32 Pfadintegrale: Ausblick

32.a Fermionen

Wir haben bisher nur die Feldtheorie für Bosonen aufgestellt. Dabei waren wir erst von dem klassischen Feld für Bosonen, einem komplexen Feld ausgegangen, und haben für solch ein Feld die Pfadintegrale entwickelt. Daran anschließend wurde die Pfadintegral-Formulierung für Bosonen entwickelt. Es ergibt sich, dass die Vertauschungs-Regeln zwischen Erzeugern und Vernichtern dazu führen, dass man eine zusätzliche Zeitvariable (letzendlich neben Orts- oder Impuls-Koordinaten) einführen muss. Wir haben die Theorie für endliche Temperaturen entwickelt, in der die Zeit imaginär war und von 0 bis iβ lief. Es gibt auch eine Theorie für den Grundzustand. Dort rechnet man mit reellen Zeiten. Schließlich kann man für endliche Temperaturen auch neben den imaginären noch reelle Zeiten einführen. Dann multipliziert sich die Anzahl der Felder mit zwei.

Ähnlich kann man für Fermionen vorgehen. Man braucht dort zunächst das äquivalente klassische Feld. Da die Erzeuger antikommutieren, müssen auch die klassischen Felder antikommutieren. Dies leisten Grassmann-Variable. Sie können das zum Beispiel unter http://www.tphys.uni-heidelberg.de/ wegner/grassmann.ps nachlesen. Formal findet man viel Ähnlichkeit mit der Herleitung für Bosonen.

Auf einen Punkt möchte ich hier noch eingehen. Man definiert die Korrelations-Funktion ähnlich wie für die Bosonen,

$$-G(\tau,\tau') = \langle T_\tau(\tilde{f}(\tau')f(\tau))\rangle = \begin{cases} \langle \tilde{f}(\tau')f(\tau)\rangle & \tau < \tau' \\ -\langle f(\tau)\tilde{f}(\tau')\rangle & \tau > \tau'. \end{cases} \tag{32.1}$$

mit der Zeitentwicklung

$$\tilde{f}(\tau) = \mathrm{e}^{\tau H} f^\dagger \mathrm{e}^{-\tau H}, \quad f(\tau) = \mathrm{e}^{\tau H} f \mathrm{e}^{-\tau H} \tag{32.2}$$

für die fermionischen Erzeuger und Vernichter $f^\dagger$ und f. Dabei vertauscht der Zeitordnungs-Operator nicht nur die beiden Operatoren $\tilde{f}$ und f, sondern ändert auch noch das Vorzeichen beim Vertauschen. Es gilt wieder $G(\tau,\tau') = G(\tau - \tau')$. Man erhält $G(+0) = -1 + n$, $G(-0) = n$, woraus wieder der Sprung $G(+0) - G(-0) = -1$ folgt. Die zyklische Invarianz liefert jedoch

$$G(\tau) = -G(\tau + \beta), \quad -\beta < \tau < 0. \tag{32.3}$$

Die Folge ist, dass bei der Entwicklung

$$G(\tau) = k_{\mathrm{B}} T \sum_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_j \tau} G(\omega_j) \tag{32.4}$$

jetzt nicht mehr $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_j\beta} = 1$ gilt, was bei den Bosonen auf die Matsubara-Frequenzen $\omega_j = 2j\pi k_{\mathrm{B}}T$ führte, sondern $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_j\beta} = -1$, was die fermionischen Matsubara-Frequenzen $\omega_j = (2j+1)\pi k_{\mathrm{B}}T$ ergibt. Insbesondere ist $\omega = 0$ keine Matsubara-Frequenz für Fermionen.

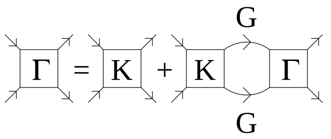
32.b Summation von Diagrammen

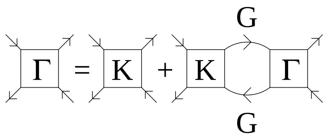
Ein gängiges Verfahren bei der Auswertung von Korrelationen ist es, bestimmte Klassen von Diagrammen aufzusummieren. Wir hatten im Abschnitt 30.c die Dyson-Gleichung und die Selbstenergie betrachtet. Ein Näherungs-Verfahren besteht darin, bestimmte Beiträge der Selbstenergie mitzunehmen, im einfachsten Fall etwa das Diagramm s_1. Etwas besser rechnet man, wenn man in s_1 den Propagator G_0 durch G selbst-konsistent ersetzt. Dann hat man zum Beispiel auch s_2 und viele andere Beiträge berücksichtigt. Man kann sich davon überzeugen, dass dies bei den Fermionen der Hartree-Fock-Näherung entspricht.

Ähnlich wie wir bei der Dyson-Gleichung die Beiträge betrachtet haben, die die Einteilchen-irreduziblen Einschübe Σ sind, kann man bei dem Korrelations-Anteil C zunächst die äußeren Propagatoren G herausziehen, schematisch $C = GG\Gamma GG$ (30.31) und dann betrachten, welche Zweiteilchen-irreduziblen Anteile K verbleiben, die durch Durchschneiden von zwei Propagatoren nicht zerfallen. Dies führt auf die Bethe-Salpeter-Gleichung, schematisch

$$\Gamma = K + KGG\Gamma. \tag{32.5}$$

Dies kann auf zwei Arten und Weisen geschehen. Entweder die beiden Propagatoren laufen in die gleiche Richtung, dann betrachtet man Zwei-Teilchen-Anregungen, oder sie laufen in Gegenrichtung, dann betrachtet man Teilchen-Loch-Paare. Approximiert man $K = V$, so erhält man für Teilchen-Loch-Paare die RPA-Näherung. Im allgemeinen sind die K für diese beiden Bethe-Salpeter-Gleichungen verschieden.





Man kann also bekannte Näherungen durch Klassen von Diagrammen darstellen. Es wird auch offensichtlich, wie man diese Näherungen verbessern kann, indem man zum Beispiel zu Σ oder K weitere Beiträge hinzunimmt.

Mehr kann man in Büchern wie Fetter/Walecka, Quantum Theory of Many-Particle Systems,
Abrikosov, Gorkov, Dzyaloshinski, Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics,
Nozieres, The Theory of Interacting Fermi Systems (nur T=0),
Zinn-Justin, Quantum Field Theory and Critical Phenomena finden.