5. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik

Abgabe: Freitag, 26.11.2004 in den Übungen.

Aufgabe 11: *δ-förmiges Potenzial* **(2 Punkte)**

Befindet sich ein Teilchen der Masse m in einem Potenzial (eindimensionales Problem), welches an der Stelle $x = x_0$ längs einer kleinen Strecke sehr stark anziehend (abstoßend) ist, so kann man diesen Sachverhalt idealisiert durch

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{m} D\delta(x - x_0) + V_1(x)$$

darstellen, mit $D \in \mathbb{R}$ und $D > 0$ für ein anziehendes bzw. $D < 0$ für ein abstoßendes Potenzial. Dabei ist $V_1(x)$ ein in der Umgebung der Stelle $x = x_0$ stetiges Potenzial. Zeigen Sie: Unter Annahme der Stetigkeit der Wellenfunktion in der Umgebung von $x = x_0$ folgt, dass die erste Ableitung der Wellenfunktion an der Stelle $x = x_0$ einen durch

$$\lim_{x \to x_0, x > x_0} (\psi'(x)) - \lim_{x \to x_0, x < x_0} (\psi'(x)) = -2D\,\psi(x_0)$$

gegebenen Sprung besitzen muß.

Anleitung: Integrieren Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung über ein Intervall $x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon$ und führen Sie dann den Grenzübergang $\epsilon \searrow 0$ durch.

Aufgabe 12: *Wahrscheinlichkeitsstromdichte* **(3 Punkte)**

Die Wellenfunktion $\psi(\vec{x}, t)$ liefert die Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$\rho(\vec{x}, t) = |\psi(\vec{x}, t)|^2$$

dafür, dass man ein Teilchen am Ort $\vec{x}$ antrifft, d.h. $\rho(\vec{x}, t)d^3\vec{x}$ ist die Wahrscheinlichkeit ein Teilchen am Ort $\vec{x}$ im Volumenelement $d^3\vec{x}$ zu finden.

Zeigen Sie mit Hilfe der zeitabhängigen Schrödingergleichung für ein Teilchen im Potential $V(\vec{x})$, dass $\rho(\vec{x}, t)$ die *Kontinuitätsgleichung*

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{x}, t) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}, t) = 0$$

mit der *Wahrscheinlichkeitsstromdichte*

$$\vec{j}(\vec{x}, t) := \frac{i\hbar}{2m} \left[\psi(\vec{x}, t)\, \vec{\nabla}\psi^*(\vec{x}, t) - \psi^*(\vec{x}, t)\vec{\nabla}\psi(\vec{x}, t)\right]$$

erfüllt.

Bitte wenden !

Aufgabe 13: *Potenzialbarriere, Tunneleffekt* **(10 Punkte)**

Ein Strom von Teilchen der Masse m und Energie E falle von links in positiver x-Richtung laufend auf die Potenzialbarriere

$$V(x) = V_0\Theta(x)\Theta(L-x)$$

der Höhe $V_0 > 0$ und der Tiefe $L > 0$.

a) Wie in Aufgabe 8 kann man für die Lösung der zugehörigen zeitunabhängigen Schrödingergleichung zur Energie $E > V_0$ den Ansatz

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ik_0x} + re^{-ik_0x} & \text{für} \quad x < 0 \quad \text{(Bereich I)} \\ Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & \text{für} \quad 0 < x < L \quad \text{(Bereich II)} \\ te^{ik_0x} & \text{für} \quad x > L \quad \text{(Bereich III)} \end{cases}$$

machen. Dabei kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Amplitude der von links einfallenden Welle gleich 1 ist. Wie hängen k_0 und k von E und V_0 ab ?

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsstromdichten j_I und j_{III} in den Bereichen I und III als Funktion von r und t. Zeigen Sie, dass die Transmissionswahrscheinlichkeit $T := j_{\text{trans}}/j_{\text{ein}}$ gleich $|t|^2$ ist.
Anmerkung: Es ist $j_I = j_{\text{ein}} - j_{\text{refl}}$ mit j_{ein} = Wahrscheinlichkeitsstromdichte der einfallenden Teilchen, j_{refl} = Wahrscheinlichkeitsstromdichte der reflektierten Teilchen sowie $j_{III} = j_{\text{trans}}$ = Wahrscheinlichkeitsstromdichte der transmittierten Teilchen.

c) Berechnen Sie die Transmissionswahrscheinlichkeit T als Funktion von $\hbar, E, V_0, L$ und m für den Fall $E > V_0$. Diskutieren Sie das Ergebnis:

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(E-V_0)}\sin^2\left(\frac{L}{\hbar}\sqrt{2m(E-V_0)}\right)}$$

d) Bestimmen Sie T für den Fall $E < V_0$ (möglichst ohne viel Rechnung) und diskutieren Sie das Ergebnis.

e) Berechnen Sie T für Elektronen mit $E = 1\text{eV}$ bei $V_0 = 2\text{eV}$ und $L = 10^{-10}\text{m}$ sowie für Protonen derselben kinetischen Energie an der gleichen Schwelle.

Aufgabe 14: *Tunnelsystem* **(5 Punkte)**

Zur Erklärung der anomalen Tieftemperatureigenschaften von Gläsern werden seit Anfang der 70er Jahre sogenannte Doppelmuldenkonfigurationen in der potenziellen Energie und der Einfluß des Tunneleffekts auf das Energiespektrum solcher Konfigurationen diskutiert. Eine vereinfachte Version einer Doppelmulde ist durch das folgende Potenzial gegeben:

$$V(x) = \begin{cases} b\delta(x), & \text{für} \quad |x| \le a \\ \infty & \text{für} \quad |x| > a. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die möglichen Energie-Eigenwerte und deren Eigenfunktionen.

Anleitung: Die Eigenfunktionen sind entweder gerade (symmetrische) oder ungerade (antisymmetrische) Funktionen der Ortskoordinate x. Im Fall der symmetrischen Eigenfunktionen erhält man für die Energie-Eigenwerte eine transzendente Bestimmungsgleichung. Eine Lösung dieser Gleichung ist **nicht** gefordert. Geben Sie jedoch anhand einer Skizze an, wie man diese Gleichung graphisch lösen könnte.