20 Elektrodynamik des Supraleiters

20.a Dauerströme

Landau hat folgendes Argument für Dauerströme gegeben: Er betrachtet einen Kristall der Masse M, der sich mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ bewege. Ein Elektronengas bewege sich im Beobachtungssystem mit Geschwindigkeit 0. Reibung wird nun die Geschwindigkeit des Kristalls verringern und gleichzeitig das Elektronengas beschleunigen. Dies geschieht durch Erzeugung von Anregungen im Elektronengas. Anregungsenergie und Impuls seien E_k und $\mathbf{k}$. Dann muss gelten

$$\frac{M\mathbf{v}^2}{2} = \frac{M\mathbf{v}'^2}{2} + E_\mathbf{k}, \quad M\mathbf{v} = M\mathbf{v}' + \hbar\mathbf{k}, \tag{20.1}$$

wobei, $\mathbf{v}'$ die Geschwindigkeit nach der Anregung ist. Eliminiert man $\mathbf{v}'$, so bleibt

$$\hbar\mathbf{k}\cdot\mathbf{v} = \frac{\hbar^2 k^2}{2M} + E_\mathbf{k}. \tag{20.2}$$

Für eine makroskopische Masse kann der $1/M$-Term vernachlässigt werden. Der niedrigste Wert von $\mathbf{v}$, der diese Bedingung erfüllt, ist die kritsche Geschwindigkeit

$$v_\mathrm{c} = \text{ Minimum von } \frac{E_k}{\hbar k}. \tag{20.3}$$

Für den Supraleiter ist das etwa $\Delta/(\hbar k_\mathrm{F})$, da an der Fermikante die Anregungsenergie am geringsten ist.

20.b Meissner-Effekt und London-Gleichung

1935 wurde von F. und H. London phänomenologisch vorgeschlagen, dass in einem Supraleiter die Stromdichte durch

$$\mathbf{j} = -\frac{c}{4\pi\lambda_\mathrm{L}^2}\mathbf{A} \tag{20.4}$$

gegeben ist. Der Vorschlag erscheint zunächst ungewöhnlich, da man üblicherweise die Beziehung

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E} \tag{20.5}$$

mit der elektrischen Leitfähigkeit σ und der Feldstärke $\mathbf{E}$ hat. Ausgangspunkt dafür ist folgende Überlegung. Falls kein Bremsmechanismus vorhanden ist, erwartet man nach Newton

$$\mathrm{d}\mathbf{j}/\mathrm{d}t = \rho\dot{v} = n_\mathrm{s}e^2/m\mathbf{E} = -n_\mathrm{s}e^2/(mc)\dot{\mathbf{A}}, \tag{20.6}$$

wobei angenommen wird, dass man in einer Eichung arbeitet, in der das Potential $\Phi = 0$ ist. n_s ist dabei die Dichte der supraleitenden Ladungsträger. Integration nach der Zeit ergibt (20.4). Wir werden unten zeigen, dass diese Beziehung im supraleitenden Zustand besteht, wollen aber erst ihre Konsequenz betrachten. Hierbei ist auch zu beachten, dass London eine bestimmte Eichung vorausgesetzt haben, die insbesondere $\mathrm{div}\mathbf{A} = 0$ und das verschwinden der Normalkomponente von $\mathbf{A}$ an einer Oberfläche, durch die kein Strom tritt, forderte. Aus (20.4) folgt

$$\mathrm{rot}\mathbf{j} = -\frac{c}{4\pi\lambda_\mathrm{L}^2}\mathbf{B} \tag{20.7}$$

und mit der Maxwell-Gleichung

$$\mathrm{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \tag{20.8}$$

folgt

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\lambda_\mathrm{L}^2}\mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad \text{oder} \quad -\triangle\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\lambda_\mathrm{L}^2}\mathbf{B}(\mathbf{r}). \tag{20.9}$$

Daraus folgt, dass es im Supraleiter kein homogenes Magnetfeld gibt. Vielmehr fällt ein an der Oberfläche eines Supraleiters parallel anliegendes Magnetfeld im Inneren exponentiell ab, $\mathbf{B}(x) = \mathbf{B}(0)\mathrm{e}^{-x/\lambda_\mathrm{L}}$. Man bezeichnet λ_L als die Londonsche Eindringtiefe. Gleichzeitig bewirkt dieser exponentielle Abfall einen Strom an der Oberfläche, der das Magnetfeld abschirmt. Ein Supraleiter ist ein perfekter Diamagnet.

