

Universität Heidelberg

MATHEMATISCHER VORKURS
ZUM STUDIUM DER PHYSIK
ÜBUNGEN

Aufgaben zu Kapitel 9 (Fortsetzung)

(aus: K. Hefft, Mathematischer Vorkurs zum Studium der Physik, sowie Ergänzungen)

AUFGABE 9.11: Winkel im Skalarprodukt

Was bedeutet

$$2(\underline{a} \cdot \underline{b}) = |\underline{a}||\underline{b}|$$

für den Winkel zwischen den beiden Vektoren ?

AUFGABE 9.12: Cosinussatz

- a) Beweisen Sie mit Hilfe des Skalarproduktes den Cosinus-Satz der ebenen Geometrie, nach dem in einem Dreieck mit den Seitenlängen a, b und c gilt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$$

wobei γ den Gegenwinkel der Seite c bezeichnet.

- b) Was folgt daraus für $\gamma = \pi/2$?

AUFGABE 9.13: Schwarzsche Ungleichung

Warum gilt für den Betrag des Skalarproduktes die sogenannte Schwarzsche Ungleichung

$$|(\underline{a} \cdot \underline{b})| \leq |\underline{a}||\underline{b}|$$

AUFGABE 9.14: Zum Assoziativgesetz

- a) Vergleichen Sie den Vektor $(\underline{a} \cdot \underline{b})\underline{c}$ mit dem Vektor $\underline{a}(\underline{b} \cdot \underline{c})$ geometrisch.

- b) Was bedeutet \underline{a}^3 ?

AUFGABE 9.15: Zum Distributivgesetz

Zwei Vektoren \underline{a} und \underline{b} spannen ein Parallelogramm auf.

- a) Berechnen Sie dazu $(\underline{a} + \underline{b}) \cdot (\underline{a} - \underline{b})$.

- b) Was bedeutet das Ergebnis geometrisch ?
- c) Bestimmen Sie den Winkel φ zwischen den beiden Diagonalen des Parallelogramms.
- d) Wann stehen diese senkrecht aufeinander ?

AUFGABE 9.16: Winkelbestimmung

- a) Bestimmen Sie den Winkel zwischen zwei Kanten eines Tetraeders.
- b) Bestimmen Sie den Winkel zwischen zwei benachbarten Diagonalen eines Würfels.

AUFGABE 9.17: Orthonormalbasis

Bilden die drei Vektoren

$$\underline{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis des Vektorraumes \mathbb{R}^3 ?

AUFGABE 9.18: Skalarprodukt

Bestimmen Sie das Skalarprodukt und die Länge der Projektionen für die beiden Vektoren

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

von \underline{a} auf \underline{b} bzw. von \underline{b} auf \underline{a}

AUFGABE 9.19: Winkel mit den Koordinatenachsen:

Welche Winkel bildet der Vektor $\underline{a} = \hat{e}_1 + \sqrt{3}\hat{e}_2$ mit den Koordinatenachsen ?

AUFGABE 9.20: Transversaler Anteil:

Berechnen Sie den zum Vektor

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

transversalen Anteil von

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

AUFGABE 9.21: Berechnen Sie die Arbeit, die die Kraft

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(in N-Einheiten) auf der Wegstrecke

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(in m-Einheiten) verrichtet. Bestimmen Sie auch den Winkel zwischen \vec{F} und \vec{s}

AUFGABE 9.22: Inverse Funktionenschar:

Geben Sie explizit eine Funktionenschar \underline{x} an, welche die Gleichung $(\underline{a} \cdot \underline{x}) = 1$ löst, wenn

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

AUFGABE 9.23: Vektorprodukte in der Physik

Wie erhalten Sie

- bei einer Drehbewegung die lineare Geschwindigkeit \vec{v} aus der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ und dem Ort \vec{x} ?
- bei der Kepler-Bewegung die Flächengeschwindigkeit \vec{f} aus dem Ort \vec{x} und der Geschwindigkeit \vec{v} des Planeten?
- den Bahndrehimpuls \vec{L} aus dem Ortsvektor \vec{x} und Impuls \vec{p} ?
- das mechanische Drehmoment \vec{D} aus Kraft \vec{F} und Hebelarm \vec{x} ?
- das Drehmoment auf einen elektrischen Dipol mit Dipolmoment \vec{p} in einem homogenen elektrischen Feld \vec{E} ?
- das Drehmoment auf einen magnetischen Dipol mit Dipolmoment \vec{m} in einem homogenen Magnetfeld \vec{H} .
- die Dichte der elektromagnetischen Lorentz-Kraft \vec{k} aus der Geschwindigkeit \vec{v} eines Elektrons mit der Masse m und Ladung e und der magnetischen Induktion \vec{B} ?

- h) den Poynting-Vektor \vec{S} des elektromagnetischen Strahlungsflusses aus dem elektrischen \vec{E} und magnetischen Feld \vec{H} der Strahlung ?
- i) das Magnetfeld \vec{H} im Abstand \vec{x} von einem elektrischen Stromfaden \vec{j} nach dem Biot-Savartschen Gesetz ?

AUFGABE 9.24: Drehmomente

Bestimmen Sie das Drehmoment \vec{M} der Kraft

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(in N-Einheiten) für den Ortsvektor

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(in cm-Einheiten). Berechnen Sie auch den Betrag M von \vec{M} .

AUFGABE 9.25: Drehmomente

Diskutieren Sie den Betrag und die Richtung des Drehmoments auf eine Kompaßnadel im magnetischen Erdfeld, wenn der Winkel θ zwischen Dipolmoment \vec{m} und Feld \vec{H} $0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi$ bzw. $5\pi/4$ beträgt.

AUFGABE 9.26: Distributivgesetze der Vektorprodukte

a) Berechnen Sie $[(\underline{a} + \underline{b}) \times (\underline{a} - \underline{b})]$.

b) Was ergibt sich für

$$[\underline{a} \times \underline{b}]^2 + (\underline{a} \cdot \underline{b})^2$$

(Lagrange-Identität)

AUFGABE 9.27: Dritter Basisvektor:

Welche der Einheitsvektoren stehen senkrecht auf:

a) $(\hat{e}_1 + \hat{e}_2)$ und $(\hat{e}_1 - \hat{e}_2)$

b) $(\hat{e}_1 - \hat{e}_2)$ und $(\hat{e}_2 - \hat{e}_3)$

c) $(\hat{e}_1 + 2\hat{e}_3)$ und $(\hat{e}_2 - 2\hat{e}_3)$