Formeln zu 'Drei Probleme - Eine Lösung'

Schwimmende zweidimensionale Körper im Gleichgewicht, das Radspurproblem und Elektronen in einem parabolischen Magnetfeld

Franz Wegner
Institut für Theoretische Physik
Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Hier werden einige Formeln und Ergebnisse in Ergänzung zu http://www.tphys.uni-heidelberg.de/∼wegner/Fl2mvs/Filme.html gebracht.

Genaueres findet man in [1]. Im ersten Abschnitt gebe ich einige grundlegende Formeln an, im zweiten die Formeln für den Grenzfall, in dem sich die Kurve durch 'elementare' Funktionen wie Exponential- und Winkelfunktionen darstellen lässt, während man im allgemeinen Fall doppelt-periodische Funktionen benötigt.

1 Einige grundlegende Formeln

1.1 Hydrostatik des Problems

Ich bezeichne die Masse des Körpers mit m, seine relative Dichte, das heißt das Verhältnis zwischen der Dichte des Körpers und der Dichte des Wassers, in dem er schwimmt, mit ρ_d. Nach Archimedes verdrängt der Körper seine Masse in der Flüssigkeit. Dann ist der Massenanteil des Körpers, der unterhalb des Wasserspiegels schwimmt, $m_2 = m\rho_d$; der Anteil, der oberhalb des Wasserspiegels, schwimmt, $m_1 = m(1-\rho_d)$. Dementsprechend ist auch der Teil der Querschnittsfläche unterhalb der Wasserfläche durch $\mathcal{A}_2 = \rho_d\mathcal{A}$, der oberhalb der Wasserfläche durch $\mathcal{A}_1 = (1-\rho_d)\mathcal{A}$ gegeben, wobei $\mathcal{A}$ die gesamte Querschnittsfläche ist.

Bezeichnen wir die Höhe des Schwerpunkts der Masse m_1 über der Wasserfläche mit h_1 und die Tiefe des Schwerpunkts von m_2 unter der Wasserfläche mit h_2, so folgt die potentielle Energie zu

$$\mathcal{V} = m_1 g h_1 + (m - m_2) g h_2 = m(1-\rho_d) g (h_1 + h_2), \tag{1}$$

da von der Wasserfläche aus gerechnet, die Masse m_1 um h_1 gehoben, die Masse m_2 um h_2 abgesenkt und die Wassermasse m um h_2 angehoben wird. Der Abstand der beiden Schwerpunkte ist $h = h_1 + h_2$. Es folgt, dass h unabhängig von der Orientierung sein muss, damit die potentielle Energie in allen Orientierungen die gleiche ist. Dreht man nun den Körper um einen infinitesimalen Winkel $\delta\phi$ nach links, so verschieben sich die beiden Schwerpunkte um

$$\left(-h_1 + \frac{2\ell^3}{3\mathcal{A}_1}\right)\delta\phi, \text{ oberer Schwerpunkt} \tag{2}$$

$$\left(h_2 - \frac{2\ell^3}{3\mathcal{A}_2}\right)\delta\phi, \text{ unterer Schwerpunkt} \tag{3}$$

nach rechts. Dabei ist 2ℓ die Länge der Wasserlinie, das heißt die Strecke, die die Querschnittsfläche oberhalb von der unterhalb des Wassers trennt. Da die beiden Schwerpunkte stets senkrecht übereinander stehen müssen, da sonst ein Drehmoment auf den Körper wirkt, müssen die beiden Verschiebungen gleich sein, woraus

$$\frac{2}{3}\ell^3\left(\frac{1}{\mathcal{A}_1}+\frac{1}{\mathcal{A}_2}\right)=h_1+h_2 \tag{4}$$

folgt. Daher muss auch ℓ konstant sein.

Die infinitesimale Drehung erfolgt um den Mittelpunkt der Wasserlinie, da bei der Drehung auf der einen Seite genauso viel Fläche auftauchen wie auf der anderen Seite untertauchen muss. Dieser Mittelpunkt der Wasserlinie schiebt sich in Richtung der Wasserlinie weiter. Diese Mittelpunkte stellen die Einhüllende der Wasserlinien (in den Figuren und Animationen in rot) dar. Die Forderung kann also auch so gestellt werden: Man finde eine Einhüllende, sodass die Endpunkte der Tangenten der Länge ℓ in beiden Richtungen auf ein und derselben Kurve liegen.