20.c Störungstheorie

Um die London-Gleichung mikroskopisch herzuleiten, müssen wir untersuchen, welchen Strom ein Vektor-Potential erzeugt. Dazu führen wir eine Störungstheorie in $\mathbf{A}$ durch und betrachten zunächst das generelle Schema der Störungstheorie. Sei

$$H(t) = H_0 + H'(t) \tag{20.10}$$

der Hamilton-Operator H_0 mit einer zeitabhängigen Störung $H'(t)$. Wir bestimmen nun die Veränderung der Dichtematrix ρ auf Grund dieser Störung in erster Ordnung in H'. Wir setzen an

$$\rho(t) = \rho_0 + \rho'(t). \tag{20.11}$$

Dabei beschreibe ρ_0 einen Gleichgewichtszustand zu H_0. Wir betrachten nun die von-Neumann-Gleichung

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\hbar\dot{\rho}(t) &= [H(t), \rho(t)], && (20.12)\\ \mathrm{i}\hbar\dot{\rho}'(t) &= [H_0, \rho'(t)] + [H'(t), \rho_0]. && (20.13) \end{aligned}$$

Beim Übergang von der ersten zur zweiten Zeile haben wir berücksichtigt, dass ρ_0 mit H_0 kommutiert, da ρ_0 ein Gleichgewichts-Ensemble zu H_0 beschreibt. Weiter haben wir den Kommutator $[H'(t), \rho'(t)]$ vernachlässigt, da er bereits von zweiter Ordnung in der Störung ist. Wir lösen nun (20.13). Dazu führen wir die Heisenberg-Operatoren ein (sie lösen die homogene Gleichung für ρ'.)

$$\hat{\rho}'(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0 t/\hbar}\rho'(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0 t/\hbar}, \quad \hat{H}'(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0 t/\hbar}H'(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0 t/\hbar}. \tag{20.14}$$

Mit diesen Operatoren reduziert sich Gleichung (20.13) auf

$$\mathrm{i}\hbar\dot{\hat{\rho}}'(t) = -[H_0, \hat{\rho}'] + \mathrm{i}\hbar\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0 t/\hbar}\dot{\rho}'(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0 t/\hbar} = [\hat{H}'(t), \rho_0] \tag{20.15}$$

mit der Lösung

$$\begin{aligned} \hat{\rho}'(t) &= -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t'[\hat{H}'(t'), \rho_0], && (20.16)\\ \rho'(t) &= -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0 t/\hbar}[\hat{H}'(t'), \rho_0]\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0 t/\hbar}. && (20.17) \end{aligned}$$

Für den Erwartungswert eines Operators C zur Zeit t ergibt das

$$\begin{aligned} \langle C\rangle(t) &= \langle C\rangle_0(t) - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t'\mathrm{tr}(C\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0 t/\hbar}[\hat{H}'(t'), \rho_0]\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0 t/\hbar}))\\ &= \langle C\rangle_0(t) - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t'\mathrm{tr}(\hat{C}(t)[\hat{H}'(t'), \rho_0])\\ &= \langle C\rangle_0(t) - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t'\langle[\hat{C}(t), \hat{H}'(t')]\rangle_0, && (20.18) \end{aligned}$$

wobei der Index $_0$ angibt, dass die Auswertung mit der Gleichgewichtsgesamtheit ρ_0 erfolgt.

20.d Herleitung der London-Gleichung

Wir wollen dies nun auf den Strom in einem Supraleiter anwenden. Wir gehen aus von einem zeitabhängigen Vektorpotential $\mathbf{A}$ und fragen nach dem daraus resultierenden Strom $\mathbf{j}$.

