29 Renormierungs-Gruppe mit scharfem Abschneide-Impuls

29.a Ursprung der Renormierung

Das Problem der Renormierung trat zunächst in der Elementarteilchenphysik auf. Es besteht darin, dass bei der störungstheoretischen Berechnung von Größen Integrale auftreten, die divergieren, und zwar um so mehr, je höher die Ordnung der Entwicklung ist. Was tun? Die Integrale divergieren meist bei großen Wellenvektoren. Führt man einen maximalen Wellenvektor ein, bis zu dem man integriert, so bleiben die Integrale endlich. Man weiß aber nicht, welchen maximalen Wellenvektor Λ man verwenden soll. Man verglich daher die Ergebnisse für verschiedene große Λ und fand, dass man bei geeignetem Umskalen verschiedener Größen und geeignetem Verändern von Kopplungen einen Limes $\Lambda \to \infty$ definieren kann, der endliche Ergebnisse für Größen von festen Wellenvektoren ergibt. Das Verfahren, das einem den Zusammenhang der Kopplungen und Skalen mit der Änderung des Abschneide-Impulses Λ ergibt, nennt man Renormierungsgruppe.

In der Festkörperphysik hat man dieses Problem in der Regel nicht. Man geht zum Beispiel von einem periodischen Gitter aus. Dann sind die Integrationen nur innerhalb der Brillouinzone auszuführen. Man hat einen natürlichen Abschneide-Impuls Λ. Trotzdem ist auch hier die Renormierungsgruppe bei den kritischen Phänomenen eingezogen. Da wir hier die Längenskala ändern müssen, sind wir (zumindest bei einem scharfen Abschneiden) gezwungen, die Freiheitsgrade, die nach dem Umskalen Wellenvektoren größer Λ haben, auszuintegrieren und zu verfolgen, wie sich dadurch die effektive Wechselwirkung bei kleinen Wellenvektoren verändert.

29.b Renormierung der Landau-Wechselwirkung

Wir wollen nun eine explizite Rechnung mit der Renormierungs-Gruppe durchführen. Wir gehen aus von einer Wechselwirkung der Form vom Landau-Typ (26.2)

$$H = \int \mathrm{d}^d r \left(\frac{1}{2} (\nabla \mathbf{S}(\mathbf{r}))^2 + \frac{a_1}{2} \mathbf{S}(\mathbf{r})^2 - \mathbf{h}\mathbf{S}(\mathbf{r}) + \frac{a_2}{4} (\mathbf{S}(\mathbf{r})^2)^2 \right). \tag{29.1}$$

Diese Wechselwirkung haben wir gleich für das isotrope n-Vektormodell hingeschrieben. Das Feld unseres Ordnungsparameters hat also n Komponenten und die Wechselwirkung ist isotrop (bis auf den Term $\mathbf{hS}$, der für $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ eine Richtung auszeichnet.

Wir führen zunächst die Skalentransformationen durch. Dies ergibt mit $\eta = 0$

$$H' = \int \mathrm{d}^d r' \left(\frac{1}{2} (\nabla' \mathbf{S}'(\mathbf{r}'))^2 + \frac{a_1}{2} b^2 \mathbf{S}'(\mathbf{r}')^2 - \mathbf{h} b^{d/2+1} \mathbf{S}'(\mathbf{r}') + \frac{a_2}{4} b^{4-d} (\mathbf{S}'(\mathbf{r}')^2)^2 \right), \tag{29.2}$$

wobei wir $\mathbf{r}' = b\mathbf{r}$, $\mathbf{S}(\mathbf{r}) = b^{1-d/2} \mathbf{S}'(\mathbf{r}')$ substituiert haben. Wir lassen im Folgenden die Striche $'$ weg. Wir drücken die Wechselwirkung nun durch die Fourier-Komponenten

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V_\mathrm{P}}} \sum_{\mathbf{q}} \mathbf{S}_{\mathbf{q}} \tag{29.3}$$

aus und erhalten

$$H' = \sum_{\mathbf{q}} \frac{q^2 + a_1 b^2}{2} \mathbf{S}_{\mathbf{q}} \mathbf{S}_{-\mathbf{q}} - \sqrt{V_\mathrm{P}} \mathbf{h} b^{d/2+1} \mathbf{S}_{\mathbf{0}} + \frac{a_2 b^{4-d}}{4 V_\mathrm{P}} \sum (\mathbf{S}_{\mathbf{q}_1} \mathbf{S}_{\mathbf{q}_2})(\mathbf{S}_{\mathbf{q}_3} \mathbf{S}_{-\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3}). \tag{29.4}$$

