10. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik

Abgabe: Freitag, **04.02.2005** in den Übungen.

Aufgabe 28: *Zeitabhängige Störungsrechnung* **(6 Punkte)**

Ein geladener harmonischer Oszillator (Ladung q, Masse m, Kreisfrequenz ω) befinde sich zur Zeit $t_0 = -\infty$ in seinem Grundzustand. Im Zeitintervall $(-\infty, +\infty)$ werde er der Wirkung eines zeitabhängigen homogenen elektrischen Feldes ausgesetzt:

(a)

$$E(t) = \frac{A}{\tau_0} e^{-\frac{t^2}{\tau_0^2}}$$

(b)

$$E(t) = \frac{A}{\tau_0} e^{-i\Omega t - \frac{|t|}{\tau_0}}$$

Man berechne für beide Fälle in erster Ordnung zeitabhängiger Störungstheorie die Wahrscheinlichkeit dafür, den Oszillator zur Zeit $t = +\infty$ in seinem n-ten Energieeigenzustand ($n \neq 0$) anzutreffen. Diskutieren Sie die Ergebnisse.

Aufgabe 29: *Elastische Streuung, erste Bornsche Näherung für sphärisch symmetrische Potenziale* **(12 Punkte)**

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Streuamplitude $f(\vartheta, \varphi)$ in 1. Bornscher Näherung (bis auf Vorfaktoren) gegeben ist durch die Fouriertransformierte des Potenzials zum Impulsübertrag $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k'}$ (mit $\vec{k}$ = Impuls der einlaufenden Teilchen, und $\vec{k'}$ = Impuls der gestreuten Teilchen):

$$f(\vartheta, \varphi) \; = \; -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3\vec{r'} e^{i(\vec{k}-\vec{k'})\cdot\vec{r'}} V\left(\vec{r'}\right) \qquad (*)$$

(a) Welche Werte kann $|\vec{q}|$ annehmen (beachte: $|\vec{k}| = |\vec{k'}|$) ?

(b) ϑ sei der Winkel zwischen $\vec{k}$ und $\vec{k'}$. Drücken Sie $|\vec{q}|$ als Funktion von ϑ und $|\vec{k}|$ aus.

(c) Betrachten Sie kugelsymmetrische Potenziale. Gehen Sie zu Polarkoordianten über (Polarachse in Richtung von $\vec{q}$) und führen Sie die Raumwinkelintegration in (*) durch.

(d) Berechnen Sie in 1. Bornscher Näherung den differentiellen und totalen Wirkungsquerschnitt für die Streuung von Teilchen der Masse m am Yukawapotenzial

$$V(r) = \frac{g}{r} e^{-\mu r}$$

Betrachten Sie die Grenzfälle niedriger ($k/\mu \ll 1$) bzw. hoher Energie ($k/\mu \gg 1$).

(e) Zeigen Sie, dass der unter (d) erhaltene differentielle Wirkungsquerschnitt bei dem Grenzübergang $\mu \to 0$ und $g \to Z_1 Z_2 e^2$, welcher auf das Coulombpotenzial

$$V(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}$$

führt, die **Rutherfordsche Streuformel**

$$\frac{d\sigma_{\text{Coul}}}{d\Omega} = \left[\frac{Z_1 Z_2 e^2}{2mv^2}\right]^2 \frac{1}{sin^4 \frac{\vartheta}{2}}$$

mit $v := \hbar k/m$ ergibt.

Tip: Benutzen Sie

$$\int_0^\infty d\rho \, e^{-\rho} sin(\alpha\rho) \; = \; \frac{\alpha}{1+\alpha^2}$$

.

Max Born

Max Born wurde am 11.Dezember 1882 in Breslau geboren. Er starb am 5.Januar 1970 in Göttingen.

Nach vier Semestern in Breslau und zwei Sommersemestern in Heidelberg und Zürich bezog Born 1904 die Universität Göttingen, wo sich sogleich enge Beziehungen zu David Hilbert und Hermann Minkowski ergaben. Beide Mathematiker waren seine eigentlichen akademischen Lehrer. Als Physiker wurde sein Vorbild Albert Einstein, mit dem ihn seit etwa 1914 eine herzliche Freundschaft verband. Nach **Einsteins** Ansatz von 1907 begründete Born zusammen mit Theodore von Karman (gleichzeitig und unabhängig von Peter Debye) die **Quantentheorie der spezifischen Wärme**. Die ebenfalls 1912 erfolgte **Entdeckung der Röntgeninterferenzen** durch Max von Laue lieferte dabei ein willkommenes, nachträgliches Argument für Borns Methode.