In (16.20) hatten wir für die Ladungsdichte die Darstellung

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{e}{V_{\mathrm{P}}}\sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}',s} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}} c^\dagger_{\mathbf{k}s}c_{\mathbf{k}'s} \tag{20.19}$$

gefunden, wobei wir jetzt die Ladung e mit berücksichtigt haben. Für die Stromdichte erhält man zunächst

$$\mathbf{j}_0(\mathbf{r}) = \frac{e\hbar}{mV_\mathrm{P}} \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}',s} \frac{\mathbf{k}+\mathbf{k}'}{2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}} c^\dagger_{\mathbf{k}s} c_{\mathbf{k}'s}. \tag{20.20}$$

Fügt man noch ein Vektorpotential hinzu, so erhält man den zusätzlichen Term

$$\mathbf{j}_\mathrm{A}(\mathbf{r}) = -\frac{e}{mc}\rho(\mathbf{r})\mathbf{A}(\mathbf{r}). \tag{20.21}$$

Wir wollen nun betrachten, was ein zeitabhängiges Vektorpotential zum Strom beiträgt. In erster Ordnung in $\mathbf{A}$ erhalten wir zunächst den Beitrag

$$\langle \mathbf{j}_\mathrm{A}(\mathbf{r})\rangle_\mathrm{A} = -\frac{e^2 n}{mc}\mathbf{A}(\mathbf{r}). \tag{20.22}$$

Ein weiterer Beitrag ergibt sich aus der ersten Ordnung Störungsrechnung. Wir setzen dazu $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$ an und finden die Störung

$$H' = -\frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3 r \mathbf{j}_0(\mathbf{r})\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{e\hbar}{mc}\sum_{\mathbf{k},s}(\mathbf{k}-\frac{\mathbf{q}}{2})\cdot\mathbf{A}_0 c^\dagger_{\mathbf{k}s} c_{\mathbf{k}-\mathbf{q}s}. \tag{20.23}$$

Damit erhalten wir für $\mathbf{j}_0$

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{j}_0(\mathbf{r})\rangle_\mathrm{A} &= \mathrm{i}\frac{e^2\hbar}{m^2 c V_\mathrm{P}} \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{k}'',s,s'} \frac{\mathbf{k}''+\mathbf{k}'}{2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}'-\mathbf{k}'')\cdot\mathbf{r}}((\mathbf{k}-\frac{\mathbf{q}}{2})\cdot\mathbf{A}_0) \\ &\times \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t' \langle [\hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}''s'}(t)\hat{c}_{\mathbf{k}'s'}(t), \hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}s}(t')\hat{c}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}s}(t')]\rangle_0, \end{aligned} \tag{20.24}$$

wobei angenommen wird, dass für $\mathbf{A}=0$ kein Strom fließt, also $\langle \mathbf{j}_0(\mathbf{r})\rangle_0 = 0$. Wegen der Translations-Invarianz erhält man nur Beiträge für $\mathbf{k}''+\mathbf{k} = \mathbf{k}'+\mathbf{k}-\mathbf{q}$. Das erlaubt $\mathbf{k}'' = \mathbf{k}'-\mathbf{q}$ zu setzen. Damit reduziert sich $\frac{\mathbf{k}''+\mathbf{k}'}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}'-\mathbf{k}'')\cdot\mathbf{r}} = (\mathbf{k}'-\frac{\mathbf{q}}{2})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$. Bei der Berechnung des Kommutators ist nun zu faktorisieren. Dabei gibt es zwei Möglichkeiten zu kontrahieren und zwar mit a) $\mathbf{k}'' = \mathbf{k}-\mathbf{q}$, $\mathbf{k}'=\mathbf{k}$, $s'=s$ und b) $\mathbf{k}''=-\mathbf{k}$, $\mathbf{k}'=\mathbf{q}-\mathbf{k}$, $s'=-s$. Damit bleibt dann

