30 Pfadintegrale für klassische Felder

30.a Pfadintegrale

Wir wollen uns nun mit Pfadintegral-Darstellungen befassen und zwar sowohl für klassische Systeme als auch für quantenmechanische. Wir beginnen mit einem klassischen System, das von einem reellen Feld $\phi(\mathbf{r})$ abhängt. Wir betrachten also die Zustandssumme

$$Z = \int \mathrm{D}\phi \exp(-S(\phi)). \tag{30.1}$$

Dabei bedeutet $\mathrm{D}\phi$, dass wir über ϕ an allen Orten integrieren. Wie das im Einzelnen zu verstehen ist, stellen wir im Weiteren dar. Es sei nur bemerkt, dass der Grenzübergang zum kontinuierlichen $\mathbf{r}$ nicht ohne Probleme ist. Da wir an Erwartungswerten und Korrelationen interessiert sind, fügen wir einen Quellterm hinzu

$$Z(J) = \int \mathrm{D}\phi \exp(-S(\phi) + J \cdot \phi) \text{ mit } J \cdot \phi = \int \mathrm{d}^d r J(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}). \tag{30.2}$$

Durch Differentiation nach J erhalten wir

$$\frac{\delta}{\delta J(\mathbf{r})} Z(J)|_{J=0} = Z(0)\langle\phi(\mathbf{r})\rangle \tag{30.3}$$

und entsprechend für höhere Ableitungen

$$\frac{\delta^n}{\delta J(\mathbf{r}_1)\delta J(\mathbf{r}_2)...\delta J(\mathbf{r}_n)} Z(J)|_{J=0} = Z(0)\langle\phi(\mathbf{r}_1)\phi(\mathbf{r}_2)...\phi(\mathbf{r}_n)\rangle. \tag{30.4}$$

Wir wollen zu einer störungstheoretischen Beschreibung übergehen. Dazu betrachten wir zunächst das Gauss-Integral

$$Z_0(J) = \int \mathrm{D}\phi \exp(-\frac{1}{2}\phi K \phi + J \cdot \phi) \text{ mit } \phi K \phi = \int \mathrm{d}^d\mathbf{r} \int \mathrm{d}^d\mathbf{r}' \phi(\mathbf{r}) K(\mathbf{r},\mathbf{r}')\phi(\mathbf{r}'). \tag{30.5}$$

Dabei nehmen wir an, dass der Kern K symmetrisch und positiv ist. Wir führen nun das Inverse G_0 zu K ein,

$$\int \mathrm{d}^d\mathbf{r}'' G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}'')K(\mathbf{r}'',\mathbf{r}') = \delta^d(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{30.6}$$

Dann kann man das Integral (30.5) auswerten, indem man quadratisch ergänzt zu

$$Z_0(J) = \int \mathrm{D}\phi \exp(-\frac{1}{2}(\phi - G_0 J)K(\phi - G_0 J) + \frac{1}{2} J G_0 J) = Z_0(0)\exp(\frac{1}{2} J G_0 J). \tag{30.7}$$

Unter Verwendung dieser Gleichung überzeuge man sich, dass für die Gauss-Verteilung

$$\langle\phi(\mathbf{r}_1)\phi(\mathbf{r}_2)\rangle_0 = G_0(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2), \tag{30.8}$$

$$\langle\phi(\mathbf{r}_1)\phi(\mathbf{r}_2)\phi(\mathbf{r}_3)\phi(\mathbf{r}_4)\rangle_0 = G_0(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)G_0(\mathbf{r}_3,\mathbf{r}_4) + G_0(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_3)G_0(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_4) + G_0(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_4)G_0(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3) \tag{30.9}$$

gilt. Hat man ein Produkt von $2n$ Faktoren ϕ, so hat man die Orte $\mathbf{r}_i$ auf alle Arten zu Paaren zusammenzufügen und das Produkt der jeweiligen G_0 aufzusummieren. Es gibt dann insgesamt $(2n-1)!! = (2n-1)\cdot(2n-3)...3\cdot 1$ Beiträge.

