24 Landau-Theorie

Beiträge vom Typ V_{H} und auch V_{F} wurden von Landau in der Fermiflüssigkeits-Theorie eingeführt. Man spricht auch von der Landautheorie.

Landau nahm an, dass man bei tiefen Temperaturen langlebige elektronische Anregungen nahe der Fermikante hat und führte den Ausdruck

$$E = E_0 + \sum_{\mathbf{k},s} \epsilon^0_{\mathbf{k}} \delta n_{\mathbf{k}s} + \frac{1}{2V_{\mathrm{P}}} \sum_{\mathbf{k}s,\mathbf{k}'s'} f(\mathbf{k}s,\mathbf{k}'s') \delta n_{\mathbf{k}s} \delta n_{\mathbf{k}'s'} \tag{24.1}$$

für die Energie des Systems ein. Dabei sind die $\delta n_{\mathbf{k}s}$ die Anzahl von Elektronen, die man dem Grundzustand oberhalb der Fermikante hinzufügt oder unterhalb der Fermikante wegnimmt (dies sind Quasiteilchen, das heisst sie können zum Beispiel Elektronen sein, die ihre Umgebung polarisiert haben. Sie enthalten also Abschirmungs- und ähnliche Effekte). Man erkennt, dass $\epsilon^0_{\mathbf{k}}$ die Einteilchenenergie ist, die man aufbringen muss, um dem Grundzustand ein Elektron hinzuzufügen oder die man erhält, wenn man ihm ein Teilchen entnimmt. Ist der Zustand bereits angeregt, dann ändert sich die Energie um

$$\epsilon_{\mathbf{k}s} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\delta n_{\mathbf{k}s}} = \epsilon^0_{\mathbf{k}} + \frac{1}{V_{\mathrm{P}}} \sum_{\mathbf{k}'s'} f(\mathbf{k}s,\mathbf{k}'s') \delta n_{\mathbf{k}'s'}. \tag{24.2}$$

Die Koeffizienten f geben die Wechselwirkung zwischen den Elektronen wieder.

Die Beiträge von V_{H} und V_{F} in (23.24,23.25) lauten

$$\frac{1}{2V_{\mathrm{P}}} \sum_{\mathbf{k},s,\mathbf{k}',s'} V_{\mathrm{H}}(\mathbf{k},\mathbf{k}') : c^\dagger_{\mathbf{k}s} c_{\mathbf{k}s} c^\dagger_{\mathbf{k}'s'} c_{\mathbf{k}'s'} := \frac{1}{2V_{\mathrm{P}}} \sum_{\mathbf{k},s,\mathbf{k}',s'} V_{\mathrm{H}}(\mathbf{k},\mathbf{k}') \delta n_{\mathbf{k}s} \delta n_{\mathbf{k}'s'} \tag{24.3}$$

und

$$\frac{1}{2V_{\mathrm{P}}} \sum_{\mathbf{k},s,\mathbf{k}',s'} V_{\mathrm{F}}(\mathbf{k},\mathbf{k}') : c^\dagger_{\mathbf{k}s} c_{\mathbf{k}'s} c^\dagger_{\mathbf{k}'s'} c_{\mathbf{k}s'} : \tag{24.4}$$

Hieraus nehmen wir die Beiträge mit $s = s'$. Die anderen kann man prinzipiell auch mitnehmen. Sie beschreiben die transversalen Fluktuationen im Spin. Wir wollen diese in diesem Abschnitt nicht berücksichtigen. Dann erhalten wir

$$-\frac{1}{2V_{\mathrm{P}}} \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}',s} V_{\mathrm{F}}(\mathbf{k},\mathbf{k}') \delta n_{\mathbf{k}s} \delta n_{\mathbf{k}'s}. \tag{24.5}$$

Aus beiden Beiträgen erhalten wir

$$f(\mathbf{k}s,\mathbf{k}'s') = V_{\mathrm{H}}(\mathbf{k},\mathbf{k}') - \frac{1+ss'}{2} V_{\mathrm{F}}(\mathbf{k},\mathbf{k}'). \tag{24.6}$$

Vielfach wird die Theorie für isotrope Systeme angewendet. Dann hängt natürlich ϵ nur vom Betrag von $\mathbf{k}$ ab. In der Umgebung der Fermikante gilt dann

$$\epsilon^0_k = \mu + \hbar v_{\mathrm{F}}(k - k_{\mathrm{F}}) \tag{24.7}$$

mit der Fermigeschwindigkeit v_{F}. Weiterhin erweist sich normalerweise nur die Besetzung nahe der Fermikante als wesentlich. Dann kann man in f die Abhängigkeit vom Betrag von $\mathbf{k}$ und $\mathbf{k}'$ vernachlässigen und muss lediglich die Richtung dieser Vektoren berücksichtigen. Auf Grund der Isotropie geht dann nur der Winkel zwischen $\mathbf{k}$ und $\mathbf{k}'$ in f ein, so dass man nur die Abhängigkeit von $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$ und $\mathbf{n}' = \mathbf{k}'/k'$ berücksichtigen muss, so dass f nur eine Funktion von $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'$ ist. Weiterhin setzen wir voraus, dass keine Spinrichtung ausgezeichnet ist, also Invarianz gegen die Transformation $s \to -s$. $s' \to -s'$ besteht. Dann lässt sich f in der Form

$$f(\mathbf{k}s,\mathbf{k}'s') = f(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') + ss' g(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') \tag{24.8}$$

schreiben.