1.2 Die Differentialgleichung

In [2] wird die Differentialgleichung für die Kurve mit folgender Überlegung hergeleitet: Der Radius r der Berandung wird als Funktion des Polarwinkels ψ nach einem Entwicklungsparameter ϵ entwickelt (Taylor-Entwicklung), wobei

$$r(\psi)=r_0\big(1+\epsilon\cos(p\psi)+\sum_{n=2}^{\infty}c_n(\epsilon)\cos(np\psi)\big), \tag{5}$$

mit $c_n(\epsilon)=O(\epsilon^n)$ gesetzt wird. Aus der Lösung der entstehenden Gleichungen findet man in erster Ordnung in ϵ, dass es $p-2$ Dichten zu vorgegebenem p gibt. Die Fortführung der Rechnung in höherer Ordnung mittels Computer-Algebra ergab überraschender Weise, dass die Lösungen für alle diese $p-2$ Dichten dieselbe Entwicklung bis zur siebten Ordnung in ϵ liefern. In dieser Ordnung beendete ich die Computeralgebra-Rechnungen. Die Vermutung, dass dies generell, also auch in höheren Ordnungen gilt, lag nahe.

Es wurde natürlich angenommen, dass p eine ganze Zahl ist, damit sich die Berandung nach einem Umlauf um den Ursprung schließt. Geben wir nun stattdessen eine 'Berandungs'-Kurve vor, deren Abstand vom Ursprung ebenfalls periodisch oszilliert, jetzt allerdings für ein p, das nicht ganz ist, sondern infinitesimal von einer ganzen Zahl abweicht, dann wird diese Kurve nach einem Umlauf um einen infinitesimalen Winkel χ gegenüber dem vorhergehenden Umlauf verdreht sein. Fordern wir nun, dass es dazu ebenfalls eine Einhüllende gibt, deren Tangente im Abstand ℓ die beiden Teile der 'Berandungs'-Kurve erreicht, dann kann man eine Differentialgleichung für die gesuchte Kurve aufstellen. Sie ist nicht-linear und von dritter Ordnung. Im Limes kleiner χ ist ℓ^3 proportional zu χ. Die Proportionalitätskonstante wrd durch a beschrieben,

$$a=\lim_{\chi\to 0}\frac{3\chi}{16\ell^3}. \tag{6}$$

Die Differentialgleichung in [2], die ich hier nicht wiedergebe, ergibt nach zwei Integrationen

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + (\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\psi})^2}} = ar^2 + b + cr^{-2} \tag{7}$$

mit den Integrationskonstanten b und c.

1.3 Extreme Radien

Einen maximalen oder minimalen Abstand vom Ursprung haben die Kurven bei $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\psi} = 0$. Dies ergibt aus der obigen Gleichung

$$ar_i^4 + br_i^2 - r_i + c = 0 \tag{8}$$

für die extremalen Radien. Gibt man daher den größten und kleinsten Abstand vom Ursprung (Mittelpunkt) vor, so erhält man zwei Bedingungen für die Koeffizienten a, b und c. Man hat dann noch eine Bedingung frei. Diese kann man verwenden, um festzulegen, nach wieviel (p) Oszillationen zwischen maximalem und minimalem Abstand die Kurve schließt.

Da die Gleichung (8) von vierter Ordnung ist, kann sie bis zu vier reelle Lösungen haben. Wieviele reell sind, hängt von den Koeffizienten a, b und c ab. Eine ausführliche Diskussion findet man in Abschnitt 2.1 von [1]. Es kann passieren, dass man keine reelle Lösung findet oder zwei oder vier. Wenn es zwei reelle Lösungen gibt, findet man eine Kurve. Wenn es vier gibt, zwei Kurven. Der Gleichung (8) entnimmt man, dass die Summe der vier Lösungen gleich null ist. Tatsächlich können die r_i negativ sein. Allgemein sind die extremen Radien durch $|r_i|$ gegeben. Da ihre Summe gleich null ist, kann man sie auch

$$r_{4,3} = r_0(1 \pm \epsilon), \quad r_{2,1} = -r_0(1 \pm \hat{\epsilon}) \tag{9}$$

schreiben. Dabei ist dann $\hat{\epsilon}$ entweder reell (zwei Kurven) oder rein-imaginär (eine Kurve).

