

# 1. ÜBUNGSBLATT ZUR VORLESUNG PTP 4 (QUANTENMECHANIK)

Das Übungsblatt ist in der Übung am 15. bzw. 16. April 2009 abzugeben.

## AUFGABE 1: Pauli-Matrizen

(4 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie die Pauli-Matrizen

$$\hat{\tau}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\tau}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\tau}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

kennen gelernt.

- a) Lösen Sie das Eigenwertproblem für die Pauli-Matrix  $\hat{\tau}_2$ , d.h. bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren. (2 Punkte)
- b) Zeigen Sie, dass die Pauli-Matrizen die Vertauschungsrelationen

$$[\hat{\tau}_i, \hat{\tau}_j] := \hat{\tau}_i \hat{\tau}_j - \hat{\tau}_j \hat{\tau}_i = 2i \epsilon_{ijk} \hat{\tau}_k$$

erfüllen.

(2 Punkte)

## AUFGABE 2: Spin-System, Unschärfe

(8 Punkte)

Ein Spin ( $s = 1/2$ , Zweizustandssystem wie in der Vorlesung) befindet sich zu einem bestimmten Zeitpunkt im Zustand

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1+i}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Betrachten Sie den Operator

$$\vec{\hat{S}} \cdot \vec{e} = \hat{S}_x e_x + \hat{S}_y e_y + \hat{S}_z e_z$$

mit dem normierten ( $|\vec{e}| = 1$ ) Richtungsvektor

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix}$$

( $e_x, e_y$  und  $e_z$  sind reelle Zahlen).  $\vec{\hat{S}} \cdot \vec{e}$  ist der Operator der Spinprojektion bezüglich der Richtung  $\vec{e}$ . Für welche Raumrichtung (also für welches  $\vec{e}$ ) besitzt die Projektion des Spins die Unschärfe Null, d.h. für welche Raumrichtung ist

$$\Delta(\vec{\hat{S}} \cdot \vec{e}) = \sqrt{\langle \psi | (\vec{\hat{S}} \cdot \vec{e})^2 | \psi \rangle - \langle \psi | (\vec{\hat{S}} \cdot \vec{e}) | \psi \rangle^2} = 0 \quad ?$$

Tipp: Es ist  $\Delta(\vec{\hat{S}} \cdot \vec{e}) = 0$  genau dann, wenn  $|\Psi\rangle$  Eigenvektor des Operators  $(\vec{\hat{S}} \cdot \vec{e})$  ist.

Bitte wenden !

### AUFGABE 3: *Zweizustandssystem*

(8 Punkte)

In einem Zweizustandssystem bilden die beiden orthonormierten Zustände  $|1\rangle$  und  $|2\rangle$  eine Modellbasis. In ihr habe die Matrix des Hamiltonoperators  $\hat{H}$  die Form

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \langle 1|\hat{H}|1\rangle & \langle 1|\hat{H}|2\rangle \\ \langle 2|\hat{H}|1\rangle & \langle 2|\hat{H}|2\rangle \end{pmatrix} = E_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

- a) Bestimmen Sie die Eigenwerte  $E_i$  und die zugehörigen Eigenzustände  $|\psi_i\rangle$  von  $\hat{H}$  (dargestellt in der Modellbasis  $|1\rangle, |2\rangle$ ). (2 Punkte)
- b) Bei  $t = 0$  sei das System im Zustand  $|1\rangle$ . Nach welcher Zeit  $\Delta t$  befindet sich das System im Zustand  $|2\rangle$ . Wie groß ist die Energieunschärfe  $\Delta E$  im Zustand  $|2\rangle$ ? Was ergibt sich für das Produkt  $\Delta E \cdot \Delta t$ ? (6 Punkte)

---

### Werner Heisenberg

---



In den folgenden Wochen verfaßte er die entscheidende Arbeit 'Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen'. Hier formulierte er sein berühmtes gewordenes positivistisches Prinzip, daß zur Beschreibung physikalischer Sachverhalte nur "prinzipiell beobachtbare" Größen herangezogen werden dürfen und daß deshalb in der neuen Atomphysik für die bisher gebrauchten Begriffe wie "Bahn des Elektrons im Atom" oder "Umlaufzeit des Elektrons" kein Platz mehr ist. Gleichzeitig lieferte Heisenberg in seinen 'Multiplikationsregeln für quadratische Schemata' den langgesuchten Ansatz für die neue Quantenmechanik, die nun von Max Born unter der Mitwirkung von Pascual Jordan als 'Göttinger Matrizenmechanik' aufgebaut werden konnte.

