6. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik

Abgabe: Freitag, 03.12.2004 in den Übungen.

Aufgabe 15: *Harmonischer Oszillator* **(12 Punkte)**

In der Vorlesung haben Sie die stationären Lösungen der Schrödinger Gleichung für einen harmonischen Oszillator einer Raumdimension zunächst mit der algebraischen Methode der Auf- und Absteigeoperatoren

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\sqrt{m\omega}\, \hat{Q} + \frac{i}{\sqrt{m\omega}}\, \hat{P} \right) \\ \hat{a}^{+} &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\sqrt{m\omega}\, \hat{Q} - \frac{i}{\sqrt{m\omega}}\, \hat{P} \right) \end{aligned}$$

mit

$$\hat{Q} = x \qquad \text{und} \qquad \hat{P} = -i\hbar \frac{d}{dx}$$

bestimmt.

a) Man definiert die dimensionslose Größe

$$\xi := \frac{x}{x_0} \qquad \text{mit} \qquad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

Zeigen Sie, dass

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi + \frac{d}{d\xi} \right) \qquad \hat{a}^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi - \frac{d}{d\xi} \right) \quad .$$

(1 Punkt)

Aus $\hat{a}|0\rangle = 0$ erhält man für die Grundzustandswellenfunktion $\psi_0(\xi)$ (siehe Vorlesung)

$$\psi_0(\xi) = (\pi)^{-\frac{1}{4}}\, e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$$

b) Welche Bedeutung hat die Größe x_0 beim klassischen Oszillator ? **(1 Punkt)**
Tipp: Betrachten Sie einen klassischen harmonischen Oszillator mit der Gesamtenergie $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$.

c) $|\psi_0(\xi)|^2 d\xi$ ist die Wahrscheinlichkeit, Teilchen im Intervall $[\xi, \xi + d\xi]$ zu finden. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, das Teilchen im Intervall $[x, x + dx]$ zu finden ! **(1 Punkte)**

Bitte wenden !

d) Zeigen Sie, dass die Wellenfunktionen zu den angeregten Energiezuständen gegeben sind durch **(5 Punkte)**

$$\psi_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} H_n(\xi)$$

Anleitung: $\psi_n(\xi)$ ergibt sich durch wiederholte Anwendung von a^+ auf die Wellenfunktion des Grundzustandes $\psi_0(\xi)$. Beweisen und benutzen Sie die Operatorgleichung

$$e^{-\frac{\xi^2}{2}} \left(\xi - \frac{d}{d\xi}\right)^n e^{\frac{\xi^2}{2}} = (-1)^n \frac{d^n}{d\xi^n}$$

Benutzen Sie schließlich die in der Präsenzaufgabe P6 c) bewiesene Darstellung von $H_n(\xi)$.

e) Skizzieren und diskutieren Sie den Verlauf der ersten drei Energie-Eigenfunktionen $\psi_0(\xi), ..., \psi_2(\xi)$. **(2 Punkte)**

f) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Teilchen im Grundzustand ψ_0 außerhalb des klassisch erlaubten Intervalls (= Intervall zwischen den Umkehrpunkten eines klassischen harmonischen Oszillators mit Gesamternergie $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$) aufhält ? **(2 Punkte)**
(Anmerkung: Dabei hilft: $\text{erf}(1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-\xi^2} d\xi = 0,8427$).

Aufgabe 16: *Harmonischer Oszillator, Besetzungszahldarstellung* **(8 Punkte)**
Betrachten Sie nochmals einen harmonischen Oszillator (siehe Aufgabe 15).

a) Drücken Sie den Ortsoperator $\hat{Q}$ und den Impulsoperator $\hat{P}$ durch die Auf- und Absteigeoperatoren $\hat{a}$ und $\hat{a}^+$ aus. **(2 Punkte)**

b) Drücken Sie die Operatoren $\hat{Q}^2$ und $\hat{P}^2$ durch die Auf- und Absteigeoperatoren $\hat{a}$ und $\hat{a}^+$ aus. **(2 Punkte)**

c) Berechnen Sie für einen Zustand $|n\rangle$, $n \in \mathbb{N}$, (Besetzungszahldarstellung !) die Erwartungswerte

$$\langle \hat{Q}^2 \rangle = \left\langle n \,\middle|\, \hat{Q}^2 \,\middle|\, n \right\rangle \qquad \text{und} \qquad \langle \hat{P}^2 \rangle = \left\langle n \,\middle|\, \hat{P}^2 \,\middle|\, n \right\rangle$$

Geben Sie die Erwartungswerte der kinetischen Energie sowie der potenziellen Energie an. **(2 Punkte)**

d) Berechnen Sie die Ortsunschärfe $\Delta\hat{Q}$ und die Impulsunschärfe $\Delta\hat{P}$ für den Zustand $|n\rangle$.
Was ergibt sich für $\Delta\hat{Q} \cdot \Delta\hat{P}$? **(2 Punkte)**