19 Cooper-Paare und BCS-Lösung

19.a BCS-Grundzustand

Die Grundidee von Bardeen, Cooper und Schrieffer (BCS) war, dass sich im supraleitenden Zustand kohärente Paare von Elektronen bilden, die einen Gesamtimpuls **0** und in vielen Fällen Gesamtspin 0 haben (Singlett-Supraleiter). Der wesentliche Anteil des Hamilton-Operators ist

$$H = \sum_k \epsilon_k (c_k^\dagger c_k + c_{-k}^\dagger c_{-k}) - \frac{V}{N} \sum_{k,k'} c_k^\dagger c_{-k}^\dagger c_{-k'} c_{k'}. \tag{19.1}$$

Dabei steht k für $\mathbf{k}, \uparrow$ und $-k$ für $-\mathbf{k}, \downarrow$. Im allgemeinen hängt die Kopplung V von k und k' ab. Hier wird der Einfachheit angenommen, dass V von k und k' unabhängig sind. Weiter wird angenommen, dass sich die Wechselwirkung nur in einer Umgebung der Fermikante erstreckt, so dass $|\epsilon_k - \mu| < \hbar\omega_{\rm D}$, da man davon ausgeht, dass nur Elektronen hinreichend nahe an der Fermikante dazu beitragen und man berücksichtigt, dass nur akustische Phononen, deren Energie bis zu $\hbar$ mal Debye-Frequenz reichen, wesentlich beitragen können. In der Tat finden wir (18.42), dass im Rahmen der Fröhlichschen Näherung die effektive Kopplung für große Energiedifferenzen abstoßend wird, und dass im Rahmen der Flussgleichungs-Näherung die Wechselwirkung zwar attraktiv bleibt, aber die Matrixelemente für $|\epsilon_k - \epsilon_{k'}| > \hbar\omega$ klein werden. Der Näherung (19.1) erlaubt uns, eine analytische Rechnung vorzunehmen.

BCS setzen nun für den Grundzustand

$$|\psi_0\rangle = \prod_k (u_k + v_k c_k^\dagger c_{-k}^\dagger)|\mathrm{vak}\rangle \tag{19.2}$$

an. Es werden also Paare von Elektronen erzeugt. Interessanterweise hat dieser Zustand keine feste Teilchenzahl. Vielmehr sind alle Paare k und $-k$ unabhängig von einander mit der Wahrscheinlichkeit u_k^2 unbesetzt und mit der Wahrscheinlichkeit v_k^2 besetzt, wobei man

$$u_k^2 + v_k^2 = 1 \tag{19.3}$$

fordert. Dann ist der Zustand normiert

$$\langle\psi_0|\psi_0\rangle = \prod_k (u_k^2 + v_k^2) = 1. \tag{19.4}$$

Mit diesem Ansatz erhält man die Erwartungswerte

$$\langle \mathcal{N} \rangle = 2\sum_k v_k^2, \tag{19.5}$$

$$\langle H - \mu\mathcal{N} \rangle = 2\sum_k (\epsilon_k - \mu) v_k^2 - \frac{V}{N}\sum_{k,k'} u_k v_k u_{k'} v_{k'}. \tag{19.6}$$

Wir wollen nun die u_k und v_k unter der Nebenbedingung (19.3) variieren. Am einfachsten setzen wir

$$u_k = \cos\phi_k, \quad v_k = \sin\phi_k \tag{19.7}$$

an. Dann können wir die Winkel ϕ_k unabhängig variieren,

$$\frac{\partial}{\partial\phi_k}\langle H - \mu\mathcal{N}\rangle = 4(\epsilon_k - \mu)u_k v_k - \frac{2V}{N}\sum_{k'} u_{k'} v_{k'} (u_k^2 - v_k^2). \tag{19.8}$$

Mit der Abkürzung

$$\Delta = \frac{V}{N}\sum_{k'} u_{k'} v_{k'} \tag{19.9}$$

folgen dann die Gleichungen

$$(\epsilon_k - \mu) \cdot \underbrace{2 v_k u_k}_{\sin(2\phi_k)} = \Delta \underbrace{(u_k^2 - v_k^2)}_{\cos(2\phi_k)}. \tag{19.10}$$

Diese Gleichungen haben immer die triviale Lösung

$$\begin{aligned} \Delta = 0, \quad & u_k = 1, v_k = 0 \quad \text{für} \quad \epsilon_k > \mu, \\ & u_k = 0, v_k = 1 \quad \text{für} \quad \epsilon_k < \mu. \end{aligned} \tag{19.11}$$