Wir haben das Feld durch die lokalen Amplituden $\phi(\mathbf{r})$ dargestellt. Man kann auch von einer anderen Basis ausgehen. Da K und die Wechselwirkung V, die wir unten einführen, in der Regel translationsinvariant sind, ist es häufig zweckmäßig, die Fouriertransformierte

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{V_\mathrm{P}}\sum_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \frac{1}{(2\pi)^d}\int \mathrm{d}^d k \phi_{\mathbf{k}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \tag{30.10}$$

$$\phi_{\mathbf{k}} = \int \mathrm{d}^d r \phi(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tag{30.11}$$

einzuführen. Dann transformiert sich

$$\phi K \phi = \int \mathrm{d}^d\mathbf{r} \int \mathrm{d}^d\mathbf{r}' \phi(\mathbf{r}) K(\mathbf{r},\mathbf{r}')\phi(\mathbf{r}') = \frac{1}{V_{\mathrm{P}}} \sum K_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}} \phi_{-\mathbf{k}} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \mathrm{d}^d k K_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}} \phi_{-\mathbf{k}} \tag{30.12}$$

mit

$$K_{\mathbf{k}} = \int \mathrm{d}^d r K(\mathbf{r}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \tag{30.13}$$

Speziell für

$$\phi K \phi = \int \mathrm{d}^d r (m^2\phi^2(\mathbf{r}) + (\nabla\phi(\mathbf{r}))^2) \tag{30.14}$$

folgt

$$K_{\mathbf{k}} = m^2 + k^2, \quad G_0(\mathbf{k}) = \frac{1}{m^2+k^2}, \quad G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \mathrm{d}^d k \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{m^2+k^2}. \tag{30.15}$$

Wir kommen nun zur Störungstheorie. Es sei

$$S(\phi) = \frac{1}{2}\phi K \phi + V(\phi). \tag{30.16}$$

Beachten wir, dass

$$\frac{\delta}{\delta J(\mathbf{r})} \mathrm{e}^{J\cdot\phi} = \phi(\mathbf{r}) \mathrm{e}^{J\cdot\phi}, \tag{30.17}$$

dann können wir das Funktional-Integral

$$Z(J) = \int \mathrm{D}\phi \exp(-S(\phi) + J\cdot\phi) \tag{30.18}$$

ausdrücken als

$$Z(J) = \exp\left(-V\left(\frac{\delta}{\delta J(\mathbf{r})}\right)\right).\exp(\frac{1}{2}JG_0J) \tag{30.19}$$

und damit für die Zustandssumme

$$Z(0) = \exp\left(-V\left(\frac{\delta}{\delta J(\mathbf{r})}\right)\right).\exp(\frac{1}{2}JG_0J)\Big|_{J=0}. \tag{30.20}$$

Für die Korrelationen können wir nach wie vor die Gleichung (30.4) verwenden und erhalten

$$Z(0)\langle\phi(\mathbf{r}_1)\phi(\mathbf{r}_2)...\phi(\mathbf{r}_n)\rangle = \frac{\delta^n}{\delta J(\mathbf{r}_1)\delta J(\mathbf{r}_2)...\delta J(\mathbf{r}_n)} \exp\left(-V\left(\frac{\delta}{\delta J(\mathbf{r})}\right)\right).\exp(\frac{1}{2}JG_0J)\Big|_{J=0}. \tag{30.21}$$

Die Ausdrücke (30.20) und (30.21) erlauben uns eine störungstheoretische Entwicklung nach Potenzen des Potentials V durchzuführen.

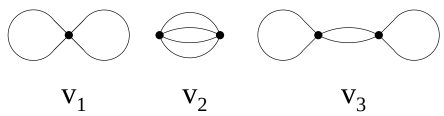
30.b Störungstheorie und Diagramme

Man zeichne alle möglichen Diagramme, indem man zunächst Vertices für die Kopplungen $V_k(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,...\mathbf{r}_k)$ in

$$V(\phi) = \sum_k \frac{1}{k!} \int \mathrm{d}^d r_1 \mathrm{d}^d r_2 ... \mathrm{d}^d r_k V_k(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,...\mathbf{r}_k)\phi(\mathbf{r}_1)\phi(\mathbf{r}_2)...\phi(\mathbf{r}_k) \tag{30.22}$$

in vorgegebener Anzahl zeichnet. Dabei erhalten diese je k äußere Beine, die mit Orten $\mathbf{r}$ versehen werden. Weiter zeichnet man Orte mit Beinen für die Faktoren $\phi(\mathbf{r})$, die in der Korrelation auftreten. Dann verbindet man die verschiedenen Beine die von den ϕs der Korrelationen und den ϕs der Vertices herrühren, durch Linien, denen man die Propagatoren $G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ mit den jeweiligen Orten zuordnet. Die Propagatoren und die Kopplungen V_k sind miteinander zu multiplizieren und über die Orte der Vertices ist aufzuintegrieren. Dies ergibt einen diagrammatischen Beitrag.