1.4 Nochmals Differentialgleichungen

Zur Lösung der Gleichungen führt man zweckmäßiger Weise eine Parameterdarstellung ein. Als Parameter wählt man u, das den Abstand auf dem Umfang von einem vorgegebenen Punkt aus misst wie Kilometersteine die Länge einer Straße. Für dieses u gilt

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\psi} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\psi}\right)^2} \tag{10}$$

Damit kann man die Gleichung (7) umformen in

$$\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}u}\right)^2 = -4a^2 \prod_{i=1}^{4}(q - q_i), \tag{11}$$

wobei q für das Quadrat des Radius steht $q = r^2$, $q_i = r_i^2$. Diese Gleichung wird durch das Integral

$$u = \int \frac{\mathrm{d}q}{2a\sqrt{-\prod_{i=1}^{4}(q-q_i)}} \tag{12}$$

gelöst. Daran schließt sich die Gleichung für den Winkel ψ an

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}u} = aq + b + cq^{-1}, \tag{13}$$

mit der Lösung durch das Integral

$$\psi(u) = \int \mathrm{d}u(aq + b + cq^{-1}). \tag{14}$$

1.5 Die Lösung

Diese Integrale führen im allgemeinen auf keine elementare Funktionen. Vielmehr kommen hier die Weierstrass-Funktionen ins Spiel. Diese findet man in den Formelsammlungen [3, 4, 5], aber auch in Büchern über Funktionentheorie wie [6]. Aus Gleichung (12) erhält man

$$q(u) = q_i \frac{\wp(u) - \wp(3v)}{\wp(u) - \wp(v)}, \quad q_i = r_i^2 = \left(\frac{\wp(2v) - \wp(v)}{2a}\right)^2 \tag{15}$$

mit der Weierstrassschen $\wp$-Funktion (p-Funktion gesprochen). Diese Funktion ist doppelt-periodisch. Eine der Periodizitäten ergibt die periodische Oszillation des Radius. Dabei ist v gegeben durch

$$\wp(2v) = \frac{4ca - b^2}{3}. \tag{16}$$

Da die Gleichung $2v$ bestimmt, kann man zu einer Lösung v eine der drei Halbperioden addieren und erhält vier verschiedene Sätze von $\wp(v), \wp(3v)$, die zu den vier extremen Radien r_i gehören.

Die Weierstrass-Funktionen hängen noch von zwei Invarianten g_2 und g_3 ab. Diese sind mit den Konstanten a, b und c durch

$$g_2 = \frac{4}{3}(4ca - b^2)^2 + 8ab, \tag{17}$$

$$g_3 = -\frac{8}{27}(4ca - b^2)^3 - \frac{8}{3}ab(4ca - b^2) + 4a^2. \tag{18}$$

verknüpft.

Die Durchführung des Integrals (14) und die Zusammenfassung von x und y zu einer komplexen Zahl, die in der komplexen Ebene die Kurve wiedergibt,

$$z(\chi, u) := x + \mathrm{i}y = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi(u)} r(u) \tag{19}$$

ergibt

$$z(\chi,u)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi+2u\zeta(2v)}}{2a\sigma^2(2v)}\frac{\sigma(u-3v)}{\sigma(u+v)}. \tag{20}$$

ζ ist das negative des Integrals von $\wp$, σ die Exponentialfunktion des Integrals von ζ.

Für alle Kurven kann man ein rein-imaginäres v wählen. Man erhält einen von u unabhängigen Abstand

$$2\ell=|z(v,\chi,u+\delta u)-z(\hat{v},\hat{\chi},u-\delta u)|, \tag{21}$$

wenn

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\chi-\hat{\chi})}=\mp\mathrm{e}^{-2\delta u(\zeta(2v)-\zeta(2\hat{v}))}\frac{\sigma(2\delta u+v+\hat{v})}{\sigma(2\delta u-v-\hat{v})} \tag{22}$$

erfüllt ist. Dabei gilt das Minuszeichen, wenn es sich um zwei gleiche nur um den Winkel $\chi-\hat{\chi}$ verdrehte Kurven handelt; das Pluszeichen gilt für zwei verschiedene Kurven. Die Länge des Abstands ergibt sich aus

$$4\ell^2=\frac{1}{\wp(2\delta u+v-\hat{v})-\wp(2v)}. \tag{23}$$

2 Der Grenzfall, der auf elementare Formeln führt

Im Grenzfall, in dem zwei der extremen Radien gleich sind, die ich mit r_0 bezeichne, entarten die Weierstrassschen Funktionen zu einfach-periodischen Funktionen. Eine der Kurvenlösungen ist dann ein Kreis mit Radius r_0. Die beiden anderen extremen Radien sind $r_0(1+\epsilon)$ und $r_0|\epsilon-1|$.