$$\langle \mathbf{j}_0(\mathbf{r})\rangle_\mathrm{A} = \mathrm{i}\frac{e^2\hbar}{m^2 c V_\mathrm{P}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \sum_{\mathbf{k},s}(\mathbf{k}-\frac{\mathbf{q}}{2})((\mathbf{k}-\frac{\mathbf{q}}{2})\cdot\mathbf{A}_0)\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t'(K_1+K_2), \tag{20.25}$$

$$\begin{aligned} K_1 &= \langle \hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q}s}(t)\hat{c}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}s}(t')\rangle_0 \, \langle \hat{c}_{\mathbf{k}s}(t)\hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}s}(t')\rangle_0 \\ &- \langle \hat{c}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}s}(t')\hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q}s}(t)\rangle_0 \, \langle \hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}s}(t')\hat{c}_{\mathbf{k}s}(t)\rangle_0, \end{aligned} \tag{20.26}$$

$$\begin{aligned} K_2 &= \langle \hat{c}^\dagger_{-\mathbf{k}-s}(t)\hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}s}(t')\rangle_0 \, \langle \hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}-s}(t)\hat{c}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}s}(t')\rangle_0 \\ &- \langle \hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}s}(t')\hat{c}^\dagger_{-\mathbf{k}-s}(t)\rangle_0 \, \langle \hat{c}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}s}(t')\hat{c}_{\mathbf{q}-\mathbf{k}-s}(t)\rangle_0. \end{aligned} \tag{20.27}$$

Zur weiteren Auswertung gehen wir auf die Operatoren α, (19.26,19.27) über und erhalten zum Beispiel

$$\langle \hat{c}_{\mathbf{k}\uparrow}(t)\hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}\uparrow}(t')\rangle_0 = \langle (u_k\hat{\alpha}_k(t) + v_k\hat{\alpha}^\dagger_{-k}(t))(u_k\hat{\alpha}^\dagger_k(t') + v_k\hat{\alpha}_{-k}(t'))\rangle_0. \tag{20.28}$$

Mit

$$\hat{\alpha}^\dagger_k(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{\epsilon}_k t/\hbar}\alpha^\dagger_k, \quad \hat{\alpha}_k(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{\epsilon}_k t/\hbar}\alpha_k, \quad \hat{\epsilon}_k = \sqrt{(\epsilon_k-\mu)^2+\Delta^2} \tag{20.29}$$

folgt dann

$$\langle \hat{c}_{\mathbf{k}s}(t)\hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}s}(t')\rangle_0 = u_k^2(1-f(\hat{\epsilon}_k))\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{\epsilon}_k(t'-t)/\hbar} + v_k^2 f(\hat{\epsilon}_k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{\epsilon}_k(t-t')/\hbar}. \tag{20.30}$$

Wir führen die Abkürzungen

$$u = u_\mathbf{k}, \quad u' = u_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}, \qquad v = v_\mathbf{k}, \quad v' = v_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}, \tag{20.31}$$

$$f = f(\hat{\epsilon}_\mathbf{k}), \quad f' = f(\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}), \qquad e_\pm = \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\hat{\epsilon}_\mathbf{k}(t'-t)/\hbar}, \quad e'_\pm = \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}(t'-t)/\hbar} \tag{20.32}$$

ein. Dann folgt

$$\begin{aligned} K_1 &= (u'^2 f' e'_- + v'^2(1-f')e'_+)(u^2(1-f)e_+ + v^2 f e_-) \\ &- (u'^2(1-f')e'_- + v'^2 f' e'_+)(u^2 f e_+ + v^2(1-f)e_-), \end{aligned} \tag{20.33}$$

$$\begin{aligned} K_2 &= uvu'v'(fe_- - (1-f)e_+)((1-f')e'_+ - f'e'_-) \\ &- uvu'v'((1-f)e_- - fe_+)(f'e'_+ - (1-f')e'_-), \end{aligned} \tag{20.34}$$

wobei beide Spineinstellungen das gleiche Ergebnis liefern. Geordnet nach den Faktoren e und e' erhält man

$$K_1+K_2 = (e_+e'_+uv'+e_-e'_-u'v)(uv'-u'v)(1-f-f')+(e_+e'_-uu'-e_-e'_+vv')(uu'+vv')(f'-f). \tag{20.35}$$