Wir gehen davon aus, dass die ursprüngliche Wechselwirkung H Fourier-Komponenten bis Λ enthielt. Auf Grund der Skalentransformation enthält die Wechselwirkung H' Fourier-Komponenten bis Λb. Wir müssen daher die Fourier-Komponenten zwischen Λ und Λb eliminieren. Wir müssen daher

$$\mathrm{e}^{-H_l} = \prod_{|\mathbf{q}|>\Lambda,\alpha} \left(\int \mathrm{d}S_{\mathbf{q}\alpha} \right) \mathrm{e}^{-H'} \tag{29.5}$$

ausintegrieren. Dabei numeriert der Index α die n Komponenten von $\mathbf{S}$. Wir werten dieses Integral aus, indem wir uns fragen: Wie ändern sich die Koeffizienten a_1 und a_2 vor $\mathbf{S}_\mathbf{0}^2$ und $(\mathbf{S}_\mathbf{0}^2)^2$? Diese Beiträge rühren her von

$$\Delta H' = \frac{1}{2}\sum_{|\mathbf{q}|>\Lambda}(q^2+b^2a_1)\mathbf{S}_\mathbf{q}\mathbf{S}_{-\mathbf{q}} + \frac{a_2 b^{4-d}}{2V_\mathrm{P}}\sum_{|\mathbf{q}|>\Lambda}(\mathbf{S}_\mathbf{q}\mathbf{S}_{-\mathbf{q}})(\mathbf{S}_\mathbf{0}^2) + \frac{a_2 b^{4-d}}{V_\mathrm{P}}\sum_{|\mathbf{q}|>\Lambda}(\mathbf{S}_\mathbf{q}\mathbf{S}_\mathbf{0})(\mathbf{S}_{-\mathbf{q}}\mathbf{S}_\mathbf{0}). \quad (29.6)$$

Mit der Wahl $b = \mathrm{e}^l$, l infinitesimal, sind alle anderen Beiträge vernachlässigbar. Wir schreiben diese Wechselwirkung in der Form

$$\Delta H' = \frac{1}{2}\sum_{|\mathbf{q}|>\Lambda}(q^2+b^2a_1)S_{\mathbf{q}\alpha}S_{-\mathbf{q}\beta}(\delta_{\alpha,\beta}+f_{\alpha,\beta}), \quad (29.7)$$

wobei

$$f_{\alpha\beta} = c'(\delta_{\alpha,\beta}\mathbf{S}_\mathbf{0}^2 + 2S_{\mathbf{0}\alpha}S_{\mathbf{0}\beta}), \quad c' = \frac{a_2 b^{4-d}}{V_\mathrm{P}(q^2+b^2a_1)}. \quad (29.8)$$

Nun ist

$$\int \mathrm{d}S_{\mathbf{q},1}\mathrm{d}S_{\mathbf{q},2}...\mathrm{d}S_{\mathbf{q},n}\mathrm{d}S_{-\mathbf{q},1}\mathrm{d}S_{-\mathbf{q},2}...\mathrm{d}S_{-\mathbf{q},n}\exp(-\sum_{\alpha\beta}(q^2+b^2a_1)S_{\mathbf{q}\alpha}S_{-\mathbf{q}\beta})(\delta_{\alpha,\beta}+f_{\alpha,\beta})$$
$$= \frac{\mathrm{const}}{(q^2+b^2a_1)^n\det(1+f)}, \quad (29.9)$$

was

$$\prod_{|\mathbf{q}|>\Lambda,\alpha}\left(\int \mathrm{d}S_{\mathbf{q}\alpha}\right)\exp(-\Delta H') = \mathrm{const}\exp(-\frac{1}{2}\sum_{|\mathbf{q}|>\Lambda}\ln\det(1+f)) \quad (29.10)$$

ergibt. Wir entwickeln nun nach Potenzen von f

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{|\mathbf{q}|>\Lambda}\ln\det(1+f) &= \frac{1}{2}\sum_{|\mathbf{q}|>\Lambda}\ln(1+\sum_\alpha f_{\alpha\alpha}+\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}(f_{\alpha\alpha}f_{\beta\beta}-f_{\alpha\beta}f_{\beta\alpha})+...)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{|\mathbf{q}|>\Lambda}(\sum_\alpha f_{\alpha\alpha}-\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}f_{\alpha\beta}f_{\beta\alpha}+...)\end{aligned} \quad (29.11)$$

