

7. ÜBUNGSBLATT ZUR VORLESUNG QUANTENMECHANIK

Abgabe: Freitag, 17.12.2004 in den Übungen.

Aufgabe 17: Drehimpuls (3 Punkte)

Berechnen Sie die Matrixdarstellung der Drehimpulsoperatoren L_x, L_y sowie von L_+ und L_- in der Basis der Drehimpulseigenzustände $|lm\rangle$ für $l = 1$.

Aufgabe 18: Coulomb-Potential, quantenmechanisches Virialtheorem (3 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie die gebundenen Zustände des Coulomb-Potenzials (ohne Spin und ohne Berücksichtigung von relativistischen Korrekturen)

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = \psi_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \phi)$$

kennengelernt. Dabei ist

$$\psi_{nl}(r) = \frac{2}{n^2} \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{((n+l)!)^3}} a^{-3/2} \left(\frac{2r}{na}\right)^l e^{-\frac{r}{na}} L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na}\right)$$

mit $a := \frac{\hbar}{mZe^2}$. Dabei sind $L_p^k(\rho)$ die Laguerrepolynome, die gegeben sind durch

$$L_p^k(\rho) = \frac{\Gamma(p+k+1)}{p!} \frac{e^\rho}{\rho^k} \frac{d^p}{d\rho^p} (\rho^{p+k} e^{-\rho})$$

mit $p \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{R}$.

Berechnen Sie nun den Erwartungswert des Operators $\frac{1}{r}$ für diese gebundenen Zustände und verifizieren Sie, dass

$$2\langle \hat{T} \rangle = 2(E_n - \langle \hat{V} \rangle) = -\langle \hat{V} \rangle$$

gilt. Dabei ist \hat{T} der Operator der kinetischen Energie und \hat{V} der Operator der potenziellen Energie.

Tip: Benutzen Sie die Orthogonalität der Laguerrepolynome:

$$\frac{p!}{[\Gamma(p+k+1)]^3} \int_0^{+\infty} d\rho \rho^k e^{-\rho} L_p^k(\rho) L_{p'}^k(\rho) = \delta_{pp'}$$

Aufgabe 19: 3-dimensionaler isotroper harmonischer Oszillator, Zentralpotenzial

Betrachten Sie ein Teilchen im dreidimensionalen Oszillatorpotenzial $V(\vec{r}) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$ mit $r^2 = |\vec{r}|^2$ (siehe Vorlesung). Der Hamiltonoperator des Systems ist gegeben durch

$$\hat{H} = \sum_{i=x,y,z} \hat{H}_i \quad \text{mit} \quad \hat{H}_i = \frac{1}{2m} (\hat{P}_i^2 + m^2\omega^2 \hat{Q}_i^2)$$

mit $i = x, y, z$. Ist U_i der Zustandsraum des Variablenpaares \hat{P}_i, \hat{Q}_i , so ist der Zustandsraum des Gesamtsystems gegeben durch das Tensorprodukt $U = U_x \otimes U_y \otimes U_z$. Man definiert nun für jedes Variablenpaar $\hat{Q}_i, \hat{P}_i, i = x, y, z$ (analog zum eindimensionalen Fall, siehe Vorlesung bzw. Aufgabe 15) Leiteroperatoren $\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger$:

$$\hat{a}_i = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\sqrt{m\omega} \hat{Q}_i + \frac{i}{\sqrt{m\omega}} \hat{P}_i \right)$$

$$\hat{a}_i^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\sqrt{m\omega} \hat{Q}_i - \frac{i}{\sqrt{m\omega}} \hat{P}_i \right)$$

Diese erfüllen die Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} [\hat{a}_i, \hat{a}_j] &= [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = 0 \\ [\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] &= \delta_{i,j} \end{aligned}$$

Die zugehörigen Teilchenzahloperatoren sind gegeben durch $\hat{n}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$. Sind $|n_i\rangle$ die Eigenvektoren des Hamiltonoperators \hat{H}_i , so bilden $|n_x n_y n_z\rangle = |n_x\rangle |n_y\rangle |n_z\rangle$ in U ein vollständiges Orthonormalsystem.

Ist $|000\rangle$ der Eigenvektor des Grundzustandes, so ist

$$\begin{aligned} \hat{a}_x |000\rangle &= \hat{a}_y |000\rangle = \hat{a}_z |000\rangle = 0 \\ |n_x n_y n_z\rangle &= (n_x! n_y! n_z!)^{-\frac{1}{2}} \hat{a}_x^{\dagger n_x} \hat{a}_y^{\dagger n_y} \hat{a}_z^{\dagger n_z} |000\rangle \end{aligned} \quad (1)$$

Aus der Vorlesung wissen Sie, dass bei einem Zentralpotenzial \hat{H}, \hat{L}^2 und \hat{L}_z auch einen vollständigen Satz kommutierender Observabler bilden. Die gemeinsamen Eigenvektoren sind durch die Quantenzahlen n, l und m gekennzeichnet mit den zugehörigen Eigenwerten $E_n, \hbar^2 l(l+1)$ und $\hbar m$. Die Zustände $|nlm\rangle$ ergeben sich aus den $|n_x n_y n_z\rangle$ durch unitäre Transformation.

- (a) Drücken Sie die Operatoren \hat{L}_x, \hat{L}_y und \hat{L}_z durch die Operatoren \hat{a}_i^\dagger und \hat{a}_i ($i = x, y, z$) aus. **(3 Punkte)**
- (b) Man betrachte die Zustände mit der Energie $E = \hbar\omega(1 + \frac{3}{2})$. Die zugehörigen Eigenvektoren von \hat{H} in der $|n_x n_y n_z\rangle$ Darstellung sind dann $|100\rangle, |010\rangle, |001\rangle$. Diese bilden eine Basis des Unterraumes der Eigenvektoren von \hat{H} zum Eigenwert $E = \hbar\omega(1 + \frac{3}{2})$. Man gebe die Matrix an, die dem Operator \hat{L}_z bezüglich dieser Basis zugeordnet ist und bestimme die zugehörigen Eigenwerte und Eigenvektoren (als Linearkombinationen der Zustände $|100\rangle, |010\rangle, |001\rangle$) von \hat{L}_z . **(4 Punkte)**
- (c) Zeigen Sie: Die in (b) konstruierten Eigenvektoren von \hat{L}_z sind auch Eigenvektoren von \hat{L}^2 zum Eigenwert $2\hbar^2$ (d.h. $l = 1$). Drücken Sie dazu \hat{L}^2 durch \hat{a}_i^\dagger und \hat{a}_i aus und wenden \hat{L}^2 dann direkt auf die Eigenvektoren an. **(3 Punkte)**
- (d) Geben Sie die Ortsraumdarstellung $\langle \vec{r} | 100 \rangle, \langle \vec{r} | 010 \rangle, \langle \vec{r} | 001 \rangle$ der Zustände an und zeigen Sie, dass die in (b) als Eigenvektoren von \hat{L}_z konstruierten Linearkombinationen dieser Funktionen tatsächlich

$$\psi_{nlm}(\vec{r}) = \text{const} \quad r e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 r^2} Y_l^m(\theta, \phi)$$

mit $l = 1$ und $m = 0, \pm 1$, $\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ ergeben. **(3 Punkte)**