4. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik

Abgabe: Freitag, 19.11.2004 in den Übungen.

Aufgabe 10: *Gauss'sches Wellenpaket* **(19 Punkte)**

Anmerkung: Diese Aufgabe erfordert einiges an Rechenarbeit, sie ist jedoch typisch und informativ. Die auftrenden Integrale können Sie oft auf das Standardintegral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-c(x-d)^2} \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{c}}$$

mit den i. allg. komplexen Konstanten $c, d \in \mathbb{C}$, $Re(c) > 0$ *zurückführen oder gelegentlich durch einfache Symmetrieüberlegungen berechnen.*

Betrachten Sie das eindimensionale Problem eines kräftefreien Teilchens der Masse m. Die zugehörige zeitabhängige Schrödingergleichung ist dann gegeben durch

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) \;=\; -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass die (eindimensionale) ebene Welle

$$\psi(x,t) \;=\; \alpha \cdot \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(px - \frac{p^2}{2m}t\right)\right\}$$

(mit einer Konstanten α) eine Lösung der (zeitabhängigen) Schrödingergleichung (1) ist. **(1 Punkt)**

Die allgemeine Lösung der Schrödingergleichung (1) ist dann gegeben durch eine Überlagerung von solchen ebenen Wellen

$$\psi(x,t) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar}\, \phi(p) \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(px - \frac{p^2}{2m}t\right)\right\} \tag{2}$$

Eine solche Überlagerung von ebenen Wellen bezeichnet man auch als *Wellenpaket.*

b) Die sogenannte Amplitudenfunktion $\phi(p)$ läßt sich aus der Anfangsbedingung $\psi(x, t = 0)$ bestimmen. Geben Sie an wie! **(2 Punkte)**

Betrachten Sie nun die Amplitudenfunktion eines sogenannten (eindimensionalen) Gaußschen Wellenpaketes

$$\phi(p) \;=\; A \exp\left\{-\frac{(p-p_0)^2\; d^{\,2}}{\hbar^2}\right\} \tag{3}$$

mit den Konstanten $A, d, p_0 \in \mathbb{R}$.

Bitte wenden !

c) Setzen Sie diese Amplitudenfunktion in (2) ein und führen Sie die Integration aus. Berechnen Sie dann $|\psi(x,t)|^2$. **(4 Punkte)**
Benutzen Sie dabei die Abkürzungen $v = \frac{p_0}{m}$ und $\delta_t = \frac{t\hbar}{2md^2}$.

d) Bestimmen Sie die Konstante A, so dass $\int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi(x,t)|^2 = 1$. **(1 Punkt)**

e) Berechnen Sie $< x >$ und $\Delta x = \sqrt{< (x- < x >)^2 >}$ als Funktion der Zeit. Skizzieren Sie $|\psi(x,0)|^2$ und $|\psi(x,t)|^2$ für $t > 0$ und beschreiben Sie, wie sich die Form von $|\psi(x,t)|^2$ mit der Zeit ändert. **(4 Punkte)**

f) Aus der Vorlesung wissen Sie, dass der mittlere Impuls zur Zeit t gegeben ist durch

$$< p(t) > = -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi^*(x,t) \frac{\partial}{\partial x} \psi(x,t) \tag{4}$$

Setzen Sie (2) in (4) ein und zeigen Sie, dass

$$< p(t) > = \int_{\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \, |\phi(p)|^2 \, p$$

Berechnen Sie $< p(t) >$ für die oben angegebene Amplitudenfunktion $\phi(p)$ des Gaußschen Wellenpaketes (Gleichung (3)). **(4 Punkte)**

g) Berechnen Sie analog zu Aufgabenteil f) die Impulsunschärfe
$\Delta p = \sqrt{< (p- < p >)^2 >}$. **(2 Punkte)**

h) Was ergibt sich für das Produkt der Unschärfen $\Delta x \cdot \Delta p$? **(1 Punkt)**

“Ich habe hundertmal so viel über Quantenprobleme nachgedacht wie über die allgemeine Relativitätstheorie.”

A. Einstein zu Otto Stern, zitiert in Pais, “Einstein, Newton und der Erfolg”