Für infinitesimales l ergibt die Summe

$$\sum_{|\mathbf{q}|>\Lambda}g(q) = V_\mathrm{P}lcg(\Lambda), \quad (29.12)$$

wobei c eine Konstante ist und sich c' auf

$$c' = \frac{a_2}{V_\mathrm{P}(a_1+\Lambda^2)} \quad (29.13)$$

reduziert. Damit haben wir dann

$$\sum_\alpha f_{\alpha\alpha} = (n+2)\frac{a_2}{V_\mathrm{P}(a_1+\Lambda^2)}\mathbf{S}_\mathbf{0}^2, \quad (29.14)$$

$$\sum_{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}f_{\beta\alpha} = (n+8)\frac{a_2^2}{V_\mathrm{P}^2(a_1+\Lambda^2)^2}(\mathbf{S}_\mathbf{0}^2)^2 \quad (29.15)$$

und damit schließlich den Beitrag der Eliminations-Prozedur

$$\frac{1}{2}\sum_{|\mathbf{q}|>\Lambda}\ln\det(1+f) = \frac{1}{2}(n+2)\frac{lca_2}{a_1+\Lambda^2}\mathbf{S}_\mathbf{0}^2 - \frac{1}{4}(n+8)\frac{lca_2^2}{V_\mathrm{P}(a_1+\Lambda^2)^2}(\mathbf{S}_\mathbf{0}^2)^2. \quad (29.16)$$

Berücksichtigen wir die Änderung von a_1, a_2 und h nach (29.4) und (29.16), so erhalten wir die Differentialgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}l} = 2a_1 + \frac{a_2 c(n+2)}{a_1+\Lambda^2}, \tag{29.17}$$

$$\frac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}l} = (4-d)a_2 - \frac{a_2^2 c(n+8)}{(a_1+\Lambda^2)^2}, \tag{29.18}$$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}l} = (\frac{d}{2}+1)h. \tag{29.19}$$

29.c ϵ-Entwicklung

Für den Fixpunkt muss nun gelten

$$\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}l} = \frac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}l} = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}l} = 0. \tag{29.20}$$

Da die soeben durchgeführte Rechnung exakt ist für $a_2 = 0$, erwarten wir, dass sie eine gute Näherung für kleine a_2 darstellt. Auf Grund der Landau-Theorie erwarten wir, dass a_1 im kritischen Gebiet klein ist. Wir entwickeln daher die Gleichungen bis zur quadratischen Ordnung in den as,

$$\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}l} = 2a_1 + \frac{c}{\Lambda^2}(n+2)a_2 - \frac{c}{\Lambda^4}(n+2)a_1 a_2, \tag{29.21}$$

$$\frac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}l} = \epsilon a_2 - \frac{c}{\Lambda^4}(n+8)a_2^2, \tag{29.22}$$

wobei wir die Abkürzung

$$\epsilon = 4-d \tag{29.23}$$

eingeführt haben.

Wir finden dann

a) den trivialen Fixpunkt mit

$$a_1^* = 0, \quad a_2^* = 0, \quad , h^* = 0, \tag{29.24}$$

b) den nicht-trivialen Fixpunkt

$$a_1^* = -\frac{\epsilon(n+2)\Lambda^2}{2(n+8)}, \quad a_2^* = \frac{\epsilon\Lambda^4}{c(n+8)}, \quad h^* = 0. \tag{29.25}$$

Diese Größen sind also für kleines ϵ tatsächlich klein. Linearisieren wir jetzt die Gleichungen um den Fixpunkt, so finden wir

$$\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}l} = (2 - \frac{c}{\Lambda^4}(n+2)a_2^*)(a_1-a_1^*) + ...(a_2-a_2^*), \tag{29.26}$$

$$\frac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}l} = (\epsilon - \frac{2c}{\Lambda^4}(n+2)a_2^*)(a_2-a_2^*). \tag{29.27}$$

Daraus ergeben sich dann die Skalenexponenten für den trivialen Fixpunkt

$$y_E = 2, \quad y_2 = \epsilon, \quad y_h = 3 - \frac{\epsilon}{2} \tag{29.28}$$

und für den nicht-trivialen Fixpunkt zu

$$y_E = 2 - \frac{n+2}{n+8}\epsilon, \quad y_2 = -\epsilon, \quad y_h = 3 - \frac{\epsilon}{2}. \tag{29.29}$$

Für $d < 4$ hat der nicht-triviale Fixpunkt einen, der triviale Fixpunkt zwei relevante symmetrie-erhaltende Operatoren. Daher erwartet man für $d < 4$, dass der nicht-triviale Fixpunkt das Verhalten in der Umgebung eines normalen kritischen Punktes beschreibt. Der triviale Fixpunkt beschreibt das trikritische Verhalten in drei Dimensionen.

$$\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{4}, \gamma = 1. \tag{29.30}$$

Wir hatten anfangs $\eta = 0$ gesetzt. Natürlich ist diese Größe zunächst unbestimmt. Zu bestimmen ist sie aus dem Vorfaktor von $(\nabla \mathbf{S}(\mathbf{r}))^2$. In der Tat ist dieser Term der Hamilton-Funktion der einzige, der nicht klein ist. Er muss erhalten bleiben. Es stellt sich heraus, ohne dass wir das näher untersucht haben, dass η in erster Ordnung in ϵ gleich Null bleibt.

