# 7. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik

Abgabe: Freitag, 17.12.2004 in den Übungen.

**Aufgabe 17**: *Drehimpuls* **(3 Punkte)**

Berechnen Sie die Matrixdarstellung der Drehimpulsoperatoren $L_x, L_y$ sowie von $L_+$ und $L_-$ in der Basis der Drehimpulseigenzustände $|lm\rangle$ für $l = 1$.

**Aufgabe 18**: *Coulomb-Potential, quantenmechanisches Virialtheorem* **(3 Punkte)**

In der Vorlesung haben Sie die gebundenen Zustände des Coulomb-Potenzials (ohne Spin und ohne Berücksichtigung von relativistischen Korrekturen)

$$\psi_{nlm}(r,\theta,\phi) = \psi_{nl}(r) Y_{lm}(\theta,\phi)$$

kennengelernt. Dabei ist

$$\psi_{nl}(r) = \frac{2}{n^2}\sqrt{\frac{(n-l-1)!}{((n+l)!)^3}} a^{-3/2} \left(\frac{2r}{na}\right)^l e^{-\frac{r}{na}} L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na}\right)$$

mit $a := \frac{\hbar}{mZe^2}$. Dabei sind $L_p^k(\rho)$ die Laguerrepolynome, die gegeben sind durch

$$L_p^k(\rho) \;=\; \frac{\Gamma(p+k+1)}{p!}\,\frac{e^\rho}{\rho^k}\,\frac{d^p}{d\rho^p}\left(\rho^{p+k} e^{-\rho}\right)$$

mit $p \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{R}$.

Berechnen Sie nun den Erwartungswert des Operators $\frac{1}{r}$ für diese gebundenen Zustände und verifizieren Sie, dass

$$2\langle \hat{T} \rangle \;=\; 2\left(E_n - \langle \hat{V} \rangle\right) \;=\; -\langle \hat{V} \rangle$$

gilt. Dabei ist $\hat{T}$ der Operator der kinetischen Energie und $\hat{V}$ der Operator der potenziellen Energie.

**Tipp:** Benutzen Sie die Orthogonalität der Laguerrepolynome:

$$\frac{p!}{[\Gamma(p+k+1)]^3}\int_0^{+\infty} d\rho\, \rho^k e^{-\rho} L_p^k(\rho) L_{p'}^k(\rho) \;=\; \delta_{pp'}$$

**Aufgabe 19**: *3-dimensionaler isotroper harmonischer Oszillator, Zentralpotenzial*

Betrachten Sie ein Teilchen im dreidimensionalen Oszillatorpotenzial $V(\vec{r}) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$ mit $r^2 = |\vec{r}|^2$ (siehe Vorlesung). Der Hamiltonoperator des Systems ist gegeben durch

$$\hat{H} = \sum_{i=x,y,z} \hat{H}_i \qquad \text{mit} \qquad \hat{H}_i = \frac{1}{2m}\left(\hat{P}_i^2 + m^2\omega^2 \hat{Q}_i^2\right)$$

mit $i = x, y, z$. Ist $U_i$ der Zustandsraum des Variablenpaares $\hat{P}_i, \hat{Q}_i$, so ist der Zustandsraum des Gesamtsystems gegeben durch das Tensorprodukt $U = U_x \otimes U_y \otimes U_z$. Man definiert nun für jedes Variablenpaar $\hat{Q}_i, \hat{P}_i$, $i = x, y, z$ (analog zum eindimensionalen Fall, siehe Vorlesung bzw. Aufgabe 15) Leiteroperatoren $\hat{a}_i$, $\hat{a}_i^\dagger$:

$$\hat{a}_i \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\sqrt{m\omega}\,\hat{Q}_i \;+\; \frac{i}{\sqrt{m\omega}}\,\hat{P}_i\right)$$

$$\hat{a}^+ \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\sqrt{m\omega}\,\hat{Q}_i \;-\; \frac{i}{\sqrt{m\omega}}\,\hat{P}_i\right)$$