Dies entspricht dem Hartree-Fock-Zustand, in dem die Elektronen bis $\epsilon_k = \mu$ aufgefüllt sind. Daneben gibt es auch noch die nicht-triviale Lösung $\Delta \neq 0$ mit

$$2v_k u_k = \frac{\Delta}{\sqrt{\Delta^2 + (\epsilon_k - \mu)^2}}, \quad u_k^2 - v_k^2 = \frac{\epsilon_k - \mu}{\sqrt{\Delta^2 + (\epsilon_k - \mu)^2}}, \tag{19.12}$$

wobei dann Δ der Gleichung

$$\Delta = \frac{V}{2N} \sum_{k'} \frac{\Delta}{\sqrt{\Delta^2 + (\epsilon_{k'} - \mu)^2}} \tag{19.13}$$

genügen muss. Mit der Zustandsdichte $D(\epsilon)$ für die Elektronen führt dies auf die Gleichung

$$1 = \frac{\hat{V}}{4} \int_{\mu - \hbar\omega_{\mathrm{D}}}^{\mu + \hbar\omega_{\mathrm{D}}} \frac{D(\epsilon)\mathrm{d}\epsilon}{\sqrt{(\epsilon - \mu)^2 + \Delta^2}} \text{ mit } \hat{V} = \frac{V_{\mathrm{P}}}{N} V = V_{\mathrm{z}} V, \tag{19.14}$$

da die Zustandsdichte auf das Volumen V_{P} und nicht auf die Zahl der Gitterpunkte N bezogen ist. Für $\hbar\omega_{\mathrm{D}} \gg \Delta$ und der Näherung $D(\epsilon) \approx D(\epsilon_{\mathrm{F}})$ führt dies auf

$$\Delta = 2\hbar\omega_{\mathrm{D}} \mathrm{e}^{-\frac{2}{D(\epsilon_{\mathrm{F}})\hat{V}}}. \tag{19.15}$$

Wir müssen jetzt betrachten, ob diese BCS-Lösung auf eine niedrigere Energie führt,

$$\langle H - \mu\mathcal{N} \rangle_{\mathrm{BCS}} - \langle H - \mu\mathcal{N} \rangle_{\mathrm{normal}} = \sum_k \big((\epsilon_k - \mu)(2v_k^2 - 2\theta(\mu - \epsilon_k)) - \Delta u_k v_k \big) \tag{19.16}$$

Die Summanden sind negativ, denn aus

$$2v_k^2 = 1 - \frac{\epsilon_k - \mu}{\sqrt{/\epsilon_k - \mu)^2 + \Delta^2}} \tag{19.17}$$

folgen die Summanden

$$\begin{aligned} \epsilon - \mu - \tfrac{(\epsilon-\mu)^2 + \Delta^2/2}{\sqrt{(\epsilon-\mu)^2+\Delta^2}} < 0 \quad \text{für} \quad \epsilon > \mu \\ \mu - \epsilon - \tfrac{(\epsilon-\mu)^2 + \Delta^2/2}{\sqrt{(\epsilon-\mu)^2+\Delta^2}} < 0 \quad \text{für} \quad \epsilon < \mu, \end{aligned} \tag{19.18}$$

da

$$|x| < \frac{x^2 + \Delta^2/2}{\sqrt{x^2 + \Delta^2}} \text{ wegen } x^2 < \frac{(x^2 + \Delta^2/2)^2}{x^2 + \Delta^2} = x^2 + \frac{\Delta^4/4}{x^2 + \Delta^2}. \tag{19.19}$$

Für $\Delta \ll \hbar\omega_{\mathrm{D}}$ folgt eine Energieabsenkung um $\Delta E = -D(\epsilon_{\mathrm{F}})\Delta^2/4$.