Dieser ist allerdings noch mit einem kombinatorischen Faktor zu multiplizieren. Dazu stellen wir folgende Überlegung an. Wir nummerieren die Enden der Propagatoren der Reihe nach durch. Zunächst wählen wir einen ersten Punkt willkürlich, als zweiten das andere Ende des Propagators. Dann einen dritten Punkt nach Belieben, dann den vierten als anderes Ende des von drei ausgehenden Propagators. Haben wir in unserem Diagramm n_k Faktoren V_k, so haben wir anfangs einen Faktor $\prod_k (1/n_k! k!^{n_k})$. Dabei stecken die Faktoren $1/k!$ bereits in der Definition der Wechselwirkung. Der Faktor $1/n_k!$ rührt von der Entwicklung der Exponentialfunktion $\exp(-V_k)$ her. Wir fragen nun, wieviele Möglichkeiten es gibt, dieses Diagramm herzustellen. Hängt der Punkt eins an einem V_k, so hat man die Wahl zwischen n_k solcher Vertices, dazu noch die Wahl aus k Linien, die von diesem Vertex weggehen; insgesamt also eine $n_k \cdot k$-fache Wahl. Beim Punkt zwei besteht, falls er am gleichen Vertex liegt, die Wahl zwischen $k-1$ äußeren Enden, falls er an einem anderen Vertex V_k liegt, hat man eine $(n_k - 1)k$ fache Wahl. Liegt er an einem Vertex $V_{k'}$ mit $k' \neq k$, so bleibt der Faktor $n_{k'} k'$. Lediglich, wenn man an einen äußeren Punkt gelangt, hat man keine Wahl andere Wahl. Insgesamt stellt man fest, dass durch diese Faktoren der Anfangsfaktor $\prod_k (1/n_k! k!^{n_k})$ kompensiert wird. Allerdings kann es sein, dass mehrere dieser Wahlmöglichkeiten das gleiche Diagramm liefern. Dann hat man zuviel gezählt. Gibt es also insgesamt s verschiedene Abbildungen des Diagramms auf sich selbst, so ist es mit dem Faktor $1/s$ zu multiplizieren. So gilt schon, wenn ein Propagator von einem Vertex auf diesen zurückkehrt, dass allein dafür ein Faktor $1/2$ anzusetzen ist, da gewissermaßen der Propagator in beide Richtungen durchlaufen werden kann. Weiterhin ist noch das Vorzeichen $(-)^{\sum_k n_k}$ zu berücksichtigen.



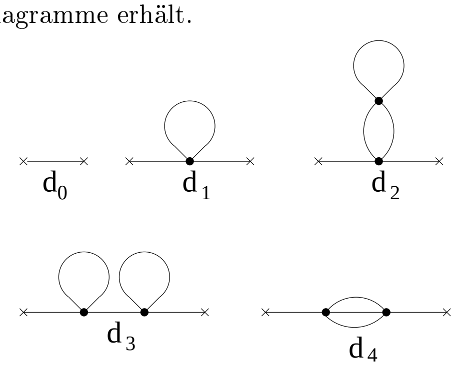
In dieser Figur bringen wir zunächst die Diagramme für die Zustandssumme bis zur zweiten Ordnung in V_4,

$$\frac{Z}{Z_0} = 1 - \frac{1}{8} v_1 + \frac{1}{48} v_2 + \frac{1}{16} v_3 + \frac{1}{128} v_1^2 + ... \tag{30.23}$$

Der Faktor $1/8$ bei v_1 kommt zum Beispiel dadurch zustande, dass man in jedem der beiden Propagatoren die beiden Enden austauschen kann, ohne dass sich dadurch das Diagramm verändert. Schließlich kann man auch die beiden Propagatoren miteinander vertauschen und das Diagramm geht in sich über. Daher drei Faktoren $1/2$. Eine andere Betrachtung ist die, dass man zur Berechnung dieses Diagramms den Erwartungswert eines Produktes von vier Faktoren ϕ an dem Vertex $V_1/24$ zu berechnen hat. Das Ergebnis ist die Summe der drei Beiträge in (30.9). Daher erhält man den Faktor $3/4! = 1/8$. Wir bilden nun den Logarithmus von Z,

$$-\frac{F}{k_B T} = \ln Z = \ln Z_0 - \frac{1}{8} v_1 + \frac{1}{48} v_2 + \frac{1}{16} v_3 + ... \tag{30.24}$$