In enger Zusammenarbeit mit Niels Bohr in Kopenhagen gelang es Heisenberg, den tieferen "physikalischen - oder "philosophischen" - Hintergrund des neuen Formalismus zu zeigen. Die 'Heisenbergsche Unschärferelation' von 1927 wurde die Grundlage der 'Kopenhagener Deutung der Quantentheorie', die eine ganz neuartige Auffassung der physikalischen Realität beinhaltet. Welle und Korpuskel als zwei verschiedene Aspekte desselben Dinges und an die Stelle des Determinismus der klassischen Physik treten statistische Gesetze.

Werner Heisenberg wurde am 5. Dezember 1901 in Würzburg geboren. Er starb am in

Angezogen von der Forscher- und Lehrerpersönlichkeit Arnold Sommerfelds begann Heisenberg 1920 an der Universität München das Studium der theoretischen Physik. In die Probleme der nur aus unzusammenhängenden Ansätzen bestehenden Quantentheorie arbeitete er sich so schnell ein, daß er bereits nach wenigen Monaten neuartige Lösungen (anomaler Zeeman-Effekt) vorlegte. Da ein Mindeststudium von sechs Semestern vorgeschrieben war, konnte Heisenberg erst 1923 (mit einer Arbeit über Turbulenz) promoviert werden. Schon 1924 wurde er in Göttingen habilitiert, wo er Assistent von Max Born geworden war.

Nachdem offenkundig geworden war, daß das Bohrsche Atommodell trotz großer Erfolge nicht richtig sein konnte, mühte sich Heisenberg um den "Übergang von der nur symbolisch brauchbaren und daher nur qualitativ richtigen Modellmechanik...zur wirklichen Quantenmechanik". Während eines Erholungsurlaubes Ende Mai 1925 nahmen seine Gedanken über die Quantenmechanik greifbare Gestalt an:

"In Helgoland war ein Augenblick, in dem es mir wie eine Erleuchtung kam, als ich sah, daß die Energie zeitlich konstant war."

Heisenbergs Arbeiten zur Quantenmechanik wurden durch die Verleihung des Nobelpreises für Physik 1932 ausgezeichnet. Da nun das Problem des Atombaus - was die Atomhülle betraf - erfolgreich gelöst worden war, widmete sich Heisenberg den Fragen des Atomkernes. Nach der Entdeckung des Neutrons durch James Chadwick 1932 erkannte Heisenberg (und unabhängig D.D. Iwanenkow), daß dieses neue Teilchen neben dem Proton als Baustein des Atomkerns zu betrachten ist und entwickelte auf dieser Grundlage eine Theorie über den Aufbau der Atomkerne.

Schon 1927, mit 26 Jahren, war Heisenberg Ordinarius für theoretische Physik an der Universität Leipzig geworden. Als in München 1937 die Nachfolge Arnold Sommerfelds zur Diskussion stand, waren sich die Physiker einig, daß dieser Lehrstuhl nur mit dem hervorragendsten Sommerfeld-Schüler besetzt werden könnte: eben Werner Heisenberg. Gegen diese Pläne richteten sich heftige Angriffe nationalsozialistischer Kreise mit vehementen Diffamierungen, die erst dann aufhörten als seine Kenntnisse zu Beginn des 2. Weltkrieges dringend benötigt wurden. 1940 konzipierte Heisenberg in zwei, aus Gründen der Geheimhaltung unveröffentlichten Arbeiten die Theorie des Kernreaktors, wobei er insbesondere die Resonanzabsorption von Neutronen in  $U^{238}$  erörterte.

Nach dem Kriege von den Alliierten mit anderen deutschen Kernphysikern interniert begann Heisenberg seit 1946 den Wiederaufbau der deutschen Forschung in die Wege zu leiten. Als Direktor des Max-Planck-Instituts für Physik und Atomphysik - zunächst in Göttingen, seit 1956 in München - war er seit etwa 1953 intensiv bemüht, eine

"Einheitliche Theorie der Elementarteilchen" aufzustellen. Heisenberg argumentierte, daß alle Elementarteilchen aus derselben Substanz gemacht sein müssen, weil sie sich wechselseitig ineinander umwandeln; diese Substanz könnte man dann Energie oder Materie nennen, wie man will.

Während andere Wissenschaftler mit Teilproblemen beschäftigt waren, war es Heisenbergs Überzeugung, daß man "mit einem Schlage" das ganze Spektrum der Elementarteilchen aufklären muß:

"Hier fasziniert mich besonders die Möglichkeit, zu dem zentralen Knotenpunkt vorzustoßen, in dem die Naturgesetze der verschiedenen bekannten Erfahrungsbereiche - Mechanik, Elektrizitätslehre, Wärmelehre, Chemie usw. - zusammenhängen und aus einem einheitlichen Naturgesetz für die Elementarteilchen entspringen."

---

Quelle: Armin Hermann 'Lexikon - Geschichte der Physik A-Z', Aulis-Verlag Deubner & Co KG 1978

---

W. Heisenberg starb am 1. Februar 1976 in München.