Diese erfüllen die Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} [\hat{a}_i, \hat{a}_j] &= \left[\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger\right] = 0 \\ \left[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger\right] &= \delta_{i,j} \end{aligned}$$

Die zugehörigen Teilchenzahloperatoren sind gegeben durch $\hat{n}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$. Sind $|n_i\rangle$ die Eigenvektoren des Hamiltonoperators $\hat{H}_i$, so bilden $|n_x n_y n_z\rangle = |n_x\rangle|n_y\rangle|n_z\rangle$ in U ein vollständiges Orthonormalsystem.
Ist $|000\rangle$ der Eigenvektor des Grundzustandes, so ist

$$\begin{aligned} \hat{a}_x|000\rangle &= \hat{a}_y|000\rangle = \hat{a}_z|000\rangle = 0 \qquad (1) \\ |n_x n_y n_z\rangle &= (n_x! n_y! n_z!)^{-\frac{1}{2}}\, \hat{a}_x^{\dagger n_x} \hat{a}_y^{\dagger n_y} \hat{a}_z^{\dagger n_z} |000\rangle \end{aligned}$$

Aus der Vorlesung wissen Sie, dass bei einem Zentralpotenzial $\hat{H}, \hat{\vec{L}}^2$ und $\hat{L}_z$ auch einen vollständigen Satz kommutierender Observabler bilden. Die gemeinsamen Eigenvektoren sind durch die Quantenzahlen $n$, $l$ und $m$ gekennzeichnet mit den zugehörigen Eigenwerten $E_n$, $\hbar^2 l(l+1)$ und $\hbar m$. Die Zustände $|nlm\rangle$ ergeben sich aus den $|n_x n_y n_z\rangle$ durch unitäre Transformation.

(a) Drücken Sie die Operatoren $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ und $\hat{L}_z$ durch die Operatoren $\hat{a}_i^\dagger$ und $\hat{a}_i$ ($i = x, y, z$) aus. **(3 Punkte)**

(b) Man betrachte die Zustände mit der Energie $E = \hbar\omega(1 + \frac{3}{2})$. Die zugehörigen Eigenvektoren von $\hat{H}$ in der $|n_x n_y n_z\rangle$ Darstellung sind dann $|100\rangle$,$|010\rangle$,$|001\rangle$. Diese bilden eine Basis des Unterraumes der Eigenvektoren von $\hat{H}$ zum Eigenwert $E = \hbar\omega(1+\frac{3}{2})$. Man gebe die Matrix an, die dem Operator $\hat{L}_z$ bezüglich dieser Basis zugeordnet ist und bestimme die zugehörigen Eigenwerte und Eigenvektoren (als Linearkombinationen der Zustände $|100\rangle$,$|010\rangle$,$|001\rangle$) von $\hat{L}_z$. **(4 Punkte)**

(c) Zeigen Sie: Die in (b) konstruierten Eigenvektoren von $\hat{L}_z$ sind auch Eigenvektoren von $\hat{\vec{L}}^2$ zum Eigenwert $2\hbar^2$ (d.h. $l = 1$). Drücken Sie dazu $\hat{\vec{L}}^2$ durch $\hat{a}_i^\dagger$ und $\hat{a}_i$ aus und wenden $\hat{\vec{L}}^2$ dann direkt auf die Eigenvektoren an. **(3 Punkte)**

(d) Geben Sie die Ortsraumdarstellung $\langle\vec{r}|100\rangle$,$\langle\vec{r}|010\rangle$,$\langle\vec{r}|001\rangle$ der Zustände an und zeigen Sie, dass die in (b) als Eigenvektoren von $\hat{L}_z$ konstruierten Linearkombinationen dieser Funktionen tatsächlich

$$\psi_{nlm}(\vec{r}) = \text{const} \quad r e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 r^2} Y_l^m(\theta, \phi)$$

mit $l = 1$ und $m = 0, \pm 1$, $\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ ergeben. **(3 Punkte)**