Berücksichtigt man das Zeitintegral $(w, w' = \pm 1)$

$$\mathrm{i}\int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t' e_w e'_{w'} = \mathrm{i}\int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t' \mathrm{e}^{\mathrm{i}w\hat{\epsilon}_k(t'-t)/\hbar + \mathrm{i}w'\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}(t-t')/\hbar} = \frac{\hbar}{w\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}} + w'\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}}, \tag{20.36}$$

wobei wir wieder angenommen haben, dass die Störung langsam eingeschaltet wird, so folgt schließlich

$$\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t'(K_1+K_2) = \frac{(u'v-uv')^2(1-f-f')}{\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}+\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}} + \frac{(uu'+vv')^2(f'-f)}{\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}-\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}} \tag{20.37}$$

Wir betrachten nun den Limes $q \to 0$. In diesem Limes wird $u' = u$, $v' = v$, so dass der erste Term verschwindet, da der Nenner mindestens gleich 2Δ ist. Beim zweiten Term ist $uu' + vv' = 1$ zu setzen und $\frac{f'-f}{\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}-\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}}$ wird durch die Ableitung $-\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\hat{\epsilon}}$ ersetzt.

$$\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t'(K_1+K_2) = -\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\hat{\epsilon}}. \tag{20.38}$$

Damit finden wir schließlich

$$\langle \mathbf{j}_0(\mathbf{r})\rangle_{\mathrm{A}} = \frac{e^2\hbar^2}{m^2 c V_{\mathrm{P}}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \sum_{\mathbf{k},s} \mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}_0)(-\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\hat{\epsilon}}). \tag{20.39}$$

Mitteln wir nun über alle Richtungen, dann wird $\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}_0)$ ersetzt durch $\mathbf{A}_0 k^2/3$, und wir erhalten

$$\langle \mathbf{j}_0(\mathbf{r})\rangle_{\mathrm{A}} = \mathbf{A}(\mathbf{r})\frac{e^2\hbar^2}{m^2 c}\frac{2}{(2\pi)^3}\frac{4\pi}{3}\int_0^\infty \mathrm{d}k k^4 \left(-\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\hat{\epsilon}_k}\right). \tag{20.40}$$

Damit finden wir

$$\langle \mathbf{j}(\mathbf{r})\rangle_A = \langle \mathbf{j}_{\mathrm{A}}(\mathbf{r}) + \mathbf{j}_0(\mathbf{r})\rangle = -\frac{e^2}{mc}\mathbf{A}(\mathbf{r}) n_{\mathrm{s}} \tag{20.41}$$

mit

$$n_{\mathrm{s}} = n - \frac{\hbar^2}{m}\frac{2}{(2\pi)^3}\frac{4\pi}{3}\int \mathrm{d}k k^4 \left(-\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\hat{\epsilon}_k}\right), \tag{20.42}$$

wobei man n_{s} als die supraleitende Dichte bezeichnet. Im supraleitenden Zustand trägt der zweite Term bei der Temperatur 0 nicht bei, da f für alle k-Werte gleich 0 ist. Im normalleitenden Zustand setzt man $|\epsilon - \mu|$ für $\hat{\epsilon}$ ein oder, da die Ableitung von f symmetrisch im Argument $\epsilon - \mu$ ist, auch einfach $\epsilon - \mu$. Dann findet man mit $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\epsilon} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}k}\frac{m}{\hbar^2 k}$

$$n_{\mathrm{s}} = n - \frac{2}{(2\pi)^3}\frac{4\pi}{3}k_{\mathrm{F}}^3 = n - n = 0. \tag{20.43}$$

Im normalleitenden Zustand heben sich also die Beiträge weg. Tatsächlich fällt n_{s} von der Temperatur 0 bis zur Sprungtemperatur T_{c} monoton auf 0 ab. Die Londonsche Eindringtiefe ergibt sich dann zu

$$\lambda_{\mathrm{L}} = \frac{c}{e}\sqrt{\frac{m}{4\pi n_{\mathrm{s}}}}. \tag{20.44}$$