19.b Anregungen

Für das Vakuum gilt, dass die Anwendung des Vernichtungs-Operators 0 ergibt, $c_{\mathbf{k}s}|\mathrm{vak}\rangle = 0$. Ähnlich kann man für den BCS-Zustand einen Vernichtungs-Operator α bilden, so dass $\alpha|\psi_0\rangle = 0$. Es ist nämlich

$$(v_l c_l^\dagger + u_l c_{-l})|\psi_0\rangle = \prod_{k \neq l} (u_k + v_k c_k^\dagger c_{-k}^\dagger) \underbrace{(v_l c_l^\dagger + u_l c_{-l})(u_l + v_l c_l^\dagger c_{-l}^\dagger)|\mathrm{vak}\rangle}_{(u_l v_l c_l^\dagger - u_l v_l c_l^\dagger)|\mathrm{vak}\rangle = 0,} \tag{19.20}$$

ähnlich

$$(-v_l c_{-l}^\dagger + u_l c_l)|\psi_0\rangle = 0. \tag{19.21}$$

Man definiert daher die Operatoren

$$\alpha_{-k} = u_k c_{-k} + v_k c_k^\dagger \quad \to \quad \alpha_{-k}^\dagger = u_k c_{-k}^\dagger + v_k c_k, \tag{19.22}$$
$$\alpha_k = u_k c_k - v_k c_{-k}^\dagger \quad \to \quad \alpha_k^\dagger = u_k c_k^\dagger - v_k c_{-k}. \tag{19.23}$$

Man überprüft nun

$$[\alpha_k, \alpha_{k'}]_+ = [\alpha_k, \alpha_{-k'}]_+ = [\alpha_{-k}, \alpha_{-k}]_+ [\alpha_k^\dagger, \alpha_{k'}^\dagger]_+ = [\alpha_k^\dagger, \alpha_{-k'}^\dagger]_+ = [\alpha_{-k}^\dagger, \alpha_{-k}^\dagger]_+ = 0, \tag{19.24}$$
$$[\alpha_k, \alpha_{-k'}^\dagger]_+ = [\alpha_{-k}, \alpha_{k'}^\dagger]_+ = 0, \quad [\alpha_k, \alpha_{k'}^\dagger]_+ = [\alpha_{-k}, \alpha_{-k'}^\dagger]_+ = \delta_{k,k'} \tag{19.25}$$

Es gelten also für die Operatoren α die fermionischen Vertauschungs-Beziehungen. Wir können die Beziehungen nach den ursprünglichen Elektron-Operatoren auflösen,

$$c_k^\dagger = u_k \alpha_k^\dagger + v_k \alpha_{-k}, \quad \to \quad c_k = u_k \alpha_k + v_k \alpha_{-k}^\dagger, \tag{19.26}$$
$$c_{-k}^\dagger = u_k \alpha_{-k}^\dagger - v_k \alpha_k, \quad \to \quad c_{-k} = u_k \alpha_{-k} - v_k \alpha_k^\dagger. \tag{19.27}$$

Daraus ergibt sich dann für die Teilchenzahl-Operatoren und die Erzeuger und Vernichter von Paaren

$$c_k^\dagger c_k + c_{-k}^\dagger c_{-k} = (u_k^2 - v_k^2)(\alpha_k^\dagger \alpha_k + \alpha_{-k}^\dagger \alpha_{-k}) + 2u_k v_k (\alpha_k^\dagger \alpha_{-k}^\dagger + \alpha_{-k}\alpha_k) + 2v_k^2, \tag{19.28}$$
$$c_k^\dagger c_{-k}^\dagger = u_k^2 \alpha_k^\dagger \alpha_{-k}^\dagger - v_k^2 \alpha_{-k}\alpha_k + u_k v_k (1 - \alpha_k^\dagger \alpha_k - \alpha_{-k}^\dagger \alpha_{-k}), \tag{19.29}$$
$$c_{-l} c_l = u_l^2 \alpha_{-l}\alpha_l - v_l^2 \alpha_l^\dagger \alpha_{-l}^\dagger + u_l v_l (1 - \alpha_l^\dagger \alpha_l - \alpha_{-l}^\dagger \alpha_{-l}). \tag{19.30}$$

und damit für den Hamilton-Operator

$$\begin{aligned} H - \mu\mathcal{N} &= 2\sum_k (\epsilon_k - \mu) v_k^2 - \frac{V}{N}\sum_{k,l} u_k v_k u_l v_l \\ &+ \sum_k \left((\epsilon_k - \mu)(u_k^2 - v_k^2) + u_k v_k \frac{2V}{N}\sum_l u_l v_l \right) (\alpha_k^\dagger \alpha_k + \alpha_{-k}^\dagger \alpha_{-k}) \\ &+ \sum_k \left(\epsilon_k - \mu)2u_k v_k - (u_k^2 - v_k^2)\frac{V}{N}\sum_l u_l v_l \right) (\alpha_k^\dagger \alpha_{-k}^\dagger + \alpha_{-k}\alpha_k) \\ &+ O(\alpha^{\dagger 4} + \alpha^{\dagger 3}\alpha + \alpha^{\dagger 2}\alpha^2 + \alpha^\dagger \alpha^3 + \alpha^4). \end{aligned} \tag{19.31}$$

