8. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik

Abgabe: Freitag, **14.01.2005** in den Übungen.

Aufgabe 20: *Basiswechsel* **(10 Punkte)**

Wir betrachten die Diskretisierung der Wellenfunktion eines kräftefreien Teilchens (eindimensionales Problem) $\psi(x)$ auf einem endlichen, eindimensionalen Gitter mit N Gitterpunkten und einem Gitterabstand von $\Delta x = a$. Es sei $N \in \mathbb{N}$ gerade. Es ergeben sich folgende Entsprechungen:

kontinuierliche Beschreibung	diskretes, endliches 1. dim Gitter
Eigenwerte des Ortsoperators x	$ma \quad , \quad m = 0, 1, ..., N-1$
Eigenzustand des Ortsoperators $\|x\rangle$	$\frac{\|m\rangle}{\sqrt{a}}$
Wellenfunktion im Ortsraum $\psi(x)$	$\frac{\psi_m}{\sqrt{a}}$
Eigenwerte des Impulsoperators p	$\frac{2\pi\hbar}{Na} l \quad , \quad l = -\frac{N}{2}, -\frac{N}{2}+1, ..., \frac{N}{2}-1$
Eigenzustand des Impulsoperators p $\|p\rangle$	$\sqrt{\frac{Na}{2\pi\hbar}}\,\|l\rangle$

Der Basiswechsel von der Basis $\{|m\rangle\}$ zur Basis $\{|l\rangle\}$ wird beschrieben durch die Funktionen

$$f_l(m) \;=\; \langle m|l\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(i\frac{2\pi}{Na} lma\right) \qquad (*)$$

mit $m = 0, 1, 2, ..., N-1$ und $l = -\frac{N}{2}, -\frac{N}{2}+1, ..., \frac{N}{2}-1$

a) Zeigen Sie, dass die $f_l(m)$ sowohl in l als auch in m periodisch sind mit der Periode N. **(1 Punkt)**

b) Zeigen Sie $\sum_l f_l^*(m) f_l(m') \;=\; \delta_{mm'}$ (Vollständigkeit der $f_l(m)$). **(2 Punkte)**

c) Zeigen Sie $\sum_m f_l^*(m) f_{l'}(m) \;=\; \delta_{ll'}$ (Orthogonalität der $f_l(m)$). **(2 Punkte)**

d) In der Basis $\{|l\rangle\}$ wird der Impulsoperator durch die Diagonalmatrix

$$\langle l|\hat{p}|l'\rangle \;=\; \frac{2\pi\hbar}{Na}\, l\, \delta_{ll'}$$

dargestellt. Berechnen Sie nun die Matrixelemente $\langle m|\hat{p}|n\rangle$ des Impulsoperators in der Basis $\{|m\rangle\}$. Betrachten Sie anschließend den Grenzübergang $a \to 0$, $N \to \infty$ und zeigen, dass man das bekannte Ergebnis $\langle x|\hat{p}|x'\rangle = \frac{\hbar}{i}\delta'(x-x')$ erhält. Diskutieren Sie (kurz) den Zusammnhang zwischen (*) und der Fourier-Transformation.
(5 Punkte)

Aufgabe 21: *Störungstheorie, "verschobener" linearer harmonischer Oszillator*
. **(5 Punkte)**

Betrachten Sie nochmals den "verschobenen" linearen harmonischen Oszillator (siehe Testaufgabe T 3): Ein Teilchen der Masse m und Ladung q befinde sich in einem Oszillatorpotenzial $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ und sei zusätzlich einem zeitlich konstanten homogenen elektrischen Feld $\vec{E} = E\vec{e}_x$ mit potenzieller Energie $V_E(x) = -qEx$ ausgesetzt (eindimensionales Problem). Fassen Sie nun $W = V_E(x) = -qEx$ als "Störung" auf:

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 \qquad\qquad W = V_E(x) = -qEx$$

und berechnen Sie die Eigenwerte E_n von $H = H_0 + W$ in erster und zweiter Ordnung Störungstheorie. Vergleichen Sie das Ergebnis mit den aus Aufgabe T3 bekannten exakten Energieeigenwerten.

Aufgabe 22: Ritzsches Variationsverfahren **(5 Punkte)**

Führe das Ritzsche Variationsverfahren für den linearen harmonischen Oszillator unter Verwendung der Versuchsfunktionenschar (α = Variationsparameter)

$$\left\{ u(x;\alpha) = \frac{1}{\alpha^2 + x^2}, x \in R, \alpha \in R^+ \right\}$$

durch.
Für ein Computerbild, das die exakte Grundzustands-Wellenfunktion zusammen mit der sich aus dem Variationsverfahren ergebenden Näherungs-Wellenfunktion zeigt, gibt es **5 extra Punkte**.
Hinweis:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(\alpha^2+x^2)^2} = \frac{\pi}{4\alpha^3} \qquad \int_0^\infty dx \frac{x^2}{(\alpha^2+x^2)^2} = \frac{\pi}{4\alpha}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(\alpha^2+x^2)^3} = \frac{3\pi}{16\alpha^5} \qquad \int_0^\infty dx \frac{x^2}{(\alpha^2+x^2)^4} = \frac{\pi}{32\alpha^5}$$

Aufgabe 23: Zeitunabhängige Störungsrechnung **(10 Punkte)**
Der Hamiltonoperator eines **zweidimensionalen Oszillators** sei gegeben durch

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \hat{H}_0 + \hat{H}_1 \\
\hat{H}_0 &= \frac{1}{2m}\left(\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2\right) + \frac{m\omega^2}{2}\left(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2\right) \\
\hat{H}_1 &= \gamma\frac{m^2\omega^3}{\hbar}\hat{x}_1^2\hat{x}_2^2 \qquad \text{mit } \gamma \in R^+
\end{aligned}$$

(a) Geben Sie die Lösung des Eigenwertproblems des ungestörten Hamiltonian $\hat{H}_0$ an. **(3 Punkte)**

(b) Berechnen Sie die störungstheoretische Energiekorrektur in erster und zweiter Ordnung für den Grundzustand von $\hat{H}$. **(7 Punkte)**

Frohe Weihnachten und alles Gute für das Jahr 2005 !