Wir wollen jetzt betrachten, wie das System auf eine äussere Störung beschrieben durch $-\sum_{\mathbf{k},s} h_s(\mathbf{k})\delta n_{\mathbf{k}s}$ reagiert. Wir erwarten, dass sich dann die Besetzung verändert. Im allgemeinen werden dann die Zustände bis $k_{\rm F}(\mathbf{n}) = k_{\rm F0} + \delta k_s(\mathbf{n})$ besetzt sein. Wir finden dann insgesamt

$$\epsilon_{\mathbf{k}s} = \epsilon^0(\mathbf{k}) - h_s(\mathbf{k}) + \frac{1}{V_{\rm P}} \sum_{\mathbf{k}'s'} f(\mathbf{k}s, \mathbf{k}s')\delta n_{\mathbf{k}'s'} \tag{24.9}$$

Die letzte Summe formen wir um zum Integral

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int {\rm d}\Omega_{n'} \int_{k_{\rm F0}}^{k_{\rm F0}+\delta k_s(\mathbf{n}')} {\rm d}k' k'^2 f(\mathbf{k}s, \mathbf{k}'s') = \frac{k_{\rm F}^2}{(2\pi)^3} \int {\rm d}\Omega_{n'} f(\mathbf{k}s, \mathbf{k}'s')\delta k_{s'}(\mathbf{n}') \tag{24.10}$$

An der Fermikante gilt dann

$$\mu = \epsilon_{k_{\rm F}(\mathbf{n}),s}, \tag{24.11}$$

also

$$0 = \hbar v_{\rm F} \delta k_s(\mathbf{n}) - h_s(\mathbf{k}) + \frac{k_{\rm F}^2}{(2\pi)^3} \sum_{s'} \int {\rm d}\Omega_{n'} f(\mathbf{k}s, \mathbf{k}'s')\delta k_{s'}(\mathbf{n}'). \tag{24.12}$$

Nachdem f nur von dem Winkel zwischen $\mathbf{n}$ und $\mathbf{n}'$ abhängt, entwickeln wir in Legendre-Polynome

$$f(\mathbf{k}s, \mathbf{k}'s') = \sum_l (f_l + g_l ss') P_l(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}') = \sum_l (f_l + g_l ss') \frac{4\pi}{2l+1} \sum_m Y_{lm}(\mathbf{n}) Y_{lm}^*(\mathbf{n}'). \tag{24.13}$$

Ebenso entwickeln wir die Störung h und die Veränderung der Fermifläche nach Kugelflächenfunktionen

$$h_s(\mathbf{n}) = \sum_{lm} h_{slm} Y_{lm}(\mathbf{n}), \quad \delta k_{{\rm F}s}(\mathbf{n}) = \sum_{lm} \delta k_{slm} Y_{lm}(\mathbf{n}) \tag{24.14}$$

und erhalten

$$0 = \hbar v_{\rm F} \delta k_{slm} - h_{slm} + \frac{k_{\rm F}^2}{2\pi^2} \sum_{s'} \frac{f_l + ss' g_l}{2l+1} \delta k_{s'lm} \tag{24.15}$$

mit den Lösungen

$$\begin{aligned} \delta k_{\uparrow lm} + \delta k_{\downarrow lm} &= \frac{h_{\uparrow lm} + h_{\downarrow lm}}{\hbar v_{\rm F} + \frac{k_{\rm F}^2}{(2l+1)\pi^2} f_l} = \frac{h_{\uparrow lm} + h_{\downarrow lm}}{\hbar v_{\rm F}(1 + \frac{D_{\rm F}}{2l+1} f_l)}, \\ \delta k_{\uparrow lm} - \delta k_{\downarrow lm} &= \frac{h_{\uparrow lm} - h_{\downarrow lm}}{\hbar v_{\rm F} + \frac{k_{\rm F}^2}{(2l+1)\pi^2} g_l} = \frac{h_{\uparrow lm} - h_{\downarrow lm}}{\hbar v_{\rm F}(1 + \frac{D_{\rm F}}{2l+1} g_l)}. \end{aligned} \tag{24.16}$$

Hierbei haben wir verwendet, dass aus $N = V_{\rm P} k_{\rm F}^3/(3\pi^2)$ unter Verwendung von ${\rm d}N = V_{\rm P} D {\rm d}\epsilon$ und ${\rm d}\epsilon = \hbar v_{\rm F} {\rm d}k_{\rm F}$ die Beziehung $D_{\rm F} \hbar v_{\rm F} = k_{\rm F}^2/\pi^2$ mit der Zustandsdichte $D_{\rm F}$ an der Fermikante folgt.