2.1 Der periodische Fall $\epsilon > 2$

In diesem Fall sind die beiden kleinsten Radien $|r_i|$ gleich und man erhält

$$z(\chi,u)=r_0\frac{(\epsilon^2-2)\cos(2\lambda u)+\mathrm{i}\epsilon\sqrt{\epsilon^2-4}\sin(2\lambda u)-\epsilon}{\epsilon-2\cos(2\lambda u)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\chi-u/r_0)} \tag{24}$$

mit

$$\lambda=\frac{\sqrt{\epsilon^2-4}}{2\epsilon r_0}. \tag{25}$$

Ausgedrückt durch kartesische Koordinaten x und y erhält man aus (24)

$$x(\chi,u) = c_1(u)\cos(\chi-u/r_0)-s_1(u)\sin(\chi-u/r_0), \tag{26}$$
$$y(\chi,u) = c_1(u)\sin(\chi-u/r_0)+s_1(u)\cos(\chi-u/r_0) \tag{27}$$

mit

$$c_1(u) = r_0\frac{(\epsilon^2-2)\cos(2\lambda u)-\epsilon}{\epsilon-2\cos(2\lambda u)}, \tag{28}$$
$$s_1(u) = r_0\frac{\epsilon\sqrt{\epsilon^2-4}\sin(2\lambda u)}{\epsilon-2\cos(2\lambda u)}. \tag{29}$$

Der Abstand 2ℓ zwischen den Kurvenpunkten $\chi, u+\delta u$ und $\hat{\chi}, u-\delta u$ folgt aus

$$\begin{aligned}4\ell^2 &= |z(\chi, u+\delta u) - z(\hat{\chi}, u-\delta u)|^2 \\ &= (x(\chi, u+\delta u) - x(\hat{\chi}, u-\delta u))^2 + (y(\chi, u+\delta u) - y(\hat{\chi}, u-\delta u))^2 \quad (30)\end{aligned}$$

Falls

$$\tan(2\lambda\delta u) = 2\lambda r_0 \tan\left(\frac{\delta u}{r_0} - \frac{\chi - \hat{\chi}}{2}\right), \qquad (31)$$

ist der Abstand unabhängig von u mit

$$2\ell = \frac{2r_0}{\sqrt{1 + \frac{\epsilon^2-4}{\epsilon^2}\cot^2(2\lambda\delta u)}}. \qquad (32)$$

2.2 Der Fall $\epsilon < 2$

In diesem Fall sind die beiden mittleren Radien gleich. Man erhält zwei Kurven, die sich asymptotisch dem Kreis nähern. Die mit $s = +1$ liegt außerhalb des Kreises mit Radius r_0, die andere mit $s = -1$ innerhalb dieses Kreises,

$$z(\chi, u) = r_0 \frac{(2-\epsilon^2)\cosh(2\lambda u) + \mathrm{i}\epsilon\sqrt{4-\epsilon^2}\sinh(2\lambda u) + s\epsilon}{2\cosh(2\lambda u) - s\epsilon} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\chi - u/r_0)} \qquad (33)$$

mit[1]

$$\lambda = \frac{\sqrt{4-\epsilon^2}}{2\epsilon r_0}. \qquad (34)$$

Ausgedrückt durch die kartesischen Koordinaten x und y erhält man aus (33)

$$\begin{aligned}x(\chi, u) &= c_2(u)\cos(\chi - u/r_0) - s_2(u)\sin(\chi - u/r_0), \qquad (35)\\ y(\chi, u) &= c_2(u)\sin(\chi - u/r_0) + s_2(u)\cos(\chi - u/r_0) \qquad (36)\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}c_2(u) &= r_0 \frac{(2-\epsilon^2)\cosh(2\lambda u) + s\epsilon}{2\cosh(2\lambda u) - s\epsilon}, \qquad (37)\\ s_2(u) &= r_0 \frac{\epsilon\sqrt{4-\epsilon^2}\sinh(2\lambda u)}{2\cosh(2\lambda u) - s\epsilon}. \qquad (38)\end{aligned}$$

Falls

$$\tanh(2\lambda\delta u) = 2\lambda r_0 \tan\left(\frac{\delta u}{r_0} - \frac{\chi - \hat{\chi}}{2}\right), \qquad (39)$$

dann ist der Abstand zwischen den Punkten $\chi, u+\delta u$ und $\hat{\chi}, u-\delta u$ auf zwei Kurven, die beide außerhalb oder beide innerhalb r_0 liegen, von u unabhängig

$$2\ell = \frac{2r_0\epsilon}{\sqrt{(4-\epsilon^2)\coth^2(2\lambda\delta u) + \epsilon^2}} \qquad (40)$$