Es sei erwähnt, dass man bei der obigen Rechnung zum Beispiel eine kubische Anisotropie $\sum_\alpha S_\alpha^4(\mathbf{r})$ hinzufügen kann. Es ergibt sich dann ein interessantes Flussdiagram für a_2 und die neue Kopplung.

29.d Ergebnisse für das isotrope n-Vektormodell

Was wir soeben betrachtet haben, ist der Anfang der ϵ-Entwicklung, das heißt einer Entwicklung der Exponenten in Potenzen von $\epsilon = 4 - d$. Die Terme in Ordnung ϵ haben wir gerade berechnet. Wir geben noch die Terme in Ordnung ϵ^2 an. Aus η und γ kann man die anderen Exponenten α, β, δ und ν aus (27.36) bis (27.39) berechnen. Der Exponent ω beschreibt die führende Korrektur zum Skalen, $\omega = (d - y_i)/y_E$ in (28.24)

$$\eta = \frac{n+2}{2(n+8)^2}\epsilon^2 + O(\epsilon^3), \tag{29.31}$$

$$\gamma = 1 + \frac{n+2}{2(n+8)}\epsilon + \frac{(n+2)(n^2+22n+52)}{4(n+8)^3}\epsilon^2 + O(\epsilon^3), \tag{29.32}$$

$$\omega = \epsilon - \frac{3(3n+14)}{(n+8)^2}\epsilon^2 + O(\epsilon^3). \tag{29.33}$$

Wir beobachten, dass die Exponenten sowohl von der Dimension $4 - \epsilon$ als auch von der Anzahl n der Komponenten des Ordnungsparameters $\mathbf{m} = \langle \mathbf{S} \rangle$ abhängen. Systeme, die durch ein und denselben Fixpunkt beschrieben werden, haben gleiche kritische Exponenten. Man sagt, sie gehören zur gleichen Universalitätsklasse. Konventionelle kritische und trikritische Phasenübergänge gehören zu verschiedenen Universalitätsklassen. Systeme mit der langreichweitigen Dipol-Wechselwirkung werden durch eine weitere Universalitätsklasse beschrieben.

Stanley hat gezeigt, dass das n-Vektormodell im Limes $n \to \infty$ durch das sphärische Modell beschrieben wird. Für dieses erhält man im Bereich $2 < d <= 4$ die Exponenten $\eta = 0$, $\gamma = 2/(d-2)$. Ausgehend von diesem Limes gibt es eine $1/n$-Entwicklung. Für $d = 3$ Raumdimensionen ergibt diese

$$\eta = \frac{8}{3\pi^2 n} + O(\frac{1}{n^2}), \tag{29.34}$$

$$\gamma = 2 - \frac{24}{\pi^2 n} + O(\frac{1}{n^2}). \tag{29.35}$$

Schließlich haben Mermin und Wagner gezeigt, dass es für $n \geq 2$ keine spontane magnetisierung bei endlichen Temperaturen gibt. Für $n > 2$ gibt es die folgende Entwicklung in $\epsilon' = d - 2$

$$\eta = \frac{\epsilon'}{n-2} + O(\epsilon'^2), \tag{29.36}$$

$$\nu = \frac{1}{\epsilon'} - \frac{1}{n-2} + \frac{4-n}{2(n-2)^2}\epsilon' + O(\epsilon'^2). \tag{29.37}$$

Man kann auch zeigen, dass sich das System mit $n = -2$ formal weitgehend wechselwirkungsfrei verhält, woraus $\eta = 0$, $\gamma = 1$ unabhängig von der Dimension folgt. Jedoch ist keine Entwicklung in $n + 2$ bekannt. Man kann ein n, d-Diagramm mit Höhenlinien für Exponenten zeichnen. Für α und γ finden sie sich in F.W., Lecture Notes in Physics 54 (1976) 1-29 (Springer).

Viele Daten sind in J. Zinn-Justin, Quantum Field Theory and Critical Phenomena, Oxford Science Publications zu finden.