort und führte 1929 und 1930 zu zwei gemeinsamen Veröffentlichungen über die Wechselwirkung von Strahlung und Materie, die zu den frühesten Arbeiten zur **Quantenfeldtheorie** gehören. Die Fähigkeit, ein neues Gebiet der Physik in meisterhafter Form darzustellen, der für Jahrzehnte kaum etwas hinzuzufügen war, bewies er erneut bei

der Abfassung des Kapitels 'Die allgemeinen Prinzipien der **Wellenmechanik**' für das Handbuch der Physik. Diese Arbeit wurde mit nur geringfügigen Änderungen in die Neuaufgabe des Jahres 1958 übernommen. In Zürich glückte ihm 1930 eine neue wichtige Entdeckung. Mit der in diesem Jahr erstmals geäußerten Hypothese eines neutralen, später **Neutrino** genannten Teilchens war es möglich, das Rätsel des **Beta-Zerfalls** zu lösen. Sechs Jahre vorher, 1924, hatte Pauli schon einen anderen bedeutsamen Beitrag zur Kernphysik geleistet. Er hatte die Existenz eines **Kernspins** postuliert, um die Hyperfeinstruktur von Spektrallinien erklären zu können. Diese Vermutung fand dann ihre experimentelle Bestätigung, und fortan dienten Hyperfeinstrukturuntersuchungen ihrerseits der Bestimmung von Kernspins. 1940 gelang es Pauli in einer Arbeit über den Zusammenhang von Statistik und Spin der Elementarteilchen, das **Ausschließungsprinzip** aus anderen physikalischen Prinzipien herzuleiten.

Die Jahre 1940 bis 1946 verbrachte Pauli in den USA am Institute for Advanced Study in Princeton. Hier beschäftigte er sich vornehmlich mit der **Mesonentheorie**. 1946 kehrte Pauli nach Zürich zurück, wo er sein Interesse vor allem der **Quantenfeldtheorie** und den **Elementarteilchen** zuwandte. Seit 1953 führte er eine intensive Diskussion mit Werner Heisenberg um die von diesem entwickelten Vorstellungen zur "Einheitlichen Theorie der Elementarteilchen". Pauli zögerte, Heisenberg darin zuzustimmen und distanzierte sich schließlich von dieser Theorie.

Pauli gehörte zu den großen Physikern des 20. Jahrhunderts. An den wichtigen Entwicklungen zu seinen Lebzeiten, der **Kernphysik**, der **Kernphysik**, der **modernen Feldtheorie** und der **Teilchenphysik**, hatte er wesentlichen Anteil. Dabei hat er durch seine Beteiligung an wissenschaftlichen Diskussionen, durch seine umfangreiche wissenschaftliche Korrespondenz und durch seine starke Ausstrahlung auf seine zahlreichen Schüler großen Einfluß auf die Entwicklung der Physik genommen. Dazu stellten **Ralph Kronig** und **Victor F. Weisskopf** fest:

"Seine Veröffentlichungen enthalten aber, wie dies bei der ungewöhnlich kritischen Einstellung Paulis begreiflich ist, nur einen kleinen Teil der wirklich von ihm geleisteten Arbeit. Pauli berichtete in seinen Abhandlungen über die fertigen Ergebnisse, aber nicht über den langen, oft mühevollen Weg, der zu ihnen geführt hatte, und auch nicht über unfertige Versuche. Ein Teil seiner im Stillen geleisteten Arbeit hat sich in seinem umfangreichen Briefwechsel niedergeschlagen."

Hinter seiner Sachlichkeit verbarg sich allerdings auch ein tiefes Interesse an philosophischen und letztlich menschlichen Problemen, über die er z.T. ausgedehnte Diskussionen mit dem Psychologen **Carl Gustav Jung** führte.