(Terme der Ordnung $O(1/N)\alpha^\dagger\alpha$, $O(1/N)\alpha^\dagger\alpha^\dagger$ und $O(1/N)\alpha\alpha$, die im thermodynamischen Limes vernachlässigbar sind, wurden weggelassen. Mit der Forderung $(\epsilon_k - \mu)2u_k v_k = \Delta(u_k^2 - v_k^2)$ reduziert sich der Hamilton-Operator auf

$$H - \mu\mathcal{N} = \sum_k \sqrt{\Delta^2 + (\epsilon_k - \mu)^2}(\alpha_k^\dagger \alpha_k + \alpha_{-k}^\dagger \alpha_{-k}) + 2\sum_k (\epsilon_k - \mu)v_k^2 - \frac{V}{N}\sum_{k,l} u_k v_k u_l v_l + O(\alpha^{\dagger m}\alpha^{4-m}), \tag{19.32}$$

die anomalen Terme $\alpha_k^\dagger \alpha_k + \alpha_{-k}^\dagger \alpha_{-k}$ fallen dann weg. Für den BCS-Zustand beträgt die Einteilchenanregungsenergie $\sqrt{\Delta^2 + (\epsilon_k - \mu)^2} \ge \Delta$, es gibt also ein Energielücke Δ für das Hinzufügen eines Elektrons. Ändert man die (mittlere) Elektronenzahl nicht, so benötigt man zwei Erzeuger $\alpha^\dagger$, so dass für derartige Anregungen (z.B. optische) eine Energielücke von 2Δ auftritt.

19.c Sprungtemperatur

Wir verwenden, dass das großkanonische Potential $G(\rho') = E - \mu N - TS$ für einen beliebigen statistischen Operator ρ' größer ist als $G(\rho)$ für die tatsächliche Gleichgewichtsverteilung $\rho \propto \mathrm{e}^{-\beta(H-\mu\mathcal{N})}$, d.h. man kann für ρ' ein Variationsverfahren durchführen, bei dem $G(\rho')$ minimiert wird, um eine Näherung für ρ zu finden. Dazu setzen wir

$$\rho' \propto \mathrm{e}^{-\beta\sum_k \hat{\epsilon}_k (\alpha_k^\dagger \alpha_k + \alpha_{-k}^\dagger \alpha_{-k})} \tag{19.33}$$

an und variieren $\hat{\epsilon}_k$ und ϕ_k, (19.7). Es folgt dann

$$\langle H - \mu\mathcal{N}\rangle = 2\sum_k(\epsilon_k-\mu)(u_k^2-v_k^2)f(\hat{\epsilon}_k) + 2\sum_k(\epsilon_k-\mu)v_k^2 - \frac{V}{N}\left(\sum_k u_k v_k(1-2f(\hat{\epsilon}_k))\right)^2. \qquad (19.34)$$

Wir definieren

$$\Delta = \frac{V}{N}\sum_k u_k v_k(1-2f(\hat{\epsilon}_k)). \qquad (19.35)$$

Dann erhalten wir, da die Entropie S nicht von den ϕ abhängt, sondern auf Grund der Darstellung (19.33) nur von den $\hat{\epsilon}$,

$$\frac{\partial G}{\partial \phi_k} = \frac{\partial\langle H-\mu\mathcal{N}\rangle}{\partial\phi_k} = 4(\epsilon_k-\mu)u_k v_k(1-2f(\hat{\epsilon}_k)) - 2\Delta(u_k^2-v_k^2)(1-2f(\hat{\epsilon}_k)) = 0. \qquad (19.36)$$

Daher gilt wie bisher Gleichung (19.10)

$$2(\epsilon_k-\mu)u_k v_k = \Delta(u_k^2-v_k^2). \qquad (19.37)$$

Weiter finden wir

$$\frac{\partial G}{\partial\hat{\epsilon}_k} = 2\left((\epsilon_k-\mu)(u_k^2-v_k^2)+2\Delta u_k v_k\right)\frac{\partial f(\hat{\epsilon}_k)}{\partial\hat{\epsilon}_k} - T\frac{\partial S}{\partial\hat{\epsilon}_k} = 0. \qquad (19.38)$$