Hat ein zusammenhängendes Diagramm v_i einen Symmetriefaktor $1/s_i$, so gilt für ein Produkt $\prod_i v_i^{n_i}$ der Symmetriefaktor $\prod_i (1/n_i! s_i^{n_i})$, da man die n_i Diagramme in $n_i!$ Permutationen herstellen kann. Daher gilt für die freie Energie, dass man sie als Summe aller in sich geschlossenen zusammenhängenden Diagramme erhält.



Bei der Berechnung der Korrelationen erhält man nach (30.21) zunächst $Z(0)$ multipliziert mit der Korrelation. Man bemerkt, dass sowohl Diagramme auftreten, bei denen alle Teile über Propagatoren mit äußeren Enden zusammenhängen, wie auch solche, die Vakuum-Beiträge enthalten. Bezeichnen wir die Diagramme ohne Vakuum-Diagramme mit d_i, so sieht man, dass sich $Z(0)\langle\prod_i \phi(\mathbf{r}_i)\rangle = Z_0 \sum_i(\pm d_i/s_i)\times$ Vakuum-Diagramme schreiben lässt, so dass man

$$\langle\prod_i \phi(\mathbf{r}_i)\rangle = \sum_i(\pm d_i/s_i) \tag{30.25}$$

hat. Die Korrelationen ergeben sich als Summe der zusammenhängenden Diagramme. Im konkreten Fall der Zweipunkt-Korrelation folgt

$$\langle\phi(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}')\rangle = d_0 - \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{4} + \frac{d_3}{4} + \frac{d_4}{6} + ... \tag{30.26}$$

Beachte, dass man die beiden Enden $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$ nicht miteinander vertauschen kann. Für $d_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ hat man $G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')$.

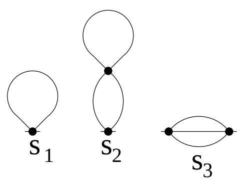
30.c Dyson-Gleichung

Betrachten wir die Diagramme d_i zur Zweipunkt-Funktion, so sehen wir, dass sich in d_3 die Schleife aus d_1 wiederholt. Allgemein haben die Beiträge zur Zweipunkt-Funktion eine Anzahl von Propagatoren, bei deren durchschneiden das Diagramm in zwei Teile zerfällt. Zwischen diesen Propagatoren sind jeweils Beiträge, die man als Selbstenergie Σ bezeichnet, so dass man schreiben kann

$$G = G_0 + G_0\Sigma G_0 + G_0\Sigma G_0\Sigma G_0 + ... = G_0 + G_0\Sigma G \text{ oder } G^{-1} = G_0^{-1} - \Sigma. \tag{30.27}$$

Diese letztere Beziehung ist die Dyson-Gleichung. Die Beiträge erster und zweiter Ordnung finden sich in der nächsten Figur.

$$\Sigma = -\frac{s_1}{2} + \frac{s_2}{4} + \frac{s_3}{6} + ... \tag{30.28}$$

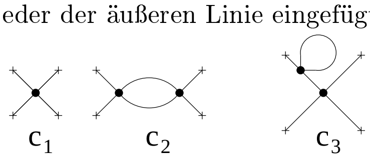


30.d Vierer-Korrelation

Wir betrachten noch die Vierer-Korrelation $\langle\phi(\mathbf{r}_1)\phi(\mathbf{r}_2)\phi(\mathbf{r}_3)\phi(\mathbf{r}_4)\rangle$. Wir beobachten dass wir alle Beiträge aus GG erhalten und zusätzlich noch Beiträge C, bei denen alle vier Orte $\mathbf{r}_1$, ... $\mathbf{r}_4$ miteinander verbunden sind,

$$\langle\phi(\mathbf{r}_1)\phi(\mathbf{r}_2)\phi(\mathbf{r}_3)\phi(\mathbf{r}_4)\rangle = G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)G(\mathbf{r}_3,\mathbf{r}_4) + G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_3)G(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_4) + G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_4)G(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3) + C(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3,\mathbf{r}_4). \tag{30.29}$$

Die Beiträge zu C bis zur zweiten Ordnung sind in der nächsten Figur gezeigt. Dabei treten allerdings die Beiträge c_2 in drei Varianten auf, da es drei Möglichkeiten gibt, die äußeren Orten $\mathbf{r}_1$ ... $\mathbf{r}_4$ zu Paaren zusammenzufügen. Die Beiträge c_3 treten in vier Varianten auf, da der Selbstenergiebeitrag s_1 in jeder der äußeren Linie eingefügt werden kann.