Born unternahm es nun, eine einheitliche Kristallphysik auf atomistischer Grundlage aufzubauen. In seinem 1915 veröffentlichten Buch **'Dynamik der Kristallgitter'** und in seinem Artikel in der Mathematischen Enzyklopädie, der als selbstständige Monographie unter dem Titel **'Atomtheorie des festen Zustandes'** 1923 erschien, wurde das Gebiet der Gitterdynamik in einheitlicher und klarer Weise zusammengefaßt und damit einer der Grundsteine für die **Festkörperphysik** gelegt. Mit der Berufung Borns auf den Lehrstuhl des Zweiten Physikalischen Instituts in Göttingen 1921 begann die glänzendste Epoche der Physik in Deutschland. Angeregt von den **'Bohr-Festspielen'** - einem großen Vortragszyklus von Niels Bohr in Göttingen 1922 - , beteiligte sich auch Born an der Suche nach einer neuen Atomtheorie; Ergebnisse seiner Kristallphysik hatten ihn schon länger überzeugt, daß das **Bohrsche Atommodell** nur einen begrenzten Wert besitzt.

1925 formulierte Werner Heisenberg, der damals 24jährige Assistent Borns, einen Ansatz, an den anknüpfend - in Zusammenarbeit mit Pascual Jordan und **Heisenberg** - Born die geschlossene mathematische Theorie der **Quantenmechanik** entwickeln konnte:

"Heisenbergs Multiplikationsregel ließ mir keine Ruhe, und nach acht Tagen intensiven Denkens und Probierens erinnerte ich mich plötzlich an eine algebraische Theorie, die ich von meinem Lehrer ***Professor Rosanes*** *in Breslau gelernt hatte...Dies Resultat bewegte mich etwa wie einen Seefahrer, der nach langer Irrfahrt von fern das ersehnte Land sieht...Ich war vom ersten Augenblick an überzeugt, daß wir auf das Richtige gestoßen waren."*

Einen fundamentalen Beitrag zur physikalischen Interpretation dieses Kalküls und damit zum Verständnis der dem gewöhnlichen menschlichen Denken so eigenartige Schwierigkeiten bereitenden *"Logik der Atome"* lieferte Born 1926. Seine Vermutung, daß die neue Quantentheorie eine statistische Beschreibung der Natur beinhaltet, konnte er am Beispiel der Stoßvorgänge beweisen. Diese Leistung bereitete mit den Weg zur **'Kopenhagener Deutung'**. In einem Brief an Born urteilte Wolfgang Pauli:

"Ich bin gewiß, daß der statistische Charakter der Naturgesetze - auf dem Sie von Anfang an gegen Schrödingers Widerstand bestanden haben - den Stil der Gesetze wenigstens für einige Jahrhunderte bestimmen wird."

Eine große Anziehungskraft ging damals von Göttingen aus; um Born versammelten sich hervorragende Schüler und Mitarbeiter aus der ganzen Welt. Zum Göttinger Kreis um Born gehörten unter anderen: **Max Delbrück**, **Maria Göppert-Mayer**, Werner Heisenberg, **John von Neumann**, **J.Robert Oppenheimer**, Wolfgang Pauli, **Edward Teller**, **Victor F.Weißkopf** und **Eugen P. Wigner**.

1933 wurde Born in die Emigration gezwungen. Er ging nach Cambridge, dann nach Edinburgh, wo er nochmals 17 Jahre theoretische Physik lehrte. Nach seiner Emeritierung 1953 kehrte er wieder nach Deutschland zurück und lebte zuletzt zurückgezogen in Bad Pyrmont. Er hat ein gewaltiges Lebenswerk hinterlassen: Zwanzig wissenschaftliche und wissenschaftsphilosophische Bücher, über 300 Aufsätze in Fachzeitschriften, die von ihm allein stammen oder in Zusammenarbeit mit Schülern und Freunden entstanden sind. Er blieb bis ins hohe Alter hinein aktiv tätig. Als sein Name durch die Verleihung des **Nobelpreises** - verspätet 1954 - weiten Kreisen bekannt geworden war, entdeckte er eine neue Lebensaufgabe: auf die Gefahren aufmerksam zu machen, die die Existenz der Menschheit im Atomzeitalter bedrohen. Später verfaßte er aus der Erinnerung zahlreiche historische Aufsätze und gab, von ausführlichen Kommentaren begleitet, seinen Briefwechsel mit Albert Einstein heraus.

Quelle: Armin Hermann 'Lexikon - Geschichte der Physik A-Z', Aulis-Verlag Deubner & Co KG 1978

Interesse:

Als MAX BORN von HILBERT in Mathematik geprüft werden sollte, fragte er ihn, wie er sich auf die Prüfung vorbereiten sollte. HILBERT fragte dagegen:"Auf welchem Gebiet fühlen Sie sich am schlechtesten vorbereitet ? " – "Idealtheorie." Da HILBERT sich dazu nicht weiter äußerte, nahm BORN an, er würde nicht dazu gefragt werden. Tatsächlich betrafen fast alle Fragen HILBERTs diese Theorie. "Ja, ja", sagte er später, "mich interessierte einfach, was Sie über Dinge wissen, über die Sie nichts wissen."

Aus: "Liebes Hertz !, Physiker und Mathematiker in Anekdoten, von Anita Ehlers, Birhäuser Verlag