Hätten wir es mit dem konventionellen Einteilchen-Problem zu tun, dann stünde in der großen Klammer $\epsilon_k-\mu$ und die Lösung wäre dann die exakte $\hat{\epsilon}_k = \epsilon_k-\mu$. Daher ist die große Klammer von (19.38) gleich $\hat{\epsilon}_k$,

$$\hat{\epsilon}_k = (\epsilon_k-\mu)(u_k^2-v_k^2)+2\Delta u_k v_k, \qquad (19.39)$$

woraus mit (19.37) wieder die Anregungsenergie

$$\hat{\epsilon}_k = \sqrt{\Delta^2+(\epsilon_k-\mu)^2} \qquad (19.40)$$

folgt. Lediglich der Ausdruck (19.35) für die Lücke Δ ist bei endlicher Temperatur von der bei Temperatur 0 verschieden. da $\hat{\epsilon}_k$ positiv ist, ist bei $T=0$ $f=0$. Bei endlicher Temperatur ergibt sich aber jetzt

$$\Delta = \frac{V\Delta}{2N}\sum_k \underbrace{\frac{1}{\hat{\epsilon}_k}\frac{1-\mathrm{e}^{-\beta\hat{\epsilon}_k}}{1+\mathrm{e}^{-\beta\hat{\epsilon}_k}}}. \qquad (19.41)$$

Die unterklammerte Funktion ist für positives $\hat{\epsilon}$ eine monoton fallende Funktion von $\hat{\epsilon}$. Daher gibt es eine nicht-triviale Lösung nur, falls

$$\frac{V}{2N}\sum_k\frac{1}{|\epsilon_k-\mu|}\frac{1-\mathrm{e}^{-\beta|\epsilon_k-\mu|}}{1+\mathrm{e}^{-\beta|\epsilon_k-\mu|}} = \frac{\hat{V}D(\mu)}{2}\int_0^{\hbar\omega_\mathrm{D}}\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\epsilon}\frac{1-\mathrm{e}^{-\beta\epsilon}}{1+\mathrm{e}^{-\beta\epsilon}} > 1. \qquad (19.42)$$

Daraus folgt, dass die Sprungtemperatur T_c, das heißt die Temperatur bei der die supraleitende Phase einsetzt, gegeben ist (mit $x=\beta\epsilon$) durch

$$\frac{\hat{V}D(\mu)}{2}\int_0^{T_\mathrm{D}/T_\mathrm{c}}\frac{\mathrm{d}x}{x}\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} = 1. \qquad (19.43)$$

Das x-Integral ergibt für großes $T_\mathrm{D}/T_\mathrm{c}$ ungefähr $0.13+\ln(T_\mathrm{D}/T_\mathrm{c})$. Daraus folgt dann

$$T_\mathrm{c} = 1.14T_\mathrm{D}\mathrm{e}^{-2/(\hat{V}D(\mu))} = 0.57\frac{\Delta(0)}{k_\mathrm{B}}. \qquad (19.44)$$

Wir bemerken noch, dass eine genauere Untersuchung der Gleichung (19.41) für Temperaturen etwas unterhalb T_c das Anwachsen der Lücke mit einem Wurzelgesetz ergibt

$$\Delta(T) \approx 3.06k_\mathrm{B}T_\mathrm{c}\sqrt{1-\frac{T}{T_\mathrm{c}}} \text{ für } T\tilde{<}T_\mathrm{c}. \qquad (19.45)$$

ergibt.

19.d Ergänzungen

Wir haben hier mittels der Näherung (19.1) für die Paar-Wechselwirkung demonstriert, wie es zu einem Zustand kommt, dessen Energie niedriger als die Hartree-Fock-Energie ist. Im Allgemeinen hat die Paarwechselwirkung keine solch einfache Form. Praktische Rechnungen werden mit realistischeren Paar-Wechselwirkungen durchgeführt. Dabei ist die Fröhlichsche Näherung wenig geeignet, obwohl sie in der Entwicklung der Theorie eine wesentliche Rolle gespielt hat. Tatsächlich kann man die Elektron-Phonon-Wechselwirkung besser eliminieren. Ein allgemein anerkanntes Verfahren ist das von Eliashberg, das auf eine retardierte Paar-Wechselwirkung führt. Mit den Flussgleichungen haben wir eine instantane Wechselwirkung erhalten. Andreas Mielke (Europhys. Lett. 40 (1997) 195) hat nach beiden Verfahren die Sprungtemperatur berechnet und gefunden, dass nur Unterschiede von wenigen Prozenten auftreten.