Man erhält damit

$$C = -c_1 + \frac{c_2 + \text{ 2 Permutationen}}{2} + \frac{c_3 + \text{ 3 Permutationen}}{2} + ... \tag{30.30}$$

Man kann aus C die vier äußeren Beine herausziehen und erhält

$$C(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3,\mathbf{r}_4) = \int \mathrm{d}^d r_1' \mathrm{d}^d r_2' \mathrm{d}^d r_3' \mathrm{d}^d r_4' G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_1') G(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_2') G(\mathbf{r}_3,\mathbf{r}_3') G(\mathbf{r}_4,\mathbf{r}_4') \Gamma(\mathbf{r}_1',\mathbf{r}_2',\mathbf{r}_3',\mathbf{r}_4'). \quad (30.31)$$

Γ enthält dann bis in zweiter Ordnung in V_4 nur die Beiträge aus c_1 und c_2, nicht aber aus c_3, aus denen man die äußeren Propagatoren entfernt hat.

30.e Komplexe Felder

Man hat bei manchen Problemen auch mit komplexen Feldern ϕ zu tun. Häufig startet man von

$$Z_0(J) = \int \mathrm{D}\phi \exp(-\phi^\dagger K \phi + J^\dagger \phi + \phi^\dagger J), \quad (30.32)$$

$$\phi^\dagger K \phi = \int \mathrm{d}^d \mathbf{r} \int \mathrm{d}^d \mathbf{r}' \phi^*(\mathbf{r}) K(\mathbf{r},\mathbf{r}') \phi(\mathbf{r}'), \quad (30.33)$$

$$J^\dagger \phi = \int \mathrm{d}^d r J^*(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) \quad (30.34)$$

mit $K^\dagger = K$ und erhält

$$Z_0(J) = Z_0(0) \exp(J^\dagger G_0 J). \quad (30.35)$$

Man beachte, dass man jetzt die Kopplungen V in der Form

$$V = \sum_{k,l} \frac{1}{k!l!} \int \mathrm{d}^d r_1 ... \mathrm{d}^d r_k \mathrm{d}^d r_1' .. \mathrm{d}^d r_l' V_{k,l}(\mathbf{r}_1, ...\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_1', ...\mathbf{r}_l) \phi^*(\mathbf{r}_1) ... \phi^*(\mathbf{r}_k) \phi(\mathbf{r}_1') ... \phi(\mathbf{r}_l') \quad (30.36)$$

schreibt. Es gibt jetzt die Permutations-Symmetrie nur noch bezüglich der k Faktoren ϕ^* untereinander und der l Faktoren ϕ untereinander. Dementsprechend kann man jetzt die beiden Enden eines Propagators nicht mehr miteinander vertauschen. Um das klar darzustellen, ist es zweckmäßig, die Propagatoren mit einem Pfeil vom Ort mit $\phi(\mathbf{r})$ nach dem mit dem Faktor ϕ^* zu versehen. Damit ergeben sich andere Symmetriefaktoren und man erhält für die Korrelationen jetzt

$$\langle \phi^*(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}') \rangle = d_0 - d_1 + d_2 + d_3 + \frac{d_4}{2} + ... \quad (30.37)$$

und für den Logarithmus der Zustandssumme

$$\ln Z = \ln Z_0 - \frac{v_1}{2} + \frac{v_2}{8} + \frac{v_3}{2} + ... \quad (30.38)$$

Treten in V nur Beiträge mit $k = l$ auf, so ist S gegen Transformationen $\phi(\mathbf{r}) \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \phi(\mathbf{r})$ mit beliebigem Winkel α invariant. Solange diese Symmetrie nicht gebrochen ist, können nur Korrelationen $\langle \phi^{*k} \phi^l \rangle$ von Null verschieden sein, wenn $k = l$. Welcher Beitrag in (30.29) verschwindet dann? Wie ändern sich die Symmetriefaktoren für die drei Beiträge c_2?