[1] Die hyperbolischen Funktionen sind definiert durch $\cosh(z) = (\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z})/2$, $\sinh(z) = (\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z})/2$, $\tanh(z) = \sinh(z)/\cosh(z)$, $\coth(z) = \cosh(z)/\sinh(z)$

Der Abstand zwischen den Punkten $\chi, u + \delta u$ auf der Kurve außerhalb des Kreises mit Radius r_0 und dem Punkt $\hat{\chi}, u - \delta u$ auf der Kurve innerhalb dieses Kreises ist konstant

$$2\ell = \frac{2r_0\epsilon}{\sqrt{(4-\epsilon^2)\tanh^2(2\lambda\delta u) + \epsilon^2}}, \tag{41}$$

falls

$$\tanh(2\lambda\delta u) = 2\lambda r_0 \cot\left(\frac{\delta u}{r_0} - \frac{\chi - \hat{\chi}}{2}\right). \tag{42}$$

2.3 Der Grenzfall $\epsilon = 2$

Im Grenzfall $\epsilon = 2$ wird die Kurve beschrieben durch

$$z(\chi, u) = \frac{3r_0 + \mathrm{i}u}{1 - \mathrm{i}u/r_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\chi - u/r_0)} \tag{43}$$

oder äquivalent durch

$$\begin{aligned} x(\chi, u) &= c_3(u)\cos(\chi - u/r_0) - s_3(u)\sin(\chi - u/r_0), & (44)\\ y(\chi, u) &= c_3(u)\sin(\chi - u/r_0) + s_3(u)\cos(\chi - u/r_0) & (45) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} c_3(u) &= \frac{r_0(3r_0^2 - u^2)}{r_0^2 + u^2}, & (46)\\ s_3(u) &= \frac{4ur_0^2}{r_0^2 + u^2}. & (47) \end{aligned}$$

Falls

$$\frac{\delta u}{r_0} = \tan(\frac{\delta u}{r_0} - \frac{\chi - \hat{\chi}}{2}), \tag{48}$$

dann ist der Abstand zwischen zwei Kurvenpunkten $\chi, u + \delta u$ und $\hat{\chi}, u - \delta u$ konstant 2ℓ mit

$$\ell^2 = \frac{r_0^2 \delta u^2}{r_0^2 + \delta u^2}. \tag{49}$$

2.4 Abstand zum Kreis

Der Kreis mit Radius r_0,

$$\hat{z}(u) = r_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}u/r_0} \tag{50}$$

ist eine zweite Lösung für $\epsilon > 2$. Für $\epsilon \leq 2$ nähern sich ihm die Kurven asymptotisch für $u \to \infty$. In allen diesen Fällen ist der Abstand zwischen der Kurve bei $\chi = 0, u$ und dem Kreis bei u konstant $2\ell = \epsilon r_0$.

2.5 Linearer Fall

Schließlich gibt es noch eine Lösung, bei der die Kurven sich asymptotisch einer Geraden nähern. Mit $s = \pm 1$ werden die beiden Kurven beschrieben durch

$$\begin{aligned} x(u) &= \frac{sd}{\cosh(2u/d)}, & (51) \\ y(y_0, u) &= y_0 - u + d\tanh(2u/d). & (52) \end{aligned}$$

Dabei haben Punkte $y_0, u + \delta u$ und $\hat{y}_0, u - \delta u$ auf zwei Kurven den Abstand

$$2\ell = |y_0 - \hat{y}_0 - 2\delta u|, \tag{53}$$

falls

$$y_0 - \hat{y}_0 - 2\delta u = \begin{cases} -d\tanh(2\delta u/d) & \text{gleiches}\, s \\ -d\coth(2\delta u/d) & \text{verschiedenes}\, s \end{cases} \tag{54}$$

Literatur

[1] F. Wegner, http://xxx.uni-augsburg.de/ps/physics/0701241

[2] F. Wegner, *Floating Bodies of Equilibrium* Studies in Appl. Math. 111 (2003) 167-183

[3] M. Abramowitz and I. A. Stegun, ed. *Handbook of Mathematical Functions* Dover Publ., New York

[4] A. Erdelyi, ed. *Higher Transcendental Functions. Bateman Manuscript Project* Mc-Graw Hill 1955 New York vol. 2

[5] Jahnke-Emde-Lösch, *Tafeln höherer Funktionen - Tables of Higher Functions* B.G. Teubner, Stuttgart

[6] E. Freitag, R. Busam, *Funktionentheorie* Springer-Lehrbuch