Schließlich kommen wir noch einmal auf die Normalordnung aus Abschnitt 16.b zurück. Dort hatten wir die Normalordnung mittels Erwartungswerten $\langle c^\dagger c\rangle$ und $\langle cc^\dagger\rangle$ eingeführt. Tatsächlich haben wir (für $T=0$) neben (vgl. (19.27-19.29)

$$\langle c_k^\dagger c_k\rangle = \langle c_{-k}^\dagger c_{-k}\rangle = v_k^2, \quad \langle c_k c_k^\dagger\rangle = \langle c_{-k}c_{-k}^\dagger\rangle = u_k^2 \tag{19.46}$$

auch anomale von 0 verschiedene Paar-Erwartungswerte

$$\langle c_k^\dagger c_{-k}^\dagger\rangle = -\langle c_{-k}^\dagger c_k^\dagger\rangle = u_k v_k, \quad \langle c_{-k}c_k\rangle = -\langle c_k c_{-k}\rangle = u_k v_k. \tag{19.47}$$

Damit erhält man zum Beispiel nicht nur

$$c_k^\dagger c_k =: c_k^\dagger c_k : + v_k^2, \quad c_{-k}^\dagger c_{-k} =: c_{-k}^\dagger c_{-k} : + v_k^2 \tag{19.48}$$

sondern auch

$$c_k^\dagger c_{-k}^\dagger =: c_k^\dagger c_{-k}^\dagger : + u_k v_k, \quad c_{-k}c_k =: c_{-k}c_k : + u_k v_k. \tag{19.49}$$

Für den Hamilton-Operator erhält man dann

$$\begin{aligned} H - \mu\mathcal{N} &= \; : \sum_k (\epsilon_k - \mu)(c_k^\dagger c_k + c_{-k}^\dagger c_{-k} + v_k^2) - \frac{V}{N}\sum_{k,k'}(c_k^\dagger c_{-k}^\dagger + u_k v_k)(c_{-k'}c_{k'} + u_{k'}v_{k'}) : \\ &= 2\sum_k(\epsilon_k-\mu)v_k^2 - \frac{V}{N}\left(\sum_k u_k v_k\right)^2 \\ &+ \sum_k \Big((\epsilon_k - \mu) : (c_k^\dagger c_k + c_{-k}^\dagger c_{-k}) : -\Delta : (c_k^\dagger c_{-k}^\dagger + c_{-k}c_k) :\Big) + : O(c^\dagger c^\dagger cc) : \end{aligned} \tag{19.50}$$

Die Terme $: O(c^\dagger c^\dagger cc) :$ werden jetzt vernachlässigt. Der konstante Term ist die Grundzustandsenergie. Unter Berücksichtigung von $\epsilon_k - \mu = (u_k^2 - v_k^2)\hat{\epsilon}_k$, $\Delta = 2u_k v_k \hat{\epsilon}_k$ mit $\hat{\epsilon}_k = \sqrt{((\epsilon_k-\mu)^2 + \Delta^2}$ erhält man für die Anteile mit $c^\dagger c$, $c^\dagger c^\dagger$ und cc

$$\sum_k \hat{\epsilon}_k(\alpha_k^\dagger \alpha_k + \alpha_{-k}^\dagger \alpha_{-k}) \tag{19.51}$$

wie in (19.32). Die Rekursions-Formeln (16.12 und 16.13) sind nun zu verallgemeinern zu

$$\begin{aligned} c_k^\dagger : A : &= \; : c_k^\dagger A : + \sum_l \langle c_k^\dagger c_l\rangle : [c_l^\dagger, A]_\pm : + \sum_l \langle c_k^\dagger c_l^\dagger\rangle : [c_l, A]_\pm :, & (19.52) \\ c_k : A : &= \; : c_k A : + \sum_l \langle c_k c_l^\dagger\rangle : [c_l, A]_\pm : + \sum_l \langle c_k c_l\rangle : [c_l^\dagger, A]_\pm : . & (19.53) \end{aligned}$$

Dabei sind zuerst die Kommutatoren auszuwerten, so dass aus Monomen von A, die vom Grade m in $c^\dagger$ und c sind, solche vom Grade $m-1$ werden.