24.a Kompressibilität

Die Kompressibilität lässt sich ausdrücken

$$\kappa = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial P} = \frac{1}{V_{\rm P}}\frac{\partial N}{\partial \mu} \tag{24.17}$$

Wir wollen daher ${\rm d}N/{\rm d}\mu$ bestimmen und führen die Störung $h_s = \delta\mu$ ein. Dann folgt

$$h_{s00} = \sqrt{4\pi}\delta\mu, \quad \delta k_{s00} = \frac{\sqrt{4\pi}\delta\mu}{\hbar v_{\rm F}(1 + D_{\rm F} f_0)}, \quad \delta k(\mathbf{n}) = \frac{\delta\mu}{\hbar v_{\rm F}(1 + D_{\rm F} f_0)}. \tag{24.18}$$

Damit ergibt sich

$$\frac{\partial N}{\partial \mu} = \frac{3N}{\hbar k_{\rm F} v_{\rm F}(1 + D_{\rm F} f_0)} = \frac{V_{\rm P} D_{\rm F}}{1 + D_{\rm F} f_0}. \tag{24.19}$$

24.b Suszeptibilität

Ähnlich wie die Kompressibilität können wir auch die magnetische Suszeptibilität aus der Magnetisierung $M = \mu_{\rm B}(N_\uparrow - N_\downarrow)/V_{\rm P}$ und der Störung $h_s = \mu_{\rm B} sB$ berechnen. Man findet

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial B} = \frac{\mu_{\rm B}^2 D_{\rm F}}{1 + D_{\rm F} g_0}. \tag{24.20}$$

24.c Galilei-Invarianz

Ersetzen wir im Hamilton-Operator die Impuls-Operatoren $\mathbf{p}_i$ durch $\mathbf{p}_i - m\mathbf{v}$, so bewegt sich der Grundzustand mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$. Man erhält ihn, wenn man die Wellenvektoren $\mathbf{k}$ durch $\mathbf{k} - m\mathbf{v}/\hbar$ ersetzt. Die Fermifläche wird dann durch

$$\delta k(\mathbf{n}) = m\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}/\hbar = m \sum_m v_m Y_{1m}/\hbar \tag{24.21}$$

beschrieben, während der Hamilton-Operator in erster Ordnung in $\mathbf{v}$ den zusätzlichen Beitrag

$$h_s(\mathbf{k}) = \hbar\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} = \sum_m v_m \hbar k_{\rm F} Y_{1m} \tag{24.22}$$

erhält. Daraus folgt dann

$$v_{\rm F} = \frac{\hbar k_{\rm F}}{m} - \frac{k_{\rm F}^2}{3\pi^2\hbar} f_1. \tag{24.23}$$

Die Fermigeschwindigkeit ist also direkt mit dem Landau-Parameter f_1 verknüpft. Diese Überlegungen gelten nur für Flüssigkeiten ohne Substrat. Das Elektronengas hat zum Beispiel das Gitter als Substrat, daher gilt für dieses allein die Galilei-Invarianz nicht.

24.d Instabilitäten

Wir betrachten jetzt generell Instabilitäten des Systems gegen Deformationen der Fermikante. Wir setzen daher

$$\delta k_{{\rm F}s}(\mathbf{n}) = \sum_{lm} (\delta k_{lm}^0 + s\delta k_{lm}^1) Y_{lm}(\mathbf{n}) \tag{24.24}$$

und erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{1}{V_{\rm P}}(E - \mu N) &= \frac{1}{V_{\rm P}}(E_0 - \mu N_0) + \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_s \int {\rm d}\Omega_n \int_{k_{F_0}}^{k_{F_0}+\delta k_s(\mathbf{n})} {\rm d}k k^2 (\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu) \\
&+ \frac{1}{(2\pi)^6} \sum_{s,s'} \int {\rm d}\Omega_n {\rm d}\Omega_{n'} \int {\rm d}k{\rm d}k' f(\mathbf{k}s, \mathbf{k}'s') \\
&= \frac{1}{V_{\rm P}}(E_0 - \mu N_0) + \frac{\hbar k_{\rm F}^2 v_{\rm F}}{(2\pi)^3} \sum_{lm} \left(|\delta k_{lm}^0|^2 (1 + \frac{D_{\rm F} f_l}{2l+1}) + |\delta k_{lm}^1|^2 (1 + \frac{D_{\rm F} g_l}{2l+1}) \right).
\end{aligned} \tag{24.25}$$

Eine Stabilität ist also nur vorhanden, wenn alle Koeffizienten $1 + Df_l/(2l+1)$ und $1 + Dg_l/(2l+1)$ positiv sind. Man erkennt, dass dann auch die Kompressibilität und die Suszeptibilität positiv sind. Für $1 + Df_1/3$ erhält man aus der Galilei-Invarianz $\hbar k_{\rm F}/(mv_{\rm F})$. Man zeige, dass dies die kinetische Energie pro Volumen, $Nmv^2/2V_{\rm p}$ ist. Sind die $1 + Df_l/(2l+1)$ und $1 + Dg_l/(2l+1)$ nicht positiv, dann geht der rotations-invariante Zustand verloren. Die Symmetrie des Systems wird dann spontan gebrochen. Man spricht von einer Pomeranchuk-Instabilität.